3ª. FASE DO CONCURSO VESTIBULAR DO BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

2ª. PROVA DA DISCIPLINA: CE065 ELEMENTOS BÁSICOS PARA ESTATÍSTICA – 16/05/2008

INSTRUÇOES: Responda no espaço próprio da questão e use o verso da página como rascunho.

1ª. Questão (valor 25): Resolva de forma clara e detalhada as questões seguintes.

a) (Valor 10): Dada a função f(x) = $\frac{\text{sen}(5x)}{5x}$ calcule o seu limite quando x tende para 0, ou seja:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(5x)}{5x}$$

Solução:

b) **(valor 10):** Sabendo que $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ = 1 e $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (limites fundamentais) calcule o limite da f(x) = $5^x(\frac{e^x-1}{x}) + x[(1+x)^{\frac{1}{x}}]$ quando x tende para 0, ou seja:

$$\lim_{x\to 0}[5^x(\frac{e^x-1}{x}) + x[(1+x)^{\frac{1}{x}}]$$

Solução:

c) **(valor 05):** Dada a função f(x) = $\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}$ calcule o limite de f(x) quando x vai para 1, ou seja, $.\lim_{x\to 1}(\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1})$.

Solução:

2ª. Questão (valor 25): Resolva de forma clara e detalhada as questões seguintes.

a) (valor 05): Faça o gráfico da função f(x) = $x^2 - 4x + 3$ para x variando de -1 a 4.

Solução:

b) (valor 05): Seja a função y = f(x) = sen(x) com x ∈ [0; π/2]. Determine a função inversa de f(x), sabendo o seguinte: sen(0) = 0 , sen(π/6) = $\frac{1}{2}$, sen(π/4) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e sen(π/3) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solução:

c) (valor 05): Uma variável aleatória X tem função densidade de probabilidade definida por f(x) = e^x x > 0. Faça o gráfico dessa função para x variando de aproximadamente 0 a 3.

Solução:

d) (valor 05): Dada as funções f(x) = 2x + 3 e g(x) = 2x – 5. Determine a função composta de f com g, ou seja, f ° g, ou seja, f ° g(x) = f[g(x)].

Solução:

e) **(valor 05):** Complete o texto de forma que ele se torne verdadeiro:
O módulo ou valor absoluto de um número real é a **distância** da imagem desse número na reta orientada R (reais) até a ....dessa reta R. A função y = f(x) = |x – 3| -5 é chamada de função ....

3ª Questão: Resolva de forma clara e detalhada as questões seguintes.

a) Calcule o determinante da matriz A, sendo A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

. Existe a inversa clássica de A? (Justifique).

b) Obtenha o conjunto solução da equação P(x) = 0, em que P(x) = δ(B), com

$$B = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 4 & 5 \\ x & x & x & 6 \\ x & x & x & x \end{bmatrix}.$$

4ª Questão: Seja o sistema de equações lineares ${}_mY_1 = {}_mX_n \cdot {}_n\theta_1$. Dessa forma, pede-se:

a) Estude o sistema quanto a sua consistência e números de vetores solução, se Y, X e θ forem dados por:

$$Y = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

b) Obter o vetor solução do sistema do item (a), θ^o, por meio de $\theta^o = X^{-1}Y$.

c) Agora, se Y, X e θ forem definidos da seguinte forma: $Y = \begin{bmatrix} k \\ 2k \\ 0 \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \theta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, qual seria o valor de k (uma constante) para que se tenha a = 5?

d) Com Y, X e θ caracterizados por: $Y = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ m \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Pede-se:

d1) Discuta, detalhadamente, os valores que m deve assumir para que o sistema ${}_3Y_1 = {}_3X_2 \cdot {}_2\theta_1$ seja: i) determinado; ii) indeterminado e iii) inconsistente.

d2) Para o caso (ii) do item (d1), obtenha o vetor solução $\theta^o = X^- Y$.

d3) Faça m = 0 e, posteriormente, mostre que o melhor vetor solução para o sistema é único.

OUTRA PROVA

3ª. Questão: Sejam as matrizes, de ordem 2, definidas das seguintes formas:

$$A = a_{ij} = \begin{cases} 2^{i+j}, & \text{se } i < j \\ i^2 + j, & \text{se } i \geq j \end{cases} \quad \text{e} \quad B = b_{pq} = \begin{cases} p+q, & \text{se } p = q \\ p-q, & \text{se } p \neq q \end{cases}.$$

Dessa forma, pede-se:

a) A matriz B é simétrica? E uma matriz qualquer C'C, será sempre simétrica? Justifique.

b) Obter as matrizes X e Y, tais que: $\begin{cases} X + Y = 2A \\ X - Y = 3B \end{cases}$.

c) Quais os valores de u e v na equação matricial AH = B. Sendo $H = \begin{bmatrix} u^2 - v & v^2 \\ u & v \end{bmatrix}$.

d) Encontre a matriz Z na equação matricial BZ = A.

4ª. Questão: Dada a matriz A = [X | Y] = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 10 \\ 3 & 2 & 1 & | & 20 \\ 2 & 1 & 6 & | & 29 \end{bmatrix}$. Pede-se:

a) Encontre a forma escalonada canônica da matriz A.

b) Quais os ranks (postos) de A e X? Justifique.

c) Sendo Y = Xθ uma equação matricial e θ' = [a b c]. Obtenha o vetor θ, se possível, que satisfaça a equação.

d) Esse sistema possui quantos valores de θ que satisfazem a equação? Justifique.

e) Troque o valor 6 da matriz X por α. Assim, qual seria o valor de α para que o rank de X fosse igual a 2? Qual a conseqüência imediata desse procedimento na obtenção de θ?

<u>OUTRA PROVA</u>

3ª Questão: Sejam os vetores $\vec{u} = (1;-3;0)$ $\vec{v} = (2;m-4;m)$ e $\vec{w} = (0;m;1)$, associados à base canônica. Existem valores de **<u>m</u>** para que a seqüência $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ seja linearmente dependente (L.D.)? Se, de fato existirem, encontre quais são as possíveis decomposições, de cada um dos vetores, vinculadas a essa base. Ou seja, uma delas, por exemplo, seria a combinação linear (a decomposição) $\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$.

4ª Questão: Dados os pontos A(-1; 2), B(3; 1) e C(1; -1), determine:

a) o ponto P(x; y) tal que $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; Represente o vetor $\overrightarrow{PA}$ no eixo Cartesiano.

b) o ângulo **θ** formado entre os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, sabendo-se que $\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$. Em que, **θ** é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{v}\|$ são as normas Euclidianas desses vetores.

OUTRA PROVA

3ª Questão: Resolva de forma clara e detalhada as questões a seguir.

a) Sejam as matrizes, de ordem 2, definidas das seguintes formas:

$$A = a_{ij} = \begin{cases} 2^{j-i}, \text{ se } i < j \\ i - j^2, \text{ se } i \geq j \end{cases} \text{ e } B = b_{pq} = \begin{cases} p+q, \text{ se } p = q \\ (p-q)^2, \text{ se } p \neq q \end{cases}.$$

Dessa forma, encontre a transposta, o determinante e a inversa clássica da matriz (A.B), ou sejam, (A.B)’, $(A.B)^{-1}$ e δ(A.B);

b) Seja o sistema de equações lineares ${}_mY_1 = {}_mX_n \cdot {}_n\theta_1$. Dessa forma, pede-se:

b1) Estude o sistema quanto a sua consistência e números de vetores solução, se Y, X e θ forem dados por:

$$Y = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

b2) Obter o vetor solução do sistema do item (a), θ^o, por meio de $\theta^o = X^- Y$, sendo X^- uma inversa condicional de X.

4ª Questão: Resolva de forma clara e detalhada as questões a seguir.

a) Dados os vetores $\vec{u} = (1; -3; 0)$, $\vec{v} = (1; m-4; 0)$ e $\vec{w} = (0; m; 1)$, associados à base canônica. Pede-se:

a1) Os valores de **m**, se existirem, para que a seqüência $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ seja linearmente dependente (L.D.);

a2) Se existirem, obtenha combinação linear (a decomposição) $\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$.

b) Dados os pontos A(-1; 2; 3), B(4; -2; 0), C(1; 0), D(4; 1), E(0; 3) e F(2; 5). Pede-se:

b1) o ponto P(x; y; z) tal que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$;

b2) Verifique se os vetores $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{FE}$ são colineares.