Sistemas de equações lineares

Exercício 1:

a) $\begin{cases} x+2.y=5 \\ 3.x-y=2 \end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=1.-1-2.3=-1-6=-7$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=5.-1-2.2=-5-4=-9$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1.2-3.5=2-15=-13$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-9}{-7}=\frac{9}{7}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-13}{-7}=\frac{13}{7}$$

Conclusão: A solução única do sistema é $\left(\frac{9}{7},\frac{13}{7}\right)$.

Sistema Possível e Determinado.

b) $\begin{cases} 4.x-7.y=11 \\ 2.x+8.y=0 \end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=4.8-2.-7=32+14=46$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 11 & -7 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}=11.8-(-7).0=88$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=4.0-11.2=0-22=-22$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{88}{46}=\frac{44}{23}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-22}{46}=-\frac{11}{23}$$

Conclusão: A solução única do sistema é $\left(\frac{44}{23}, -\frac{11}{23}\right)$.

Sistema Possível e Determinado.

c) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = 4 \\ 2.x - y + z = 1 \end{cases}$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right| = (1.-1.1) + (1.-1.2) + (1.1.-1) - (1.-1.2) -$$

$$-(1.-1.-1) - (1.1.1) = -1 - 2 - 1 + 2 - 1 - 1 = -4$$

$$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right| = (6.-1.1) + (1.-1.1) + (1.4.-1) - (1.-1.1) -$$

$$-(6.-1.-1) - (1.4.1) = -6 - 1 - 4 + 1 - 6 - 4 = -20$$

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 6 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right| = (1.4.1) + (6.-1.2) + (1.1.1) - (1.4.2) -$$

$$-(1.-1.-1) - (6.1.1) = 4 - 12 + 1 - 8 + 1 - 6 = -20$$

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right| = (1.-1.1) + (1.4.2) + (6.1.-1) - (6.-1.2) -$$

$$-(1.4.-1) - (1.1.1) = -1 + 8 - 6 + 12 + 4 - 1 = 16$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-20}{-4} = 5$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-20}{-4} = 5$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{16}{-4} = -4$$

Conclusão: A solução única do sistema é $(5,5,-4)$.

Sistema Possível e Determinado.

d) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2.y+3.z=10 \\ x+4.y+9.z=8 \end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{matrix}=(1.2.9)+(1.3.1)+(1.1.4)-(1.2.1)-$$

$$-(1.3.4)-(1.1.9)=18+3+4-2-12-9=2$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & 1 \\ 10 & 2 \\ 8 & 4 \end{matrix}=(6.2.9)+(1.3.8)+(1.10.4)-(1.2.8)-$$

$$-(6.3.4)-(1.10.9)=108+24+40-16-72-90=-6$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 10 & 3 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 6 \\ 1 & 10 \\ 1 & 8 \end{matrix}=(1.10.9)+(6.3.1)+(1.1.8)-(1.10.1)-$$

$$-(1.3.8)-(6.1.9)=90+18+8-10-24-54=28$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 10 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{matrix}=(1.2.8)+(1.10.1)+(6.1.4)-(6.2.1)-$$

$$-(1.10.4)-(1.1.8)=16+10+24-12-40-8=-10$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-6}{2}=-3$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{28}{2}=14$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{-10}{2}=-5$$

Conclusão: A solução única do sistema é $(-3{,}14{,}-5)$.
Sistema Possível e Determinado.

Exercício 2:

$$\begin{cases} x + y + 2.z = 6 \\ x + m.y + z = 0 \\ 2.x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$D = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & m \\ 2 & 1 \end{matrix} = (1.m.1) + (1.1.2) + (2.1.1) - (2.m.2) -$$

$$-(1.1.1) - (1.1.1) = m + 2 + 2 - 4.m - 1 - 1 = -3.m + 2 \rightarrow D = -3.m + 2 \neq 0$$

$$\boxed{m \neq \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D} \;;\; y = \frac{D_y}{D} \;;\; z = \frac{D_z}{D}}$$

Exercício 3:

a) $\begin{cases} 2.x + 3.y = 4 \\ 2.y = 8 \end{cases}$ $\rightarrow \quad y = \frac{8}{2} = 4$

$$2.x + 3.4 = 4$$

$$2.x = 4 - 12 = -8$$

$$x = -\frac{8}{2} = -4$$

Sistema Possível e Determinado
$(-4,4)$.

b) $\begin{cases} x + 2.y - z = 3 \\ \quad y - 3.z = -9 \\ \quad\quad 3.z = 12 \end{cases}$ $\rightarrow \quad z = \frac{12}{3} = 4$

$$y - 3.4 = -9$$

$$y = -9 + 12 = 3$$

$$x + 2.3 - 4 = 3$$

$$x = 3 - 6 + 4 = 1$$

Sistema Possível e Determinado $\rightarrow (1,3,4)$.

c) $\begin{cases} 2.x + y - z = 6 \;\rightarrow\; 2.x + y = 6 + z \\ y + z = 0 \;\rightarrow\; y = -z \end{cases}$

$$2.x - z = 6 + z$$
$$2.x = 6 + 2.z$$
$$x = 3 + z = 1$$

Sistema Possível Indeterminado $\rightarrow (3 + z, -z, z)$

$z \rightarrow$ qualquer.

d) $\begin{cases} x + y + z + t - w = 5 \;\rightarrow\; x + t = 5 + w - y - z \\ t + w = 0 \;\rightarrow\; t = -w \end{cases}$

$$x - w = 5 + w - y - z$$
$$x = 5 + 2.w - y - z$$

w,y,z $\rightarrow$ quaisquer.

Sistema Possível Indeterminado $\rightarrow (5 + 2.w - y - z,\ y,\ z,\ -w,\ w)$

e) $\begin{cases} x + y - z - t + w = 2 \\ z + t - w = 0 \;\rightarrow\; z = w - t = w + 2.w = 3.w \\ t + 2.w = 0 \rightarrow\; t = -2.w \end{cases}$

$$\rightarrow x = 2 - y + z + t - w$$
$$x = 2 - y + 3.w - 2.w - w = 2 - y$$

Sistema Possível e Indeterminado $\rightarrow (2 - y,\ y,\ 3.w,\ -2.w,\ w)$

y,w $\rightarrow$ quaisquer.

Exercício 4:

a) $\begin{cases} x + y - 3.z = 0 \\ 4.x - y + z = 0 \\ 2.x - 3.y + 7.z = 0 \end{cases}$

1) Substituir a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -4.

$$\begin{cases} (-4.x - 4.y + 12.z = 0) \\ 4.x - y + z = 0 \\ 2.x - 3.y + 7.z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 3.z = 0 \\ -5.y + 13.z = 0 \\ 2.x - 3.y + 7.z = 0 \end{cases}$$

2) Substituir a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -2.

$$\begin{cases} (-2.x-2.y+6.z=0) \\ -5y+13.z=0 \\ 2.x-3.y+7.z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-3.z=0 \\ -5.y+13.z=0 \\ -5.y+13.z=0 \end{cases}$$

3) Substituir a 3ª equação pela soma dela com a 2ª equação multiplicada por -1.

$$\begin{cases} x+y-3.z=0 \\ (5y-13.z=0) \\ -5.y+13.z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-3.z=0 \\ -5.y+13.z=0 \\ 0.y+0.z=0 \end{cases}$$

$$-5.y=-13.z$$

$$y=\frac{13}{5}.z$$

$$x+\frac{13}{5}.z-3.z=0 \rightarrow x=3.z-\frac{13}{5}.z=\frac{2}{5}.z$$

Sistema Possível e Indeterminado $\rightarrow \left(\frac{2}{5}.z,\ \frac{13}{5}.z,\ z\right)$

$z \rightarrow$ qualquer.

b) $\begin{cases} x-y+2.z=2 \\ 2.x+y-z=3 \\ 4.x-y+z=3 \end{cases}$

1) Substituir a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -2.

$$\begin{cases} (-2.x+2.y-4.z=-4) \\ 2.x+y-z=3 \\ 4.x-y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2.z=2 \\ 3.y-5.z=-1 \\ 4.x-y+z=3 \end{cases}$$

2) Substituir a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -4.

$$\begin{cases} (-4.x+4.y-8.z=-8) \\ 3.y-z=-1 \\ 4.x-y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2.z=2 \\ 3.y-5.z=-1 \\ 3.y-7.z=-5 \end{cases}$$

3) Substituir a 3ª equação pela soma dela com a 2ª equação multiplicada por -1.

$$\begin{cases} x - y + 2.z = 2 \\ (-3.y + 5.z = 1) \\ 3.y - 7.z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2.z = 2 \\ 3.y - 5.z = -1 \\ 2.z = -4 \end{cases}$$

$$z = \frac{4}{2} = 2$$

$$3.y - 5.z = -1 \rightarrow 3.y = -1 + 5.z$$

$$3.y = -1 + 5.2 = 9$$

$$y = 3$$

$$x - y + 2.z = 2$$

$$x = 2 + y - 2.z = 2 + 3 - 2.2 = 5 - 4 = 1$$

Sistema Possível Determinado $\rightarrow (1,\ 3,\ 2)$

c) $\begin{cases} x - y + 3.z = 1 \\ 3.x - 4.y + z = 2 \\ 7.x - 10.y - 3.z = 6 \end{cases}$

1) Substituir a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -3.

$$\begin{cases} (-3.x + 3.y - 9.z = -3) \\ 3.x - 4.y + z = 2 \\ 7.x - 10.y - 3.z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3.z = 1 \\ -y - 8.z = -1 \\ 7.x - 10.y - 3.z = 6 \end{cases}$$

2) Substituir a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -7.

$$\begin{cases} (-7.x + 7.y - 21.z = -7) \\ -y - 8.z = -1 \\ 7.x - 10.y - 3.z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3.z = 1 \\ -y - 8.z = -1 \\ -3.y - 24.z = -1 \end{cases}$$

3) Substituir a 3ª equação pela soma dela com a 2ª equação multiplicada por -3.

$$\begin{cases} x - y + 3.z = 1 \\ (3.y + 24.z = 3) \\ -3.y - 24.z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3.z = 1 \\ -y - 8.z = -1 \\ 0.y + 0.z = 0 \end{cases}$$

$$-y=-1+8.z$$
$$y=1-8.z$$

$$x=1-3.z+y=1-3.z+1-8.z=2-11.z$$

Sistema Possível Indeterminado $\rightarrow (2-11.z,\ 1-8.z,\ z)$
$z \rightarrow$ qualquer.

d) $\begin{cases} x-2.y+z=1 \\ 2.x+y-z=2 \\ x+3.y-2.z=1 \end{cases}$

1) Substituir a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -2.

$$\begin{cases} (-2.x+4.y-2.z=-2) \\ 2.x+y-z=2 \\ x+3.y-2.z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2.y+z=1 \\ 5.y-3.z=0 \\ x+3.y-2.z=1 \end{cases}$$

2) Substituir a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -1.

$$\begin{cases} (-x+2.y-z=-1) \\ 5.y-3.z=0 \\ x+3.y-2.z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2.y+z=1 \\ 5.y-3.z=0 \\ 5.y-3.z=0 \end{cases}$$

3) Substituir a 3ª equação pela soma dela com a 2ª equação multiplicada por -1.

$$\begin{cases} x-2.y+z=1 \\ (-5.y+3.z=0) \\ 5.y-3.z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2.y+z=1 \\ 5.y-3.z=0 \\ 0.y+0.z=0 \end{cases}$$

$$5.y-3.z=0$$
$$y=\frac{3}{5}.z$$
$$x=1+2.y-z=1+2.\frac{3}{5}.z-z=1+\frac{6}{5}.z-z=$$
$$=1+\frac{+6.z-5.z}{5}=1+\frac{1}{5}.z$$

Sistema Possível Indeterminado $\rightarrow \left(1+\frac{1}{5}.z,\ \frac{3}{5}.z,\ z\right)$
$z \rightarrow$ qualquer.

e) $\begin{cases} x+2.y=2 \\ 2.x+4.y=4 \\ 3.x+6.y=6 \end{cases}$

1) Substituir a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -2.

$$\begin{cases} (-2.x-4.y=-4) \\ 2.x+4.y=4 \\ 3.x+6.y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2.y=2 \\ 0.x+0.y=0 \\ 3.x+6.y=6 \end{cases}$$

2) Substituir a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -3.

$$\begin{cases} (-3.x-6.y=-6) \\ 2.x+4.y=4 \\ 3.x+6.y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2.y=2 \\ 0.x+0.y=0 \\ 0.x+0.y=0 \end{cases}$$

$x+2.y=2$

$x=2-2.y$

Sistema Possível Indeterminado $\rightarrow (2-2.y, y)$

$y \rightarrow$ qualquer.

f) $\begin{cases} 2.x+y=4 \\ x-y=2 \\ 3.x+2.y=5 \end{cases}$

1) Substituir a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -1/2.

$$\begin{cases} \left(-x-\frac{1}{2}.y=-2\right) \\ x-y=2 \\ 3.x+2.y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.x+y=4 \\ -\frac{3}{2}.y=0 \\ 3.x+2.y=5 \end{cases}$$

2) Substituir a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -3/2.

$$\begin{cases} \left(-3.x-\frac{3}{2}.y=-6\right) \\ -\frac{3}{2}.y=0 \\ 3.x+2.y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.x+y=4 \\ -\frac{3}{2}.y=0 \rightarrow y=0 \\ \frac{1}{2}.y=-1 \rightarrow y=-2 \end{cases}$$

Sistema Impossível.

g) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+z+t=2 \\ x+y+t=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

1) Substituir a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -1.

$$\begin{cases} (-x-y-z-t=-1) \\ x+z+t=2 \\ x+y+t=3 \\ x+y+z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -y=1 \\ x+y+t=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

2) Substituir a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -1.

$$\begin{cases} (-x-y-z-t=-1) \\ -y=1 \\ x+y+t=3 \\ x+y+z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -y=1 \\ -z=2 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

3) Substituir a 4ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -1.

$$\begin{cases} (-x-y-z-t=-1) \\ -y=1 \\ -z=2 \\ x+y+z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -y=1 \\ -z=2 \\ -t=3 \end{cases}$$

$y=-1; \quad z=-2; \quad t=-3$

$x=1-y-z-t=1-(-1)-(-2)-(-3)=7$

Sistema Possível Determinado $\rightarrow (7,\ -1,\ -2,\ -3)$

Exercício 5:

$C=40+0{,}2.(y-T)$

$I=15-20.r$

$M_d=4+0{,}1.y-10.r$

$M_s=10$

$G=10$

$T=10$

$\begin{cases} \text{a)} \quad y=C+I+G \\ \text{b)} \quad M_d=M_s \end{cases}$

a) $y = 40 + 0{,}2.(y - T) + 15 - 20.r + 10$

$y = 40 + 0{,}2.y - 0{,}2.T + 15 - 20.r + 10$

$y - 0{,}2.y + 0{,}2.T + 20.r = 40 + 15 + 10$

$0{,}8.y + 0{,}2.T + 20.r = 65$

$0{,}8.y + 0{,}2.10 + 20.r = 65$

$0{,}8.y + 20.r = 65 - 2 = 63$

b) $M_d = M_s$

$4 + 0{,}1.y - 10.r = 10$

$0{,}1.y - 10.r = 10 - 4 = 6$

$$\begin{cases} 0{,}8.y + 20.r = 63 \\ 0{,}1.y - 10.r = 6 \quad \to \quad y = 100.r + 60 \end{cases}$$

$0{,}8.(100.r + 60) + 20.r = 63$

$80.r + 48 + 20.r = 63$

$100.r = 63 - 48 = 15 \quad \to \quad r = 0{,}15$

$y = 100,r + 60 = 100.0{,}15 + 60 = 75$

$$\boxed{r = 15\% = 0{,}15 \ ; \quad y = 75}$$

Exercício 6:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} = 1.12 - 1.11 = 12 - 11 = 1$

$\det A = 1 \neq 0.$

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$a_{11} = 1 = 1.a + 1.b \qquad a_{12} = 0 = 1.c + 1.d$

$a_{21} = 11.a + 12.b \qquad a_{22} = 1 = 11.c + 12.d$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 11.a+12.b=0 \end{cases}$$

$$a=-\frac{12}{11}.b$$

$$-\frac{12}{11}.b+b=1$$

$$\frac{-12.b+11.b}{11}=1$$

$$-b=11 \;\rightarrow\; b=-11$$

$$a=-\frac{12}{11}.-11=12$$

$$\begin{cases} c+d=0 \\ 11.c+12.d=1 \end{cases}$$

$$c=-d$$

$$-11.d+12.d=1$$

$$d=1$$

$$c=-1$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 12 & -1 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.A^{-1}=I_2$$

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} 12 & -1 \\ -11 & 1 \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$a_{11}=12.1-1.11=1$$

$$a_{21}=12.11-11.12.=0$$

$$a_{12}=1.-1+1.1=0$$

$$a_{22}=-1.11+1.12=1$$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det B=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=5.4-2.3=20-6=14\neq 0$$

$$B.B^{-1}=I_2$$

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a.5 + b.2 = 1 \\ a.3 + 4.b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5.c + 2.d = 0 \\ 3.c + 4.d = 1 \end{cases}$$

$$a = -\frac{4}{3}.b \qquad c = -\frac{2}{5}d$$

$$-\frac{4}{3}.b.5 + 2.b = 1 \qquad 3.-\frac{2}{5}.d + 4.d = 1$$

$$b.\left(\frac{-20+6}{3}\right) = 1 \qquad d.\left(\frac{-6+20}{5}\right) = 1$$

$$-\frac{14}{3}.b = 1 \rightarrow b = -\frac{3}{14} \qquad \frac{14}{5}.d = 1$$

$$a = -\frac{4}{3}.-\frac{3}{14} = \frac{2}{7} \qquad d = \frac{5}{14}$$

$$c = -\frac{2}{5}.\frac{5}{14} = -\frac{1}{7}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det c = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$$

$$C.c^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 2.a + 0.b = 1 \\ 0.a + b.3 = 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} 2.c + 0.d = 0 \\ 0.c + 3.d = 1 \end{Bmatrix}$$

$$2.a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2} \qquad c = 0$$

$$b = 0 \qquad d = \frac{1}{3}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

d) $D=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{matrix} = 1.5-2+1.4-2+$$

$$+1.3-1-1.5-2-1.4-1-1.3-2=-10-8-3+10+$$
$$+4+6=-1\neq 0$$

$$D^{-1}=\frac{1}{\det D}.[\mathrm{cof}(D)]^t$$

$$\mathrm{cof}(D)=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

$$D_{11}=(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=1.(5..-2+4.+1)=-6$$

$$D_{21}=(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-1.(1.-2-1.1)=1$$

$$D_{31}=(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=1.(1.4-1.5)=-1$$

$$D_{12}=(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=-1.(3.-2-4.-2)=-2$$

$$D_{22}=(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=1.(1.-2-1.-2)=0$$

$$D_{32}=(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-1.(1.4-1.3)=-1$$

$$D_{13}=(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=1.(3.-1-5.-2)=7$$

$$D_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-1.(1.-1-1.-2)=-1$$

$$D_{33}=(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=1.(1.5-1.3)=2$$

$$\mathrm{cof}(D)=\begin{bmatrix} -6 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{cof}(D)]^t=\begin{bmatrix} -6 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e)

$$E=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{cof}(E)=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det E=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}=2.1.3+0.0.0+0.0.0-$$

$$-0.1.0-2.0.0-0.0.3=6\neq 0$$

$$E_{11}=(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=1.(1.3-0.0)=3$$

$$E_{21}=(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=-1.(0.3-0.0)=0$$

$$E_{31}=(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1.(0.0-0.1)=0$$

$$E_{12}=(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=-1.(0.3-0.0)=0$$

$$E_{22}=(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=1.(2.3-0.0)=6$$

$$E_{32}=(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=-1.(2.0-0.0)=0$$

$$E_{13}=(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=1.(0.0-1.0)=0$$

$$E_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=-1.(2.0-0.0)=0$$

$$E_{33}=(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1.(2.1-0.0)=2$$

$$\operatorname{cof}(E)=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=[\operatorname{cof}(E)]^t$$

$$E^{-1}=\frac{1}{\det E}.[\operatorname{coef}(E)]^t$$

$$E^{-1}=\frac{1}{6}.\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$E^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

f) $F=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$

$$\det F=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 0\\ 2 & 3\\ 4 & 5\end{matrix}=1.3.6+0.0.4+0.2.5-$$

$$-0.3.4-1.0.5-0.2.6=18+0+0-0-0-0=18\neq 0$$

$$\operatorname{cof}(F)=\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12} & F_{13}\\ F_{21} & F_{22} & F_{23}\\ F_{31} & F_{32} & F_{33}\end{bmatrix}$$

$$F_{11}=(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix}3 & 0\\ 5 & 6\end{vmatrix}=1.(3.6-0.5)=18$$

$$F_{12}=(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 6\end{vmatrix}=-1.(2.6-0.4)=-12$$

$$F_{13}=(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=1.(2.5-3.4)=-2$$

$$F_{21}=(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix}0 & 0\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-1.(0.6-0.5)=0$$

$$F_{22}=(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 6\end{vmatrix}=1.(1.6-0.4)=6$$

$$F_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-1.(1.5-0.4)=-5$$

$$F_{31}=(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}=1.(0.0-0.3)=0$$

$$F_{32}=(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-1.(1.0-0.2)=0$$

$$E_{33}=(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1.(1.3-0.2)=3$$

$$\operatorname{cof}(F)=\begin{bmatrix}18 & -12 & -2\\ 0 & 6 & -5\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$[\operatorname{cof}(F)]^t=\begin{bmatrix}18 & 0 & 0\\ -12 & 6 & 0\\ -2 & -5 & 3\end{bmatrix}$$

$$F^{-1}=\frac{1}{\det F}.\begin{bmatrix}18 & 0 & 0\\ -12 & 6 & 0\\ -2 & -5 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{18}.\begin{bmatrix}18 & 0 & 0\\ -12 & 6 & 0\\ -2 & -5 & 3\end{bmatrix}$$

$$F^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{9} & -\frac{5}{18} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

g) $G=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

$$\det G=\left|\begin{matrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}2 & 3\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}=2.1.2+3.5.0+$$

$$+4.0.0-4.1.0-2.5.0-3.0.2=4\neq 0$$

$$\operatorname{cof}(G)=\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12} & G_{13}\\ G_{21} & G_{22} & G_{23}\\ G_{31} & G_{32} & G_{33}\end{bmatrix}$$

$$G_{11}=(-1)^{1+1}.\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 2\end{bmatrix}=1.(1.2-5.0)=2$$

$$G_{21}=(-1)^{2+1}.\begin{bmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}=-1.(3.2-4.0)=-6$$

$$G_{31}=(-1)^{3+1}.\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 5\end{bmatrix}=1.(3.5-1.4)=11$$

$$G_{12}=(-1)^{1+2}.\begin{bmatrix}0 & 5\\ 0 & 2\end{bmatrix}=-1.(0.2-0.5)=0$$

$$G_{22}=(-1)^{2+2}.\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}=1.(2.2-0.4)=4$$

$$G_{32}=(-1)^{3+2}.\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 5\end{bmatrix}=-1.(2.5-0.4)=-10$$

$$G_{13}=(-1)^{1+3}.\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=1.(0.0-0.1)=0$$

$$G_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}=-1.(2.0-3.0)=0$$

$$G_{33}=(-1)^{3+3}.\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}=1.(2.1-3.0)=2$$

$$cof(G)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -6 & 4 & 0\\ 11 & -10 & 2\end{bmatrix}$$

$$[cof(G)]^t=\begin{bmatrix}2 & -6 & 11\\ 0 & 4 & -10\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$G^{-1}=\frac{1}{\det G}.[cof(G)]^t$$

$$G^{-1}=\frac{1}{4}.\begin{bmatrix}2 & -6 & 11\\ 0 & 4 & -10\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$G^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{11}{4}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Exercício 7:

$$A=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix};\det A\neq 0$$

$$A.A^{-1}=I_2$$

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{matrix}$$

$$\begin{cases}a_{11}.x+a_{21}.y=1\\ a_{12}.x+a_{22}.y=0\rightarrow a_{12}=-a_{22}.\dfrac{y}{x}\\ a_{11}.z+a_{21}.t=0\rightarrow a_{11}=-a_{21}.\dfrac{t}{z}\\ a_{12}.z+a_{22}.t=1\end{cases}$$

$$\rightarrow a_{11}.x+a_{21}.y=1$$

$$-a_{21}.\frac{t.x}{z}+a_{21}.y=1$$

$$a_{21}.\left(\frac{-t.x}{z}+y\right)=1$$

$$a_{21}=\frac{+z}{-t.x+y.z}$$

$$a_{11}=\frac{-t}{z}.\left(\frac{z}{-t.x+y.z}\right)=\frac{t}{t.x-y.z}$$

$$a_{12}.z+a_{22}.t=1$$

$$z.-a_{22}.\frac{y}{x}+a_{22}.t=1$$

$$+a_{22}\left(\frac{-z.y}{x}+t\right)=1$$

$$a_{22}=\frac{x}{t.x-z.y}$$

$$a_{12}.=-\frac{y}{x}.\left(\frac{x}{t.x-z.y}\right)=\frac{y}{z.y-t.x}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{t}{-z.y+t.x} & \dfrac{y}{z.y-t.x}\\ \dfrac{z}{y.z-t.x} & \dfrac{x}{t.x-z.y}\end{bmatrix}} \quad a$$

$$\det A=\begin{vmatrix}x & y\\ z & t\end{vmatrix}=x.t-y.z$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}.\begin{bmatrix}t & -y\\ -z & x\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{x.t-y.z}.\begin{bmatrix}t & -y\\ -z & x\end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{t}{x.t-y.z} & \dfrac{y}{y.z-x.t}\\ \dfrac{z}{y.z-x.t} & \dfrac{x}{x.t-y.z}\end{bmatrix}} \quad b$$

Conclusão : $\boxed{a=b}$

Exercício 8:

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 15 & 6 \end{bmatrix}$

$$\det A\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 15 & 6 \end{vmatrix}=2.6-7.15=12-105=-93$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-93}.\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -15 & 2 \end{bmatrix}=-\frac{1}{93}.\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -15 & 2 \end{bmatrix}$$

b) $B=\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

$$\det B=\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}=-2.5-8.7=-10-56=-66$$

$$B^{-1}=\frac{1}{-66}.\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}=-\frac{1}{66}.\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$$

c) $C=\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & -10 \end{bmatrix}$

$$\det C=\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & -10 \end{vmatrix}=-6.10-2.8=-60+16=-44$$

$$C^{-1}=\frac{1}{-44}.\begin{bmatrix} -10 & 2 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}=-\frac{1}{44}.\begin{bmatrix} -10 & 2 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$

Exercício 9:

$$C=40+0{,}2.(y-t)$$
$$I=15-20.r$$
$$Md=4+0{,}1.y-10.r$$
$$Ms=10$$
$$G=T=10$$

$$\begin{cases} a)\, y=C+I+G \\ b)\, Md=Ms \end{cases}$$

a)

$$y=40+0{,}2.(y-t)+I+10$$
$$y=40+0{,}2.y-0{,}2.t+I+10$$
$$y=40+0{,}2.y-0{,}2.t+15-20.r+10$$
$$y-0{,}2.y+20.r=40+15+10-0{,}2.10$$
$$0{,}8.y+20.r=63$$

b) $Md = Ms$

$$4 + 0{,}1.y - 10.r = 10$$

$$0{,}1.y - 10.r = 10 - 4 = 6$$

$$\begin{cases} 0{,}8.y + 20.r = 63 \\ 0{,}1.y - 10.r = 6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 20 \\ 0{,}1 & -10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$y = 60 + 100.r$$

$$0{,}8.y + 20.r = 63$$

$$0{,}8.(60 + 100.r) + 20.r = 63$$

$$48 + 80.r + 20.r = 63$$

$$100.v = 63 - 48 = 15 \rightarrow r = 0{,}15 = 15\%$$

$$y = 60 + 100.r = 60 + 100.0{,}15 = 75$$

$$\boxed{r = 0{,}15 = 15\%; y = 75}$$

Exercício 10:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 70 \\ 140 \end{bmatrix}$$

$$x = A.x + B$$

$$x - A.x = B$$

$$x.(I - A) = B$$

$$x = (I - A)^{-1}.B$$

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}9 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{\det(I - A)} . \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(I - A) = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -0{,}4 & 0{,}9 \end{vmatrix} = 1.0{,}9 - 0{,}4.0{,}5 = 0{,}7$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}7} . \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2857 & 0{,}7142 \\ 0{,}5714 & 1{,}4285 \end{bmatrix}$$

$$x = (I - A)^{-1}.B$$

$$\begin{bmatrix} 70 \\ 140 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}2857 & 0{,}7142 \\ 0{,}5714 & 1{,}4285 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 190 \\ 240 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 70.1{,}2857 + 140.0{,}7142 = 190$$

$$a_{21} = 70.0{,}5714 + 140.1{,}4285 = 240$$

Exercício 11:

$$x = (I - A)^{-1}.B$$

$$\begin{bmatrix} 35 \\ 210 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}2857 & 0{,}7142 \\ 0{,}5714 & 1{,}4285 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 195 \\ 320 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 35.1{,}2857 + 210.0{,}7142 = 195$$

$$a_{21} = 35.0{,}5714 + 210.1{,}4285 = 320$$

Exercício 12:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$x = A.x + B$$

$$x - A.x = B$$

$$x.(I - A) = B \rightarrow x = (I - A)^{-1}.B$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 0 \end{bmatrix} = \left| \begin{matrix} 1 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}5 & 0{,}9 & 0 \\ -0{,}3 & -0{,}8 & 1 \end{matrix} \right|$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{\det(I - A)}.[\operatorname{cof}(I - A)]^t$$

$$\operatorname{cof}(I - A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$C_{11}=(-1)^{1+1}.\begin{bmatrix}0{,}9 & 0\\ -0{,}8 & 1\end{bmatrix}=1.(0{,}9.1+0.0{,}8)=0{,}9$$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}.\begin{bmatrix}-0{,}2 & -0{,}1\\ -0{,}8 & 1\end{bmatrix}=-1.-0{,}2.1-0{,}1.0{,}8)=0{,}28$$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}.\begin{bmatrix}-0{,}2 & -0{,}1\\ 0{,}9 & 0\end{bmatrix}=1.(-0{,}2.0+0{,}1.0{,}9)=0{,}09$$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}.\begin{bmatrix}-0{,}5 & 0\\ -0{,}3 & 1\end{bmatrix}=-1(-0{,}5.1+0.0{,}3)=0{,}5$$

$$C_{22}=(-1)^{2+2}.\begin{bmatrix}1 & -0{,}1\\ -0{,}3 & 0\end{bmatrix}=1.(1.1-0{,}3.0{,}1)=0{,}97$$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}.\begin{bmatrix}1 & -0{,}1\\ -0{,}5 & 0\end{bmatrix}=-1(1.0-0{,}1.0{,}5)=0{,}05$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}.\begin{bmatrix}-0{,}5 & 0{,}9\\ -0{,}3 & 0{,}8\end{bmatrix}=1.(0{,}5.0{,}8+0{,}3.0{,}9)=0{,}67$$

$$C_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{bmatrix}1 & -0{,}2\\ -0{,}3 & -0{,}8\end{bmatrix}=-1(-1.0{,}8-0{,}2.0{,}3)=0{,}86$$

$$C_{33}=(-1)^{3+3}.\begin{bmatrix}1 & -0{,}2\\ -0{,}5 & 0{,}9\end{bmatrix}=1.(1.0{,}9-0{,}2.0{,}5)=0{,}80$$

$$\mathrm{cof}\,(I-A)=\begin{bmatrix}0{,}90 & 0{,}50 & 0{,}67\\ 0{,}28 & 0{,}97 & 0{,}86\\ 0{,}09 & 0{,}05 & 0{,}80\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{cof}\,(I-A)^t=\begin{bmatrix}0{,}90 & 0{,}28 & 0{,}09\\ 0{,}50 & 0{,}97 & 0{,}05\\ 0{,}67 & 0{,}86 & 0{,}80\end{bmatrix}$$

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{\det(I-A)}.\begin{bmatrix}0{,}90 & 0{,}28 & 0{,}09\\ 0{,}50 & 0{,}97 & 0{,}05\\ 0{,}67 & 0{,}86 & 0{,}80\end{bmatrix}$$

$$\det(I-A)=\begin{vmatrix}1 & -0{,}2 & -0{,}1\\ -0{,}5 & 0{,}9 & 0\\ -0{,}3 & -0{,}8 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & -0{,}2\\ -0{,}5 & 0{,}9\\ -0{,}3 & -0{,}8\end{matrix}=$$

$$=1.0{,}9.1+0{,}2.0.0{,}3-0{,}1.0{,}5.0{,}8-0{,}1.0{,}9.0{,}3-$$
$$-1.0.0{,}8-0{,}2.0{,}5.1=0{,}9-0{,}04-0{,}027-$$
$$-0-0{,}10=0{,}733$$

$$(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}1{,}2278 & 0{,}3820 & 0{,}1227\\ 0{,}6821 & 1{,}3233 & 0{,}0682\\ 0{,}9140 & 1{,}1732 & 1{,}0914\end{bmatrix}$$

$$x=(I-A)^{-1}.B$$

$$\begin{bmatrix}100\\200\\300\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1{,}2278 & 0{,}3820 & 0{,}1227\\ 0{,}6821 & 1{,}3233 & 0{,}0682\\ 0{,}9140 & 1{,}1732 & 1{,}0914\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}211{,}45\\339{,}69\\435{,}18\end{bmatrix}$$

$$a_{11}=100.1{,}2278+200.0{,}3820+100.0.1227=211{,}45$$
$$a_{21}=100.0{,}6821+200.1{,}3233+100.0.0682=339{,}69$$
$$a_{31}=100.0{,}9140+200.1{,}1732+100.1{,}0914=435{,}18$$

Exercício 13:

$$x=(I-A)^{-1}.B$$

$$\begin{bmatrix}200\\300\\500\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1{,}2278 & 0{,}3820 & 0{,}1227\\ 0{,}6821 & 1{,}3233 & 0{,}0682\\ 0{,}9140 & 1{,}1732 & 1{,}0914\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}421{,}51\\567{,}51\\1080{,}46\end{bmatrix}$$

$$a_{11}=200.1{,}2278+300.0{,}3820+500.0{,}1227=421{,}51$$
$$a_{21}=200.0{,}6821+300.1{,}3233+500.0{,}0682=567{,}51$$
$$a_{31}=200.0{,}9140+300.1{,}1732+500.1{,}0914=1080{,}46$$

Exercício 14:

a) $A=\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}7\\0{,}2 & 0{,}4\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}100\\200\end{bmatrix}$

$$x=A.x=B$$

$$x-A.x=B\rightarrow x.(I-A)=B$$

$$x=(I-A)^{-1}.B$$

$$I-A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}7\\ 0{,}2 & 0{,}4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}7 & -0{,}7\\ -0{,}2 & 0{,}6\end{bmatrix}$$

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{\det(I-A)}.\begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}7\\ 0{,}2 & 0{,}7\end{bmatrix}$$

$$\det(I-A)=\begin{vmatrix}0{,}7 & -0{,}7\\ -0{,}2 & 0{,}6\end{vmatrix}=0{,}7.0{,}6-0{,}7.0{,}2=0{,}28$$

$$(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}2{,}1428 & 2{,}50\\ 0{,}7143 & 2{,}50\end{bmatrix}$$

$$x=(I-A)^{-1}.B$$

$$\begin{bmatrix}100\\ 200\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2{,}1428 & 2{,}50\\ 0{,}7143 & 2{,}50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}714\\ 571\end{bmatrix}$$

$$a_{11}=100.2{,}1428+200.2{,}5=714{,}28\cong 714$$

$$a_{21}=100.0{,}7143+200.2{,}5=571{,}43\cong 571$$

Produto Agrícola

- Consumo Intermediário no Setor Agr. → 0,3.714 = 214,2
- Consumo Intermediário no Setor Man. → 0,7.571 = 399,8
- Consumo Final ⟶ $\dfrac{100}{714}$

Produto Manufaturado

- Consumo Intermediário no Setor Agr. → 0,2.714 = 142,8
- Consumo Intermediário no Setor Man. → 0,4.571 = 228,2
- Consumo Final ⟶ $\dfrac{200}{571}$

b) $B=\begin{bmatrix}100\\ 180\end{bmatrix}$

$$x=(I-A)^{-1}.B$$

$$\begin{bmatrix}100\\180\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2{,}1428 & 2{,}50\\0{,}7143 & 2{,}50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}664\\521\end{bmatrix}$$

$$a_{11}=100.2{,}1428+180.2{,}50=664{,}28\cong 664$$

$$a_{21}=100.0{,}7143+180.2{,}50=521{,}43\cong 521$$

Produto Agrícola

- Consumo Intermediário no Setor Agr. → 0,3.664 = 199,20
- Consumo Intermediário no Setor Man. → 0,7.521 = 364,80
- Consumo Final → $\frac{100{,}0}{664{,}0}$

Produto Manufaturado

- Consumo Intermediário no Setor Agr. → 0,2.664 = 132,80
- Consumo Intermediário no Setor Man. → 0,4.521 = 208,20
- Consumo Final → $\frac{180{,}0}{521}$

Conclusão:

No caso a são produzidas 714 unidades do produto agrícola.
Gastam-se → $\underbrace{\text{664 unidades . 1000 horas- homem}}_{714.000\,\text{horas}-\text{homem}}$

No caso b são produzidas 664 unidades do produto agrícola.
Gastam-se → $\underbrace{\text{664 unidades .1000 horas - homem}}_{664.000\,\text{horas}-\text{homem}}$

O desemprego será:

$$\begin{array}{r} -\ 714.000 \\ 664.000 \\ \hline 50.000 \text{ horas} - \text{homem}\,. \end{array}$$