Exercícios - Distribuição Normal (Gauss)

01. Uma empresa produz televisores de dois tipos, tipo *A* (comum) e tipo *B* (luxo), e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar defeito grave no prazo de seis meses. O tempo para ocorrência de algum defeito grave nos televisores tem distribuição normal sendo que, no tipo *A,* com média de 10 meses e desvio padrão de 2 meses e no tipo *B*, com média de 11 meses e desvio padrão de 3 meses. Os televisores de tipo *A* e *B* são produzidos com lucro de 1200 u.m. e 2100 u.m. respectivamente e, caso haja restituição, com prejuízo de 2500 u.m. e 7000 u.m., respectivamente.

(a) Calcule as probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo *A* e do tipo *B*.

(b) Calcule o lucro médio para os televisores do tipo *A* e para os televisores do tipo *B*.

(c) Baseando-se nos lucros médios, a empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo *A* ou do tipo *B*?

<u>Resolução</u>

Seja,

X_A: Tempo de ocorrência de algum defeito grave nos televisores do tipo A

X_B: Tempo de ocorrência de algum defeito grave nos televisores do tipo B

$X_A \sim N(10; 2^2)$	**$Lucro_A$: 1200 u.m.**	**$Prejuízo_A$: 2500 u.m.**
$X_B \sim N(11; 3^2)$	**$Lucro_B$: 2100 u.m.**	**$Prejuízo_B$: 7000 u.m.**

(a) Calcule as probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo *A* e do tipo *B*.

P(restituição de A) = $P(X_A < 6) = P(Z < (6-10)/2) = P(Z<-2,0) = 1 - A(2) = 1-0,9772 = 0,0228$

P(restituição de B) = $P(X_B < 6) = P(Z < (6-11)/3) = P(Z<-1,67) = 1- A(1,67) = 1-0,9525 = 0,0475$

A probabilidade de haver restituição nos televisores do tipo A e do tipo B, respectivamente, são 2,28% e 4,75%.

(b) Calcule o lucro médio para os televisores do tipo *A* e para os televisores do tipo *B*.

P(não restituição de A) = 1 – P(restituição de A) = 1 – 0,0228 = 0,9772

P(não restituição de B) = 1 - P(restituição de B) = 1 - 0,0475 = 0,9525

Lucro médio de A = 1200 x 0,9772 – 2500 x 0,0228 = 1115,64 u.m.

Lucro médio de B = 2100 x 0,9525 – 7000 x 0,0475 = 1667,75 u.m.

(c) Baseando-se nos lucros médios, a empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo *A* ou do tipo *B*?

A empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo B, pois o lucro B é maior que o lucro médio de A.

02. A concentração de um poluente em água liberada por uma fábrica tem distribuição N(8; 1,5). Qual a chance, de que num dado dia, a concentração do poluente exceda o limite regulatório de 10 ppm?

Resolução

A solução do problema resume-se em determinar a proporção da distribuição que está acima de 10 ppm, isto é, $P(X > 10)$**. Usando a estatística z temos:**

$$P(X > 10) = P(Z > \frac{10-8}{1.5}) = P(Z > 1.33) = 1 - P(Z \leq 1.33) = 0.09$$

Portanto, espera-se que a água liberada pela fábrica exceda os limites regulatórios cerca de 9% do tempo.

03. O diâmetro do eixo principal de um disco rígido segue a distribuição Normal com média 25,08 pol. e desvio padrão 0,05 pol. Se as especificações para esse eixo são 25,00 ± 0,15 pol., determine o percentual de unidades produzidas em conformidades com as especificações.

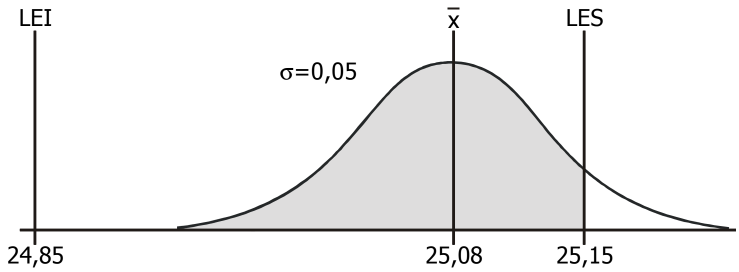
Resolução

$$P\{24{,}85 \leq x \leq 25{,}15\} = P\{x \leq 25{,}15\} - P\{x \leq 24{,}85\}$$

$$= P\left\{Z \leq \frac{25{,}15 - 25{,}08}{0{,}05}\right\} - P\left\{Z \leq \frac{24{,}85 - 25{,}08}{0{,}05}\right\}$$

$$= P\{Z \leq 1{,}40\} - P\{Z \leq -4{,}60\} = 0{,}9192 - 0{,}0000 = 0{,}9192$$

ou seja, 91,92% dentro das especificações(área cinza) e 8,08% fora dacs especificações.



04. Suponha que as medidas da corrente elétrica em pedaço de fio sigam a distribuição Normal, com uma média de 10 miliamperes e uma variância de 4 miliamperes.

(a) Qual a probabilidade de a medida exceder 13 miliamperes?
(b) Qual a probabilidade de a medida da corrente estar entre 9 e 11 miliamperes?
(c) Determine o valor para o qual a probabilidade de uma medida da corrente estar abaixo desse valor seja 0,98.

Seja X a representação da corrente em miliámperes. A probabilidade requerida pode ser representada por $P(X > 13)$). Faça $Z = \frac{(X-10)}{2}$. Nota-se através da tabela que $X > 13$ corresponde a $Z > 1,5$. Assim, da tabela:

$$P(X > 13) = P(Z > 1{,}5) =$$
$$= 1 - P(Z \leq 1{,}5) =$$
$$= 1 - 0{,}93319 =$$
$$= 0{,}06681$$

(b) Qual a probabilidade de a medida da corrente estar entre 9 e 11 miliampères?

Algebricamente,

$$P(9 < X < 11) = P\left(\frac{(9-10)}{2} < \frac{(X-10)}{2} < \frac{(11-10)}{2}\right)$$

$$P(-0{,}5 < Z < 0{,}5) =$$

$$P(Z < 0{,}5) - P(Z < -0{,}5) =$$
$$= 0{,}69146 - 0{,}30854 =$$
$$= 0{,}38292$$

(c) Determine o valor para o qual a probabilidade de uma medida da corrente estar abaixo desse valor seja 0,98.

O valor de X é tal que $P(X < x) = 0{,}98$. Pela padronização, essa expressão de probabilidade pode ser escrita como:

$$P(X < x) = P\left(\frac{(X-10)}{2} < \frac{(x-10)}{2}\right)$$
$$= P\left(Z < \frac{(x-10)}{2}\right)$$
$$= 0{,}98$$

A tabela é usada para encontrar o valor de z, tal que $P(Z < z) = 0{,}98$ .. A probabilidade mais próxima da Tabela resulta em
$$P(Z < 2{,}05) = 0{,}9798$$

Consequentemente, $\frac{(x-10)}{2} = 2{,}05$ e a transformação padronizada é usada ao contrário para determinar x. O resultado é

$$X = 2 * (2{,}05) + 10 = 14{,}1 \; miliàmperes$$

05. O diâmetro de um eixo de um drive óptico de armazenagem é normalmente distribuído, com média 0,2505 polegadas e desvio-padrão de 0,0005 polegadas. As especificações do eixo são 0,2500±0,00015 polegadas.
Que proporção de eixos obedece às especificações?
Seja X a representação do diâmetro, em polegadas, do eixo. A probabilidade requerida é

$$P(0,2485 < X < 0,2515) =$$
$$P\left(\frac{(0,2485 - 0,2508)}{0,0005} \leq Z \leq \frac{(0,2515 - 0,2508)}{0,0005}\right)$$

$$P(-4,6 < Z < 1,4) =$$
$$P(Z < 1,4) - P(Z < -4,6) =$$

$$= 0,91924 - 0,0000 =$$
$$= 0,91924$$

<u>Discussão:</u>

A maioria dos eixos não conformes é muito grande, por causa da média do processo estar localizada muito perto do limite superior de especificação. Se o processo estivesse centralizado de modo que a média do processo fosse igual ao valor de 0,2500, então,

$$P(0,2485 < X < 0,2515) =$$

$$P\left(\frac{(0,2485 - 0,2500)}{0,0005} \leq Z \leq \frac{(0,2515 - 0,2500)}{0,0005}\right)$$

$$P(-3 < Z < 3) =$$
$$P(Z < 3) - P(Z < -3) =$$

$$= 0,99865 - 0,00135 =$$
$$= 0,9973$$

Através da recentralização do processo, o resultado é aumentado para aproximadamente 99,73%.

06. A média dos diâmetros internos de uma amostra de 200 arruelas produzidas por uma certa máquina é 0,502 cm e o desvio-padrão é 0,0005. A finalidade para qual essas arruelas são fabricadas permite a tolerância máxima, para o diâmetro, de 0,496 a 0,508 cm. Se isso não se verificar, as arruelas serão consideradas defeituosas. Determinar a percentagem de arruelas defeituosas produzidas pela máquina, admitindo-se que os diâmetros são distribuídos normalmente.

0,496 em unidades reduzidas= (0,496-0,502)/0,0005=-1,2
0,508 em unidades reduzidas= (0,508-0,502)/0,0005= 1,2

Proporção de arruelas não defeituosas= (área limitada pela curva normal entre z=-1,2 e z= 1,2) = (2 vezes a área entre z=0 e z=1,2) = 2*(0,3849)= 0,7698 ou 77%.

Assim, a porcentagem de arruelas defeituosas = 100% - 77% = 23%

07. Uma fábrica de carros sabe que os motores de sua fabricação têm duração normal com média 150000 km e desvio-padrão de 5000 km. Qual a probabilidade de que um carro, escolhido ao acaso, dos fabricados por essa firma, tenha um motor que dure:
(a) Menos de 170000 km?
(b) Entre 140000 km e 165000 km?
(c) Se a fábrica substitui o motor que apresenta duração inferior à garantia, qual deve ser esta garantia para que a porcentagem de motores substituídos seja inferior a 0,2%?

(a) Menos de 170000 km?

$P(X < 170000) = P(Z \leq 4) = 0,5 + P(0 \leq Z \leq 4) =$
$= 0,5 + 0,499968 =$
$= 0,999968$
Onde,
$$Z = \frac{170000 - 150000}{5000} = 4$$

(b) Entre 140000 km e 165000 km?

$P(140000 < X < 165000) = P(-2 \leq Z \leq 3) =$
$= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(-2 \leq Z \leq 3) =$
$= 0,477250 + 0,498650 =$
$0,97590$
Onde,
$$Z = \frac{140000 - 150000}{5000} = -2$$
$$Z = \frac{165000 - 150000}{5000} = 3$$

(c) Se a fábrica substitui o motor que apresenta duração inferior à garantia, qual deve ser esta garantia para que a porcentagem de motores substituídos seja inferior a 0,2%?

$P(X \leq X_\alpha) = 0,002$

Procurando no corpo da tabela $0,498\ (0,5 - 0,002)$**, encontramos:**
$Z = -2,87$
Portanto,
$$-2,87 = \frac{X_\alpha - 150000}{5000}$$
$X_\alpha = 135650$
A garantia deve ser de 135650 km.