Prof. Jomar

# DETERMINANTES - PROPRIEDADES

1. det(A) = det(A');
2. Se todos os elementos de uma fila de A forem iguais a ZERO, Entao: det(A) = 0;
3. Se uma fila de A for multiplicada por um escalar ***k***. Então, det(B) = ***k***. det(A);
4. Se trocarmos uma vez a posição de duas filas paralelas. Então, o determinante resultante ficará com o sinal trocado;
5. Se A possuir duas filas paralelas iguais (ou proporcionais). Então, o determinante resultante será igual a ZERO;
6. Numa matriz triangular seu determinante será obtido pela multiplicação dos elementos da diagonal principal;
7. det(A.B) = det(A).det(B). A e B de mesma ordem (**Teo. De Binet**);
8. Adicionando-se **a uma fila** de $A_n$ uma **outra fila** paralela a ela que se multiplica por uma constante, obtém-se uma nova matriz B tal que: **det(B) = det (A)** (TEOREMA DE JACOBI).

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $\det(A) = 4$. Adicionando-se à 2ª coluna os elementos da 1ª coluna multiplicados por 2, resulta na matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 10 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}; \ \det(B) = 4 \cdot$$

# TEOREMA DE LAPLACE

O determinante de uma matriz $A_{(n)}$, n>1, é a soma dos produtos dos elementos de **qualquer** fila (linha ou coluna), pelos seus respectivos cofatores.

**Cofator:**

O cofator do elemento $a_{ij}$ de uma matriz $A_{(n)}$ é dado por:

$$\mathbf{C_{ij} = (-1)^{i+j}.\ det(A^{*}),}$$

em que, A* é a matriz resultante após a retirada da linha i e da coluna j da matriz A.
Veja um exemplo:

$$\text{Seja a matriz } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

O cofator associado ao elemento $a_{32}=6$ fica:

$$\mathbf{C_{32} = (-1)^{3+2}.\ det(A^{*}),}$$

$$A^{*} = \begin{bmatrix} 1 & & 3 & 1 \\ 2 & & 7 & 4 \\ & & & \\ -2 & & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$C_{32} = (-1)^{3+2}. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$C_{32} = (-1).(-15) = 15.$$

**Dessa forma, o determinante de A, após a escolha da fila, por exemplo a linha 3, fica:**

$$\boxed{\det(A) = 1.\ C_{31} + 6.C_{32} + 0.C_{33} + 7.C_{34}}$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{34} = (-1)^{3+4}. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$\det(A) = 1.\ (-10) + 6.15 + 0.(-5) + 7.(-5) = 45$$

# TEOREMA DE JACOBI

## SIMPLIFICAÇÃO DO CÁLCULO DO DETERMINANTE

Aplicando, sucessivamente, o Teorema de Jacobi, pode-se obter o determinante de uma matriz de ordem n, n>3, tornando nulos os (n-1) elementos de uma fila.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, por meio de operações elementares, verifica-se que a matriz resultante B é equivalente à matriz A.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Veja que B foi obtida pela multiplicação da 1ª linha por (-2); (-1) e (2) e, posteriormente, os resultados dessas multiplicações foram adicionados, respectivamente, às linhas 2; 3 e 4. Dessa forma, consegue-se tornar (n-1=3 elementos) nulos (1ª coluna). Logo, o determinante ficará mais fácil de ser obtido.

Assim, pelo Teorema de Laplace:

$$\mathbf{det(A) = det(B) = 1.(-1)^{1+1}.} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 6 \\ 4 & 9 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{= 45}$$