

**3ª. FASE DO CONCURSO VESTIBULAR DO BACHARELADO EM
ESTATÍSTICA**

1ª. PROVA DA DISCIPLINA: CE065 ELEMENTOS BÁSICOS PARA ESTATÍSTICA

CANDIDATO: _____

1ª. Questão (valor 2,0): Resolva de forma clara e detalhada as questões seguintes.

a) (Valor 0,5)

Faça a **Representação Gráfica** do produto cartesiano entre o intervalo $A = [-3; \infty[$ e intervalo $E =]2; 5]$.

b) (Valor 0,5)

Dados os intervalos $A = [-3; 3]$ e $B = [-9, 9]$ faça a representação gráfica (no plano cartesiano) das relações:

$$R_1 = \{(x; y) \in A \times B \mid y = x^2\} \text{ e } R_2 = \{(x; y) \in A \times B \mid y = 3x\}.$$

c) (Valor 0,5)

Represente por extensão $D(R_1)$ e $\text{Im}(R_1)$ sendo $R_1 = \{(x; y) \in A \times B \mid y = x^2\}$.

d) (Valor 0,5)

Represente por extensão $D(R_2)$ e $\text{Im}(R_2)$ sendo $R_2 = \{(x; y) \in A \times B \mid y = 3x\}$.

2ª Questão (valor 2,0): Resolva de forma clara e detalhada as questões seguintes.

Seja a expressão $f(x) = y = \frac{1}{b-a}$, tal que $x \in [a; b] \subset \mathbb{R}$, com $b > a$.

a) $f(x)$ é uma função? Explique por quê.

b) Qual o conjunto domínio de $f(x)$?

c) Qual o conjunto contradomínio de $f(x)$?

d) Faça a representação no plano cartesiano da função $f(x)$, assumindo um valor genérico para b .

3ª Questão (valor 1,0):

a) Sejam as expressões $f(x) = y = \frac{1}{5}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$ e $g(x) = y = \frac{1}{b-a}$, tal que $x \in [a;$

$b] \subset \mathbb{R}$, com $b > a$. Qual o nome a específico dessas funções?

b) Defina função crescente e função decrescente.

4ª Questão (valor: 1,5): Resolva de forma clara e detalhada os itens seguintes.

Sendo as matrizes:

$A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, sendo $a_{ij} = i \times j$;

$B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, com $b_{ij} = (-1)^{i+j}$ e

$C = (c_{ij})$ de ordem 2, com 2^{i+j} se $i < j$ e $i^2 + 1$ se $i \geq j$.

a) (valor: 0,6) Escreva detalhadamente (na forma de tabela) as matrizes A, B e C.

a) (valor: 0,3 cada) Obtenha as matrizes resultantes de:

b1) $A + B$;

b2) $C - B$;

b3) $B + C$.

5ª Questão (valor 0,75): Resolva de forma clara e detalhada a questão seguinte.

Num levantamento constatou-se que: 80% dos entrevistados são casados; 44% são homens casados; 12% são mulheres casadas sem filhos; 30% são mulheres casadas com filhos. Verifique se essas porcentagens são compatíveis. (Justifique).

6ª Questão (valor 2,75). Resolva de forma clara e detalhada os itens seguintes.

a) (valor: 0,3 cada) Identifique os conjuntos (A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 e A_5) dados a seguir. Quando possível, enumere seus elementos.

a1) $A_1 = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x > 4\}$;

a2) $A_2 = \{x \in \mathbf{N}^* \mid 3 < x < 7\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x < 7\}$;

a3) $A_3 = \{x \in \mathbf{Q} \mid 0 < x < 1\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x \leq 1\}$;

a4) $A_4 = \{x \in \mathbf{I} \mid 0 < x < 1\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x \leq 1\}$.

a5) $A_5 = A_1 - A_2$.

b) Sejam os conjuntos:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10\}; B = \{3; 5; 6; 8; 10\} \text{ e } C = \{-2; -1; 0; 1; 6\}.$$

Pede-se:

b1) (valor: 0,5) Construa um Diagrama de Venn que contemple os três conjuntos;

b2) (valor: 0,25) Obter o complementar de A em relação a B;

b3) (valor:0,5) Obter $(A-B) - [(C-A) \cup (B-C)]$.

**3ª. FASE DO CONCURSO VESTIBULAR DO BACHARELADO EM
ESTATÍSTICA**

2ª. PROVA DA DISCIPLINA: CE065 ELEMENTOS BÁSICOS PARA ESTATÍSTICA

INSTRUÇÕES: Responda no espaço próprio da questão e use o verso da página como rascunho.

1ª Questão (valor 25): Resolva de forma clara e detalhada as questões seguintes.

c) (Valor 5): Escreva uma função de cada tipo abaixo especificado:

1º) (valor 2)

Função Par:

2º) (valor 2)

Função Impar:

3º) (valor 1)

Função Sem Paridade:

d) (Valor 5): Complete os textos tornando-os verdadeiro.

b1) (valor 2): “Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de **função** quando todo elemento do **contradomínio B** for imagem de pelo menos um elemento do **domínio A** da função. Desta forma o **conjunto imagem** de **f** é **igual ao seu contradomínio**”.

b2) (valor 2): “Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de **função** quando para **dois elementos distintos quaisquer** do domínio, corresponderem **duas imagens distintas** no contradomínio”.

b3) (valor 1): “Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de **função bijetora** quando for e simultaneamente.

c) (Valor 5): Determine a função inversa de cada uma das funções abaixo:

c1) (valor 2): $f(x) = y = \text{tg}(x)$ e, também, calcule o valor de f^{-1} para $x = 1$.

c2) (valor 2): $f(x) = y = \ln(2x)$

c3) (valor 1): $f(x) = y = \arcsen(x)$

d) (Valor 5)

Dada a função linear $f(x) = 2x - 5$, pede-se:

d1) **(valor 1):** O zero ou raiz da função.

d2) **(valor 1):** O coeficiente angular da reta que a função representa.

d3) **(valor 3):** Determine a equação da reta que passa pelo ponto $P(2; 2)$ e é paralela a reta representada pela função $f(x) = 2x - 5$.

e) (Valor 5)

e1) **(valor 2):** Faça o gráfico da função modular $y = f(x) = |x^2 - 5|$ $x \in \mathbb{R}$.

e2) (valor 2): Resolva a equação exponencial $3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$ $x \in \mathbb{R}$.

e3) (valor 1): Calcule o valor de $\log(\sqrt[3]{20})$, sabendo que $\log(2) = 0,3010$.

2^A. Questão (valor 25): Calcule os seguintes limites:

a) (Valor 10): $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 9x - 10}{x - 2} \right)$

b) (Valor 10): $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}(kx)}{x} \right)$

c) (Valor 5): $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}}$

3ª Questão (valor 25):

a) (valor 10): Sendo \mathbf{A} uma matriz quadrada de ordem 2, obtenha \mathbf{A} sabendo que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' = \mathbf{0}$.

b) (valor 15): Seja o sistema inconsistente $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$. Pode-se torná-lo consistente por meio de algumas operações que resultam no sistema consistente de equações normais dado por $\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$. Uma solução para esse sistema é: $\boldsymbol{\theta}_0 = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$. Sendo

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Pede-se:}$$

b1) (valor 6): Descreva o sistema de equações normais, $\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$, tanto na forma algébrica quanto na forma matricial.

b2) (valor 9): Obter $\theta_0 = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^G \mathbf{X}'\mathbf{y}$, $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\theta_0$ e $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$, dado que

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

4ª Questão (valor 25): Dada a equação matricial ($\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}$):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Pede-se:

- a) (valor 15): Resolva a equação (obtenha $\boldsymbol{\theta}$) com o auxílio da inversa clássica de \mathbf{A} (\mathbf{A}^{-1});

b) (valor 10): Resolva a equação obtendo o escalonamento de $A : b$.

**3ª. FASE DO CONCURSO VESTIBULAR DO BACHARELADO EM
ESTATÍSTICA**

3ª. PROVA DA DISCIPLINA: CE065 ELEMENTOS BÁSICOS PARA ESTATÍSTICA – 24/05/2007

INSTRUÇÕES: Responda no espaço próprio da questão e use o verso da página como rascunho.

1ª Questão (valor 25): Resolva de forma clara e detalhada as questões seguintes.

a) (Valor 10): Dada a função $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + x + 1}{x^3 + 5x - 7}$ calcule o limite da função quando x vai para o infinito (∞).

b) (valor 15): Uma **função distribuição de probabilidade** de uma variável aleatória X , $F(x)$, tem a seguinte propriedade: quando a variável (aleatória) X vai para $-\infty$ o valor da

função vai para zero e quando a variável (aleatória) vai para ∞ o valor da função vai para 1. Verifique se a função $F(x) = 1 - e^{-2x}$ $x > 0$ é uma função distribuição de probabilidade da variável X , observando que o “menos infinito, $-\infty$ ” da variável X é 0, que corresponde ao menor valor do contradomínio.

2ª Questão (valor 25): Resolva os itens seguintes:

a) (Valor 10): Dada $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x - 2\pi}$, calcule o limite da função quando x vai para 2π aplicando a Regra de L'Hospital. Sabe-se que se $y = \text{sen}(x)$, então $y' = \text{cos}(x)$.

b) (Valor 05): Seja a função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 7$, calcule a derivada de $f(x)$.

c) (Valor 10): Seja a função $f(x) = e^{x+2} - e^x$, calcule a derivada de $f(x)$, sabendo-se que se $y = e^u$, então $y' = e^u u'$.

3ª Questão (valor 25): Dado o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y + z = \sqrt{2} \\ 2x + y + 2z = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Pede-se:

a) Escreva o sistema na forma matricial. (Valor 3)

b) Classifique o sistema quanto a sua consistência. Justifique detalhadamente. (Valor 7)

c) Obtenha a solução do sistema por meio de uma inversa generalizada. (Valor 7)

d) Se incluíssemos uma equação linear nesse sistema do tipo $2x + y + 2z = 2$, qual seria uma possível solução? (Valor 8)

4ª Questão (valor 25): O gerente de marketing de uma cadeia de supermercados gostaria de determinar a relação entre o espaço disponível (em pés) em prateleiras e as vendas semanais (em centenas de dólares) de seus produtos. Uma amostra aleatória foi selecionada de 6 lojas da rede de supermercados, obtendo-se os resultados:

	LOJA					
	1	2	3	4	5	6
X: pés	5	5	10	10	15	15
Y: vendas	1,6	1,4	2,0	2,4	2,4	2,8

Pede-se:

a) Admitindo-se uma relação linear simples entre X e Y, utilize a abordagem matricial para obter os parâmetros da reta de regressão ($\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$). (Valor 10)

b) Interprete o resultado do valor de $\hat{\beta}$ para esse exemplo. (Valor 5)

c) Segundo a reta obtida, qual seria o valor esperado de vendas semanais para um espaço de 8 pés? Seria conveniente estimarmos a média de vendas para um espaço de 20 pés? Justifique. (Valor 10)

3ª Questão (valor 25): Digitadores são treinados em uma empresa segundo duas metodologias distintas (Método J e Método A). O objetivo desse experimento é avaliar qual o método é mais eficaz em relação ao tempo médio gasto numa determinada tarefa de digitação. Para tanto, foram escolhidos 9 funcionários, 5 utilizaram o Método J e 4 o Método A. Os tempos gastos, em minutos, podem ser vistos na tabela abaixo:

Método	Tempos (min)				
J	10	13	9	10	12
A	15	12	16	17	-

Esses dados podem ser avaliados por intermédio do Modelo Linear $Y = X\theta + \varepsilon$.

Sendo: Y o vetor de observações, X a matriz do delineamento, θ o vetor de parâmetros e ε o vetor de erros. Caracterizados da seguinte forma:

$$Y = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \\ 15 \\ 12 \\ 16 \\ 17 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \theta = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_J \\ \tau_A \end{bmatrix}. \text{Dados: } \sum Y^2 = 1508; \sum Y = 114; \bar{Y} = 12,67.$$

Pede-se:

e) Escreva o Sistema de Equações Normais $X'X\theta = X'Y$.

f) Apresente uma solução para $X'X\theta = X'Y$, por meio de: $\theta_0 = (X'X)^{-1} X'y$.

g) Determine $\hat{Y} = X\theta^0$ e $\hat{\epsilon} = Y - \hat{Y}$.

h) Calcule $\|\hat{Y}\|^2$, $\|\bar{Y}\|^2$, $\|\hat{\epsilon}\|^2$ e $\|Y\|^2$.

e) Mostre que \hat{Y} e $\hat{\epsilon}$ são ortogonais e obtenha a distância entre Y e \hat{Y} .

4ª Questão: Preencha o quadro da Análise de Variância (ANOVA) e interprete o resultado.

Causas de Variação	Graus de Liberdade (g.l)	Soma de Quadrados (S.Q.)	Quadrados Médios (Q.M.)	F _{calculado}
Médias (correção)	1			
Tratamentos (Métodos)				
(Parâmetros)	(r[X] =)			
Resíduo	n - r[X] =			
Total	n =			

Dado: $F_{(1; 7; \alpha=0,05)} = 5,591$