*Prof. Jomar*

# MATRIZES

## 1. Introdução

Em matemática, é comum lidar com dados relacionados a duas informações. Por isso, os matemáticos criaram as suas próprias tabelas, que receberam o nome de **matrizes**.

Na verdade, as matrizes podem ser vistas como uma linguagem matemática que visa facilitar sobremaneira a apresentação de equações e cálculos.

## 2. Matriz

### 2.1 Definição

Chama-se **matriz A** do tipo mxn (lê-se "m por n) a toda tabela com **m** linhas e **n** colunas.

Diz-se, também, que mxn é a ***dimensão*** ou ***tipo*** da **matriz A**.

### 2.2 Denotação

Denota-se uma **matriz A** do tipo mxn por

$$\mathbf{A_{mxn}} \text{ ou } \mathbf{{}_mA_n}$$

### 2.3 Representação

Uma **matriz A** é representada colocando-se seus elementos entre parênteses ou entre colchetes. Assim, a **matriz** $\mathbf{A_{2x3}}$ por ser representada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \text{ ou } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Obs.: A é do tipo 2x3 ou possui dimensão 2x3.

## 2.4 Representação Genérica

Há duas maneiras de se representar uma **matriz A** do tipo mxn: a forma explícita e a foram abreviada.

### 2.4.1 Explícita

Nessa forma, a **matriz $\mathbf{A}_{\mathbf{mxn}}$** é representada indicando-se cada uma dos elementos por uma letra minúscula acompanhada de dois índices: o primeiro indicando a **linha** e o segundo a **coluna**.

Assim, se indicarmos os elementos pela letra **a**, então, o elemento da linha **i** e coluna **j** será indicado por $\mathbf{a}_{\mathbf{ij}}$. Logo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

### 2.4.2 Abreviada

Nessa forma, a **matriz $\mathbf{A}_{\mathbf{mxn}}$** é dada por

$$A = (a_{ij})_{mxn}$$

em que, $a_{ij}$ indica o elemento da linha **i** e coluna **j**.

Assim, $A_{2x3}$ é equivalente à $A=(a_{ij})_{2x3}$.

Exemplo: Escreva na forma de tabela a **matriz $A=(a_{ij})_{2x3}$**, em que $a_{ij}=2i-3j$.

Resolução:

Forma explícita:

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ . Note, $a_{11}=$ 2.1-3.1=-1; $a_{23}$=2.2-3.3=-5.

Assim,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

3. Tipos de matriz

3.1 Matriz Linha

Chama-se matriz linha a toda matriz que possui apenas uma linha (m=1). Genericamente, $A_{1xn}$.

Exemplo: A=[2 6 9 0], matriz linha do tipo 1x4.

3.2 Matriz Coluna

Chama-se matriz coluna a toda matriz que possui apenas uma coluna (n=1). Genericamente, $A_{mx1}$.

Exemplo: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$, matriz coluna do tipo 4x1.

Obs.: Essa matriz geralmente é denotada por ***vetor***.

## 3.3 Matriz Quadrada

Chama-se matriz quadrada a toda matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas (m=n). Genericamente, $A_{nxn}$. Diz-se, portanto, que a **matriz A** é de ordem **n**.

Nesse contexto, se **A** é quadrada, então:

a) os elementos de $\mathbf{A_{ij}}$ tais que i=j, formam a diagonal principal de **A**;

b) os elementos $\mathbf{a_{ij}}$ tais que i+j=n+1 formam a diagonal secundária de **A**.

## 3.4 Matriz Identidade (ou Matriz Unidade)

Chama-se matriz identidade de ordem **n**, **n≥2**, a toda matriz quadrada de ordem **n**, tal que os elementos da diagonal principal são iguais a **um**, e os demais elementos iguais a **zero**.

Se n=1, o elemento da matriz identidade é igual a **um**.

Notação: $\mathbf{I_n}$.

Exemplo: $\mathbf{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

## 3.5 Matriz Nula

Chama-se matriz nula à matriz que possui todos os elementos iguais a **zero**.

Notação: $\mathbf{O_{mxn}}$.

## 3.6 Matriz Transposta

Chama-se matriz transposta da **Matriz $A_{mxn}$** à **Matriz $A_{nxm}$** cujas linhas (colunas) coincidem ordenadamente com as colunas (linhas) da **Matriz A.**

Notação: $\mathbf{A^t}$ ou **A'**.

Exemplo: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$. Logo, $\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

## 3.7 Matriz Oposta

Chama-se matriz oposta da **matriz A** à matriz em que seus elementos são os opostos dos elementos correspondentes da **matriz A.**

Notação: **-A**

**Exemplo:** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$. Então, $-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -3 & -8 & -5 \end{bmatrix}$

Nota: elementos correspondentes são elementos que ocupam as mesmas posições entre matrizes.

## 3.8 Matriz Simétrica

Se uma matriz quadrada $\mathbf{A_{(n)}=(a_{ij})}$ tem $a_{ij} = a_{ji}$; $\forall$ par (i;j), então **A** é uma matriz simétrica.

Note que: caso **A=A'**, então, **A** é simétrica.

Exemplo 1: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Exemplo 2: Para que B seja simétrica, é necessário que x e y valham 5 e -4, respectivamente.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & x & 2-y \\ 5 & -1 & -4 \\ 6 & y & 0 \end{bmatrix}.$$

Nota: Toda matriz $I_n$ é simétrica.

## 3.9 Matriz Antissimétrica

Se uma matriz quadrada $A_{(n)}=(a_{ij})$ possui $a_{ij}=0$, para i=j e $a_{ij} = -a_{ji}$ para $i \neq j$, então A é uma matriz antissimétrica.

## 3.10 Matriz Triangular

É a matriz quadrada que possui <u>todos</u> os elementos nulos, acima ou abaixo da diagonal principal.

Exemplos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix} \text{(Triangular Inferior) e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{(Triangular Superior)}$$

## 4. Igualdade entre Matrizes

Duas matrizes $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$, do mesmo tipo mxn, são ditas iguais se, e somente se, os elementos correspondentes de A e B são iguais.

Notação: A=B

Exemplo: Se $\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & z \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, então, x=-1; y=5 e z=1.

5. Adição de Matrizes

Dadas as matrizes $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ e $C=(c_{ij})$, do mesmo tipo mxn, dizemos que C é a soma de A com B se, e somente se, cada elemento de C for a soma dos seus elementos correspondentes de A e B.

Notação: $A+B = C \Leftrightarrow a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

Exemplo: Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} e\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$. Então, C=A+B vale:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1+x & 4+3 \\ 2+6 & 5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 7 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Nota: para que seja possível a adição, necessariamente, as matrizes devem possuir a mesma dimensão (mesmo tipo).

5.1 Propriedades

Sejam A, B, C e O (nula) do mesmo tipo. Então,

a) comutativa: A+B=B+A;

b) associativa: (A+B)+C=A+(B+C);

c) elemento neutro: A+O=A;

d) elemento oposto: A+(-A)=O;

e) transposta da soma: (A+B)’=A’+B’

6. Subtração de Matrizes

Equivalente à adição.

Notação: $A-B = A+(-B)=C \Leftrightarrow a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$

7. Multiplicação de um número (escalar) por uma Matriz

Dadas as matrizes $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$ do mesmo tipo mxn e um número **k**, diz-se que B é o produto de **k** por A se, e somente, B for obtida multiplicando-se pó **k** todos os elementos de A.

Notação: B=**k**.A $\Leftrightarrow$ $b_{ij}$=**k**.$a_{ij}$

Exemplo: Se **A** $= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$, **k**=2 e B=**k**.A, então,

$$\mathbf{B} = 2.\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 6 & 16 & 10 \end{bmatrix}$$

7.1 Propriedades

Sejam A e B matrizes do mesmo tipo mxn, e **k** e **s**, escalares. Logo,

a) k. (A+B)=k.A+k.B;

b) (k+s)A=k.A+s.A;

c) k.(s.A)=(k.s).A;

d) (k.A)’=k.A’

8. Multiplicação de Matrizes

Dadas as matrizes $\mathbf{A}_{\mathbf{mxp}}$ e $\mathbf{B}_{\mathbf{pxn}}$, diz-se que a matriz C do tipo mxn é o produto de A por B se, e somente se, cada elemento $c_{ij}$ da matriz **C** for obtido multiplicando-se, ordenadamente, os elementos da linha **i** de A pelos elementos da coluna **j** de B e, posteriormente, somando-se os produtos obtidos.

Notação: **C=A.B** $\Leftrightarrow$ $c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + ... + a_{ip}.b_{pj}$

Observações:

1) o produto existirá se o número de colunas de uma matriz for igual ao número de linhas da outra matriz. Assim,

$${}_mA_p \cdot {}_pB_n \Rightarrow \exists\ C=A.B$$

2) C é do tipo mxn;
3) Se existe o produto A.B, não implica, necessariamente, na existência de B.A. Veja:

$${}_mA_p \cdot {}_pB_n \Rightarrow \exists\ A.B$$

$$\text{mas, } {}_pB_n \cdot {}_mA_p \Rightarrow \exists\ B.A \text{ se } n=m.$$

Exemplo:

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 11 \\ 24 & 16 \end{bmatrix}$. Pois, por exemplo: 15 = 2x5+3x1+1x2.

## 8.1 Propriedades

Sejam as matrizes A, B, C, I (identidade) e r um número (escalar). Admitindo as condições para as operações de adição e multiplicação, valem as propriedades:

1) associativa: A.(B.C)=(A.B).C;
2) distributiva pela esquerda: A.(B+C)=A.B+A.C;
   distributiva pela direita: (B+C).A=B.A+C.A;
3) r.(A.B)=(r.A).B;
4) (A.B)′=B′.A′;
5) $A_{mxn}.I_n=A$ e $I_m.A_{mxn}=A$.

9. Potência de uma Matriz

Seja A uma matriz quadrada. Chama-se potência de base A e expoente n ($n \in \mathbf{N}$) a matriz que se indica por $A^n$ e se define por:

$$\mathbf{A^0 = I . A^1 = A \ \ e \ \ A^n = A^{n-1} . A}, \text{ para } n \geq 2.$$

Exemplos: Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Obter:

a) $\mathbf{A^2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A^3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**c)** $\mathbf{A^n} =$

Nota: Dada a matriz $\mathbf{A_{(n)}}$, então, em relação à sua segunda potência, tem-se:

a) idempotente, se $A^2=A$;

b) nilpotente, se $A^2=0$;

c) unipotente, se $A^2=I$.

10. Matriz Ortogonal

Diz-se que A é ortogonal se $A.A'=A'.A=I$

11. Matriz Inversa (**Clássica**)

Uma matriz quadrada **A** de ordem **n** diz-se inversível, ou não singular, se e somente se, existir uma matriz que indicamos por $\mathbf{A^{-1}}$, tal que:

$$\mathbf{A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_n}$$

12. Equação Matricial do Tipo **XA=B**

Sendo X, A e B matrizes quadradas do mesmo tipo, prova-se que, se A admite inversa clássica ($A^{-1}$), então:

$$X.A=B \Leftrightarrow X=B.A^{-1}$$

## 13. <u>Propriedades da Matriz Inversa Clássica</u>

Sendo A e B matrizes quadradas do mesmo tipo e inversíveis, temos que:

a) $(A^{-1})^{-1}=A$;
b) $(A^{-1})'=(A')^{-1}$;
c) $(AB)^{-1}=B^{-1}\ A^{-1}$
d) A inversa clássica, se existir, é única.

## 14. <u>FORMAS ESCALONADAS</u>

**<u>Definição 1</u>**: Operações elementares são assim definidas:
- trocar a posição de duas linhas (ou de duas colunas);
- multiplicar a linha i (ou a coluna j) por uma constante k;
- substituir a linha i por $\ell_i + k\,\ell_i$ , (ou a coluna j por $c_j + k\,c_j$).

**<u>Definição 2</u>**: Uma matriz ${}_mA_n$ , ou $A_{mxn}$ , está na <u>forma escalonada</u>, se ocorrer simultaneamente:

i) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é 1 (líder);
ii) Toda coluna que tem um 1 líder, tem todos os outros elementos nulos;
iii) Se a linha i tem um 1 líder na posição j (coluna j) então qualquer linha i' que tenha um 1 líder, o terá na posição j', de modo que:

$$i' < i \Rightarrow j' < j$$

$$i' > i \Rightarrow j' > j$$

<u>Exemplo 1:</u>

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 0 & a13 & 0 & a15 \\ 0 & 1 & a23 & 0 & a25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a45 \end{bmatrix} , \forall\, a_{ij} \in \mathbb{R};$$

$$B= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b14 \\ 0 & 1 & 0 & b24 \\ 0 & 0 & 1 & b34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \forall\, b_{ij} \in \mathbb{R};$$

$$C= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

D= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ou seja, o primeiro elemento de cada linha, se não for 0, é 1 e é chamado de líder. Nas colunas que tenham o 1 líder, o resto é 0. Ficará sempre na diagonal principal o 1 líder, exceto quando a linha for nula.

**Definição 3:** Dizemos que uma matriz está na forma escalonada canônica (FEC) se ela está na forma escalonada e tem todas as linhas nulas abaixo das não nulas, caso existam linhas nulas. No exemplo 1, as matrizes B, C e D estão na FEC.

**Teorema:** Dada uma matriz real não nula $A_{mxn}$ , é sempre possível obtermos sua FEC através de operações elementares.

## 15. ALGORITMO DE GAUSS PARA ESCALOLAR MATRIZES

**Dada uma matriz $A_{(n)}$ :**

**1º passo**: Zerar todos os elementos que estão abaixo da diagonal principal, isto é, os elementos $a_{ij}$ tais que i > j. Para tanto, basta multiplicar a linha j pelo multiplicador $m_{ij}$ e adicionar o resultado à linha i, sequencialmente da 1ª até a penúltima coluna. Definimos $m_{ij}$, por

$m_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{jj}}$ ; i> j; $a_{jj} \neq 0$.

Ao final do 1º passo teremos uma forma triangular superior.

Exemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Consideremos a matriz A.

Primeiramente, devemos multiplicar a 1ª linha por (-1/3) e somar à 2ª linha:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Em seguida, multiplicamos a 1ª linha por ($\frac{1}{2}$) e somamos com a 3ª linha:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{bmatrix}$$

Agora, precisamos zerar todos os elementos abaixo da diagonal principal na 2ª coluna, neste caso, o elemento $a_{32}$. Para isto, multiplicaremos a 2ª linha por ($-\frac{5}{11}$) e somaremos à 3ª linha:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{40}{11} \end{bmatrix}$$

**2º passo**: Relembrando que:

i) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é 1 (líder);

ii) Toda coluna que tem um 1 líder, tem todos os outros elementos nulos;

Devemos iniciar o 2º passo transformando em líder os elementos da diagonal principal não nulos.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{40}{11} \end{bmatrix}$$

Neste caso, multiplicamos a 3ª linha por $(\frac{11}{40})$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Depois, multiplicamos a 3ª linha por (-3) e somamos à 2ª linha.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, multiplicamos a 2ª linha por $(\frac{3}{11})$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando novamente a 2ª linha por (-1) e somando à 1ª coluna, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, é só multiplicar a 1ª linha por (1/3) e nossa matriz está escalonada, e note, na forma de Hermite.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fatos:

- Nem sempre a matriz escalonada terá a forma canônica igual à da matriz identidade.
- O algoritmo de Gauss apresentado pode ser usado para escalonar matrizes não quadradas também.