PERMUTAÇÃO, ARRANJO E COMBINAÇÃO

Monitora Juliana

PERMUTAÇÕES SIMPLES

Uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se denominarmos P_n o número das permutações simples dos n objetos, então:

$$P_n = n(n-1)\ (n-2)\ \dots\ n!$$

Define-se $P_0 = 0! = 1$

Exemplo 1
Considerando os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números de 2 algarismos distintos podem ser formados?

R:

Os números de 2 algarismos têm o algarismo das unidades e o algarismo das dezenas. Pode- se dizer então que existem 2 posições para serem preenchidas, P1 e P2. A posição P1 pode ser preenchida de 5 maneiras diferentes, restando, portanto, 4 dígitos que podem ocupar a posição P2. Então há 5 * 4 = 20 maneiras diferentes das posições P1 e P2 serem ocupadas, isto é, há 20 números de 2 algarismos distintos que podem ser formados com os 5 dígitos.

Exemplo 2:
Dado o conjunto A= {1, 2, 3, 4, 5} quantos subconjuntos de 2 algarismos A possui?

R:

Vamos listar estes subconjuntos:

A1 = {1, 2}	A4 = {1, 5}	A7 = {2, 5}	A10 = {4, 5}
A2 = {1, 3}	A5 = {2, 3}	A8 = {3, 4}	
A3 = {1, 4}	A6 = {2, 4}	A9 = {3, 5}	

São ao todo 10 subconjuntos de 2 elementos que podem ser formados com os 5 elementos de A. No exemplo anterior havia 20 números de 2 algarismos diferentes e aqui se obteve 10 subconjuntos de 2 elementos. A explicação para a diferença de resultados – exatamente a metade – está no fato de que, por exemplo, os números 12 e 21 são diferentes, enquanto que os subconjuntos {1, 2} e {2, 1} são iguais.

Exemplo 3:
De quantas maneiras diferentes as letras a, a, a, a, b, b, b, c, c, d podem ser distribuídas entre duas pessoas?

R:

A primeira pessoa pode receber nenhuma, uma, duas, três ou quatro a's. Portanto há 5 maneiras diferentes de se distribuir os a's. De maneira semelhante, há 4 maneiras de se distribuir os b's; 3 maneiras de se distribuir os c's e 2 maneiras de se distribuir o d. Portanto há

$5 * 4 * 3 * 2 = 120$ maneiras de distribuirmos estas letras entre as duas pessoas.

ARRANJOS SIMPLES

Arranjos simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo. Notação: A_n^p.
Vamos tentar encontrar uma expressão matemática que caracterize A_n^p , usando o princípio multiplicativo.
Temos n elementos dos quais queremos tomar p. Este é um problema equivalente a termos n objetos com os quais queremos preencher p lugares.

$$\overline{L1} \quad \overline{L2} \quad \overline{L3} \quad \cdots \quad \overline{Lp}$$

O primeiro lugar pode ser preenchido d em maneiras diferentes. Tendo preenchido $L1$, restam $(n-1)$ objetos e portanto, o segundo lugar pode ser preenchido de $(n-1)$ maneiras diferentes. Após o preenchimento de $L2$ há $(n-2)$ maneiras de se preencher L3 e assim sucessivamente vamos preenchendo as posições de forma que Lp terá $(n-(p-1))$ maneiras diferentes de ser preenchido. Pelo princípio multiplicativo podemos dizer que as p posições podem ser preenchidas sucessivamente de $n(n-1)(n-2) \ldots (n-(p-1))$ maneiras diferentes. Sabe-se que uma igualdade não se altera se a multiplicarmos e dividirmos por um mesmo valor, então:

$$A_n^p = \frac{[n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))][(n-p)(n-p-1)\ldots 2 * 1]}{(n-p)(n-p-1)\ldots 2 * 1}$$

podendo assim ser simplificada para

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 1:
Quantos anagramas de 2 letras diferentes podemos formar com um alfabeto de 23 letras?

R:

$$A_{23}^2 = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{23!}{21!} = 23 * 22 = 506$$

Exemplo 2:
Considerando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, quantos números de 2 algarismos diferentes podem ser formados?

R:

$$A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 5 * 4 = 20$$

Exemplo 3:
Considere os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Quantos números distintos, superiores a 100 e inferiores a 1000, podemos formar se:

a) O número é par?

R: Se o número é par, a posição P_3 pode ser preenchida ou com o algarismo 2 ou com o 4. Há, portanto, 2 maneiras diferentes desse preenchimento ser feito. Tomemos, por exemplo, o 4:

$$\underset{P_1}{___}\quad \underset{P_2}{___}\quad \underset{P_3}{_4_}$$

Para o preenchimento das posições P_1 e P_2 temos à disposição os algarismos 1, 2, 3, 5. Esse preenchimento pode se dar de

$$A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4 * 3 = 12$$

Consequentemente, existem 2*$A_4^2 = 2 * 4 * 3 = 24$ maneiras diferentes de preencher as 3 posições, isto é, há 2*A_4^2 números pares superiores a 100 e inferiores a 1000, formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

b) O número é ímpar?

R: Se o número é ímpar, a posição P_3 pode ser preenchida ou com algarismo1, ou com algarismo 3, ou com algarismo 5. Há, portanto, 3 maneiras diferentes desse preenchimento ser feito. Tomemos, por exemplo, o 1:

$$\underset{P_1}{___}\quad \underset{P_2}{___}\quad \underset{P_3}{_1_}$$

Para o preenchimento das posições P_1 e P_2 temos à disposição os algarismos 2, 3, 4, 5. Esse preenchimento pode se dar de

$$A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4 * 3 = 12$$

Consequentemente, $3 * A_4^2 = 3 * 4 * 3 = 36$ é o número de maneiras diferentes de preencher as 3 posições, isto é, há $3 * A_4^2$ números ímpares superiores a 100 e inferiores a 1000, formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

c) O número é par ou ímpar?

R: Se os números podem ser pares ou ímpares, podemos resolver o problema de duas maneiras diferentes. Já que temos a quantidade de números pares e a quantidade de números ímpares, calculados em (a) e em (b), podemos somar os dois resultados.

$$2 * A_4^2 + 3 * A_4^2 = 5 * A_4^2 = 5 * 4 * 3 = 60$$

Portanto pelo princípio multiplicativo há $5 * 4 * 3$ maneiras diferentes de se preencher sucessivamente as 3 posições, isto é, há $5 * 4 * 3$ números superiores a 100 e inferiores a 1000 formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

COMBINAÇÕES

Combinações simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que$p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos. Notação: $C_n^p = \binom{n}{p}$. Vimos que o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é igual ao número de maneiras de preencher p lugares com n elementos disponíveis. Obtivemos:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Como sendo o número de agrupamentos que diferem entre si pela natureza e pela ordem de colocação dos elementos no agrupamento, isto é, importa quem participa e o lugar que ocupa.

Entretanto, quando consideramos combinações simples de n elementos tomados p a p, temos agrupamentos de p elementos, tomados dentre os n elementos disponíveis, que diferem entre si apenas pela natureza dos elementos, isto é, importa somente quem participa do grupo.

De uma maneira geral

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Exemplo 1
Quantos são os anagramas formados por 2 vogais e3 consoantes escolhidas dentre 18 consoantes e 5 vogais?

R:

A escolha das vogais pode ser dar de C_5^2 maneiras diferentes. A escolha das consoantes pode se dar de C_{18}^3 maneiras diferentes. Portanto o número de anagramas com 2 vogais e 3 consoantes é dado por:

$$C_5^2 * C_{18}^3 = 979.200$$

Exemplo 2
Quantos anagramas da palavra UNIFORMES começam por consoante e terminam em vogal?

R:

A palavra UNIFORMES possui 4 vogas e 5 consoantes. Devemos escolher 1 consoante para começar a palavra e 1 vogal para terminá-la. Isto pode ser feito, respectivamente, de C_5^1 e C_4^1 maneiras. As outras 7 letras podem ocupar qualquer uma das 7 posições e isto se dá de 7! maneiras. Portanto $C_5^1 * C_4^1 * 7! = 5 * 4 * 7! = 100800$ é o número de anagramas da palavra UNIFORMES que começam por consoante e terminam por vogal.

Exemplo 3
Quantos triângulos e quantos quadriláteros diferentes podem ser traçados utilizando-se 14 pontos de um plano, não havendo 3 pontos alinhados?

R:

Como não há 3 pontos alinhados, basta escolhermos 3 pontos dentre os 14 para traçarmos um triângulo. Desta forma, podemos traçar $C_{14}^{3} = 364$ triângulos diferentes.

Para traçarmos quadriláteros, basta escolhermos 4 pontos dentre os 14. Desta forma, podemos traçar $C_{14}^{4} = 1001$ quadriláteros diferentes.