Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica   Prof. Juan Carlos Vila Bravo

Sustitutiva da 1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 11 de Abril de 2014

É proibido usar calculadora . Respostas sem justificativas ou que nao incluam os cálculos necessários não serão consideradas. BOA PROVA!

1. Considere a função f dada por

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y-1}{x^2}}$$

(i) Represente formalmente e graficamente o domínio da função $f(x,y)$.

solução:

$$Dom(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{y-1}{x^2} \geq 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 1 \text{ e } x \neq 0\right\}$$

Lembrar que $\{x = 0\}$ é o $\{eixo - y\}$.

(ii) Esboce algumas curvas de nivel da função

solução: Curvas de nivel $\mathcal{C}_k : f(x,y) = k$

$$\mathcal{C}_k : \sqrt{\frac{y-1}{x^2}} = k, \ \text{ então } \ k \geq 0$$

$$\mathcal{C}_k : \frac{y-1}{x^2} = k^2,$$

$$\mathcal{C}_k : \ \ y = 1 + (k^2)x^2, ...Parábolas$$

2. Mostre que o seguinte limite não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x+2y}$$

solução: Escolheremos os caminhos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, onde:

$$\mathcal{C}_1 = \Big\{(0,y) \in \mathbb{R}^2\Big\} ......eixo\ y$$

$$\mathcal{C}_2 = \Big\{(x, -\frac{x}{2} + x^2) \in \mathbb{R}^2\Big\} .....Parábola\ \ y = -\frac{x}{2} + x^2$$

Verifica-se que :

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x+2y}}_{com\ (x,y)\in\mathcal{C}_1} = 0$$

e

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x+2y}}_{com\ (x,y)\in\mathcal{C}_2} = -\frac{3}{4}$$

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x+2y}$$

3. Uma caixa cilíndrica é feita com um material de espessura $0,03m$. As medidas internas são: altura $2m$ e raio da base $1m$. A caixa é sem tampa. Calcule um valor aproximado para o volume do material utilizado na caixa. **solução:**

   $Volume\ :\ \ V(r,h) = \pi r^2 h$

   Diferencial Total: $dV = V_r dr + V_h dh$

$$dV = 2\pi rhdr + \pi r^2 dh$$

   Sustituindo: $r = 1,\ h = 2,\ dr = dh = 0,03$, obtemos:

$$dV = \frac{15\pi}{100} = 0,471225$$

4. Suponha que $z = x^2y$. Se $\vec{u}=(a,b)$ é um vetor unitário, escreva a fórmula para a derivada direcional em $(1,-1)$ na direção do vetor $\vec{u}=(a,b)$. Em que direção devemos seguir a fim de que a taxa de variação de z seja 2 ?

   solução: Dado $f(x,y) = x^2y$, temos que $\nabla f(x,y) = (2xy, x^2)$.

   Como $f(x,y)$ é diferenciavel, então: $D_{\vec{u}}f(x,y) = \dfrac{\nabla f(x,y)\cdot \vec{u}}{||\vec{u}||}$

   Para $(x,y) = (1,-1)$ e $\vec{u}=(a,b)$ vetor unitario, obtem-se:

$$D_{\vec{u}}f(1,-1) = -2a + b.$$

   Agora queremos achar o vetor $\vec{u}$ (a,b) vetor unitario, tal que $D_{\vec{u}}f(1,-1) = 2$;
   Isto nos leva ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ \\ -2a + b = 2 \end{cases}$$

   de onde temos que $\vec{u}=(a,b)$ pode ser:

$$\vec{u}=(-1,0) \;\; ou \;\; \vec{u}=(\frac{-3}{5},\frac{4}{5})$$

5. Encontre e classifique os extremos locais da função:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

   solução: Dado $f(x,y) = x3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (3x^2 - 3, 3y^2 - 12)$$

   Pontos criticos, pontos (x,y) os quais satisfazem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ \\ 3y^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

   Portanto os pontos criticos são: $A(1,2),\; B(1,-2),\; C(-1,2),\; D(-1,-2)$.
   criterio da segunda derivada:

$$f_{xx} = 6x, \;\; f_{xy} = 0, \;\; f_{yy} = 6x$$

Denotemos por $\Lambda(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 36xy$

ponto	*sinal de* $\Lambda(x,y)$	*sinal de* f_{xx}	*Natureza*
$A(1,\ 2)$	*positivo*	*positivo*	*pto.mín.Local*
$B(1,-2)$	*negativo*	....	*pto.sela local*
$C(-1,2)$	*negativo*	....	*pto.sela local*
$D(-1,-2)$	*positivo*	*negativo*	*pto.máx.Local*

6. Seja $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Determine o plano tangente ao gráfico de f que forma com os planos coordenados um tetraedro de volume mínimo.