Exercícios – Matrizes

1. Escreva na forma de tabela as matrizes:

   a) $A=(a_{ij})_{2x3}$, $a_{ij}=i^2-j$;

   b) $B=(b_{ij})_{2x2}$, $b_{ij}=4$, se $i \geq j$ e $b_{ij}=2.j-i$, se $i<j$;

   c) $C=(c_{ij})_{1x5}$, $c_{ij}=i+j$, se $i=j$; $c_{ij}=i^2+j^2$, se $i>j$ e $c_{ij}=(i+j)^2$, se $i<j$;

   d) $D=(d_{ij})_{5x2}$, $d_{ij}=2.i+3.j$, se $i=j$; $d_{ij}=2i-3j$, se $i>j$ e $d_{ij}=i-j^3$, se $i<j$.

2. Dada a matriz $A=(a_{ij})_{3x4}$, $a_{ij}= \sqrt{i} +2$, obtenha o elemento a'_{14} da matriz A', transposta de A.

3. Obtenha x, y e z na igualdade entre as matrizes:

   a) $\begin{bmatrix} x-1 & 3z \\ x+y & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & x \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$;

   b) $\begin{bmatrix} x & z \\ x+y & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3x \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$;

4. Dadas as matrizes:

   $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} e\, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, obtenha:

   a) A+B-C';

   b) –A+B/2;

   c) 2A-3B-(-C);

   d) (A-4)+C;

   e) (A-C)'.

5. Dadas as matrizes A e B do exercício 4, obtenha:

   a) a matriz X tal que: 4X-A+B=0, em que 0 é a matriz nula;

   b) o produto da matriz A pela matriz B;

   c) acrescente à matriz A uma linha (3ª): [1 -1] e obtenha, novamente, A.B e, posteriormente, B.A.

6. Dadas as matrizes:

   $A=(a_{ij})_{4x2}$, $a_{ij}=i+j$ e $B=(b_{ij})_{2x3}$, $b_{ij}=5$, obtenha o elemento c_{32} da matriz C=A.B.

7. Se a matriz ${}_3A_r$, ${}_5B_s$ e $(A.B)_{3x7}$, então, r e s valem:

8. Dadas as matrizes:

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} e\, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Obter:

a) a matriz X tal que A.X=B;

b) a matriz Z tal que A.B + Z=C.

9. A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usados num restaurante. Já a matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usados na composição dos pratos P1, P2 e P3 desse restaurante. Dessa forma:

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_a \\ c_c \\ c_s \end{bmatrix} \; e \; \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, em\,que: linhas: pratos (1, 2\, e\, 3)\; e\, colunas: a, c\; e\; salada.$ Pede-se:

Qual a matriz que fornecerá o custo de produção, em reais, dos pratos (1, 2 e 3)?

10. Sejam A, B e C matrizes quadradas de mesma ordem. Verifique quais das afirmações a seguir são verdadeiras:

I) AB=BA;

II) A(B+C)=AB+AC;

III) A(B+C)= (B+C)A;

IV) ABC=BAC;

V) A(BC)=(AB)C;

VI) Se $A^2=0$ (matriz nula), então, A=0.

11. Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & a \\ b & 4 \end{bmatrix}$. Obter *a* e *b* tal que $\mathbf{A^2} = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}$.

12. Dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, obtenha:

a) A^2; b) A^3; c) A^{14} e d) A^{15}.

13. Dizemos que duas matrizes A e B comutam se AB=BA. Calcule os valores de x e y para que as matrizes

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} e\, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$ comutem.

14. Considere a matriz $C=c_{ij}$ de ordem 3, com $c_{ij}= i/j$, se $i\neq j$ e i^j+2j, se $i=j$. Então, determine a soma dos elementos da diagonal secundária da matriz C.

15. Uma matriz quadrada A diz-se simétrica se A=A′. Assim, se a matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2y \\ x & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica, então, qual o valor de x-(y+z)?

16. Considere três lojas L_1, L_2 e L_3 e três tipos de produtos p_1, p_2 e p_3. A matriz A descreve a quantidade de cada produto vendido em cada loja numa semana.

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 30 & 19 & 20 \\ 15 & 10 & 8 \\ 12 & 16 & 11 \end{bmatrix}$. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto p_i vendido pela loja L_j (i,j=1, 2, 3). Dessa forma, pede-se:

a) Quantas unidades de p_3 a loja L_2 vendeu nessa semana?
b) Qual o total vendido de p_1 nas três lojas?
c) Seja B=[2 1 4] uma matriz tal que o elemento b_{1k} representa o preço, em reais, do produto p_k (k=1, 2, 3). Calcule B.A.
d) Observando a resposta do item c), determine o total arrecadado em cada loja, em reais, com as vendas dos três produtos.

17. Sendo A uma matriz quadrada de ordem 2, obtenha A sabendo-se que A.A′=0.

18. Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 e A′ sua transposta, determine A tal que A=2.A′.

19. A matriz quadrada A diz-se ortogonal se A.A′=A′.A=I (identidade). Verifique se $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \cos x & senx \\ 0 & -senx & \cos x \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal.

20. Se a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ x^2 & 0 & 1-y \\ x & y-3 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, então, calcule o valor de x+y.

21. Dada a matriz P=$\begin{bmatrix} x & 5 \\ y & 1 \end{bmatrix}$, com x e y reais, pedem-se:

   a) os valores da x e y para que se tenha $P^2=I_{(2)}$;
   b) a matriz P^{17}, nas condições do item (a).

Matriz Inversa (clássica)

Uma Matriz Quadrada **A** de ordem *n*, diz-se invertível (inversível), ou não singular, se e somente se, existir uma matriz que indicamos por $\mathbf{A^{-1}}$, tal que:

$$\mathbf{A.A^{-1}=A^{-1}.A=I}$$

Equação Matricial do Tipo X.A=B

Sendo X, A e B matrizes quadradas do mesmo tipo, prova-se que, se A admite inversa, então:

$$X.A=B \Leftrightarrow X=B.A^{-1}$$

Prova: $X.A=B \Leftrightarrow (X.A).A^{-1}=B.A^{-1} \Leftrightarrow X.I=B.A^{-1} \Leftrightarrow X=B.A^{-1}$.

Propriedades da Matriz Inversa Clássica

Sendo A e B matrizes quadradas do mesmo tipo e inversíveis, temos que:

a) $(A^{-1})^{-1}=A$;
b) $(A^{-1})'=(A')^{-1}$;
c) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;
d) A inversa clássica de uma matriz, se existir, é única.

22. Se A e B são matrizes quadradas inversíveis e de mesma ordem n, prove que:

   a) as propriedades (a), (b) e (c);
   b) $(ABA^{-1})^2=AB^2A^{-1}$;
   c) $(ABA^{-1})^{-1}=AB^{-1}A^{-1}$.

23. Supondo que A e B são inversíveis e I a matriz identidade, o valor de X na equação matricial AX+B=A é dada por: