Distribuições: Binomial, Poisson e Normal

Distribuição Binomial

1. Uma remessa de 800 estabilizadores de tensão é recebida pelo controle de qualidade de uma empresa. São inspecionados 20 aparelhos da remessa, que será aceita se ocorrer no máximo um defeituoso. Há 80 defeituosos no lote. Qual a probabilidade de o lote ser aceito?

SOLUÇÃO:

Variável (X): nº de peças defeituosas no lote.

Sucesso: peça defeituosa

n= 20; p = 80/800 = 0,10 (prob. de sucesso)

X~B(20,0.1)

P[X≤1] = $\binom{20}{0} 0.1^0 0.9^{20} + \binom{20}{1} 0.1^1 0.9^{19}$ = **0,3917**

2. Acredita-se que 20% dos moradores das proximidades de uma grande indústria siderúrgica têm alergia aos poluentes lançados ao ar. Admitindo que este percentual de alérgicos é real (correto), calcule a probabilidade de que pelo menos 4 moradores tenham alergia entre 13 selecionados ao acaso.

SOLUÇÃO:

Seja X o número de moradores que têm alergia em 13.

Sucesso: ter alergia.

p: probabilidade de um indivíduo, selecionado ao acaso, ter alergia; p=0,2.

X ~B(13; 0,20),

Assim, a probabilidade de que pelo menos 4 moradores tenham alergia é dada por:

P(X ≥ 4) = 1 - P(X≤3) = 1 – [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)] = **0,2526**

3.(Magalhães, 2004) O escore em um teste internacional de proficiência na língua inglesa varia de 0 a 700 pontos, com mais pontos indicando um melhor desempenho. Informações, coletadas durante vários anos, permitem estabelecer o seguinte modelo para o desempenho no teste:

Pontos	[0,200)	[200,300)	[300,400)	[400,500)	[500,600)	[600,700)
Pi	0.06	0.15	0.16	0.25	0.28	0.10

Várias universidades americanas exigem um escore mínimo de 600 pontos para aceitar candidatos de países de língua não inglesa. De um grande grupo de estudantes brasileiros que prestaram o último exame escolhemos ao acaso 20 deles. Qual a probabilidade de no máximo 3 atenderem ao requisito mínimo mencionado?

SOLUÇÃO:

X: Nº de estudantes aptos em 20.

Sucesso: apto; p=0,10 (ver tabela: [600; 700])

X~B(20;0,10)

P[X≤3] = **0.867**

Este valor reflete as altas probabilidades atribuídas aos escores menores de 600, conforme o modelo de desempenho no teste.

4.(Magalhães,2004) 25% dos universitários de São Paulo praticam esporte. Escolhendo-se ao acaso 15 desses estudantes, determine a probabilidade de:

a) Pelo menos 2 deles serem esportistas

SOLUÇÃO:

X: Universitários que praticam esporte em 15.

Sucesso: praticar

n=15 ; p=0,25

X~B(15,0,25)

P[X≥2] = 1 – P[X<2] 1-[$\binom{15}{0}$ $0.25^0 0.75^{15}$ + $\binom{15}{1}$ $0.25^1 0.75^{14}$] = **0.9198**

b) No mínimo 12 deles não serem esportistas

SOLUÇÃO:

Y: Universitários que não praticam esporte em 15.

P[Y≥12] = P[X≤3] = [$\binom{15}{0}$ $0.25^0 0.75^{15}$ + $\binom{15}{1}$ $0.25^1 0.75^{14}$ + $\binom{15}{2}$ $0.25^2 0.75^{13}$ + $\binom{15}{3}$ $0.25^3 0.75^{12}$] = **0.4613**

5. (Moretin,1999) A probabilidade de uma máquina produzir uma peça defeituosa é de 0,1. Qual a probabilidade de que em 20 peças produzidas pela máquina num dia, ocorram 3 defeituosas? Com base nesse resultado você continuaria produzindo peças com esta máquina levando em consideração uma grande produção de peças por dia?

SOLUÇÃO:

X: nº de peças defeituosas em 20.

Sucesso: defeituosa. p=0,1

X~B(20,0,10)

P[X=3] = $\binom{20}{3} 0.1^3 0.9^{17}$ = **0.1901**

Discussão: Veja que P(X=3) já possui um lavor elevado. Praticamente 19% (o que se espera) das amostras de tamanho 20 teriam exatamente 3 peças com defeito. Acredito que seja um valor significativo a ponto de não se utilizar essa máquina. Agora, se contemplarmos X≥3, teremos P(X≥3)=0,3230732, um valor ainda mais preocupante.

Distribuição de Poisson

Considere:

Função de Probabilidade: $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^x}{x!}$ **;**

λ: frequência média; t: intervalo contínuo

Notação: X~P(λ) $\Rightarrow \mu = \sigma^2 = \lambda.t$

1. O número de vezes que um indivíduo tem gripe em determinado ano é uma variável aleatória de Poisson com λ = 5. Suponha que um novo medicamento reduza o parâmetro λ para 3 em 75% da população. Para os 25% restantes a droga não tem um efeito significativo. Se um indivíduo toma o medicamento durante um ano e tem duas gripes, qual a probabilidade de que o medicamento seja benéfico para ele (ela)? Com base nesse resultado, se o indivíduo soubesse essa probabilidade a priori, você acha que ele deveria continuar tomando o medicamento?
SOLUÇÃO:

Sejam os eventos:

G_2: indivíduo tem duas gripes no ano

M: Medicamento é benéfico para ele (a)

M^c: Medicamento não é benéfico para ele (a)

E sejam as variáveis aleatórias:

N: Indivíduo tem duas gripes no ano quando o medicamento é benéfico para ele.

T: Indivíduo tem duas gripes no ano quando o medicamento não é benéfico para ele.

$N \sim P(5)$

$T \sim P(3)$

Queremos saber $P(M|G_2)$. Assim:

$$P[M|G_2] = \frac{P[M \cap G2]}{P[G2]} = \frac{P[G2/M]P[M]}{P[G2]}$$

Do enunciado tem-se que $P[M] = 0{,}75$ e $P[G2|M] = P[T = 2]$. Basta, então, encontrar $P[G_2]$. Para isso, usa-se a regra de probabilidade total, condicionando G_2 pelos eventos M e Mc:

$$P[G_2] = P[G_2|M]P[M] + P[G_2|M^c]P[M^c]$$

Substituindo com os valores que temos do enunciado:

$$P[T = 2]*0.75 + P[N=2]*0.25 = \frac{e^{-3}3^2}{2!}*0.75 + \frac{e^{-5}5^2}{2!}*0.25 = 0.1891$$

Substituindo na primeira igualdade:

$$P[M|G_2] = \frac{\frac{e^{-3}3^2}{2!}*0.75}{0.1891} = 0.8886$$

A probabilidade de o medicamento ser benéfico para ele é, portanto, de 0,8886.

2.(Meyer,2000) Suponha que X_t, o nº de partículas emitidas em t horas por uma fonte radioativa, tenha uma distribuição de Poisson com parâmetro 20t. Qual será a probabilidade de que exatamente 5 partículas sejam emitidas durante um período de 15 min?

SOLUÇÃO:

X: o nº de partículas emitidas em t horas;

$X \sim P(20)$

$\lambda = 20t$ é representado para partículas emitidas em 1 hora

15min = $\frac{1}{4}$ hora $\rightarrow$ $\lambda = 20^* (\frac{1}{4}) = 5$

$X \sim P(5)$

$$P[X=5] = \frac{e^{-5}5^5}{5!} = \mathbf{0.1754}$$

3.(Magalhães, 2004) Uma indústria de tintas recebe pedidos de seus vendedores através de fax, telefone e internet. A taxa média é de 5 pedidos por hora.

a) Qual a probabilidade da indústria receber mais de dois pedidos por hora? Digamos que, no horário do almoço, a indústria fica impossibilitada de atender a mais de dois pedidos por hora. Você acha que deveria aumentar o nº de atendentes nesse período?

SOLUÇÃO:

X: Nº de pedidos que chegam à indústria por hora.

X~P(5)

P[X>2] = 1 – P[X≤2] = 1 – [$\frac{e^{-5}5^0}{0!}$ + $\frac{e^{-5}5^1}{1!}$ + $\frac{e^{-5}5^2}{2!}$] = 1 – [0.0067 + 0.00337 + 0.0842] = 1 – 0.1246 = **0,8754.**

Discussão: Como P[X>2] = 0,8754, tem-se um alto índice para tal ocorrência. Portanto, recomenda-se a contração ou remanejamento de funcionários.

b) Em um dia de trabalho (8 horas) qual seria a probabilidade de haver 50 pedidos? A indústria deveria aumentar o nº de atendentes para receber mais de 50 pedidos por dia?

SOLUÇÃO:

λ = 5/hora → λ = 5*8 = 40/dia

P[X=50] = $\frac{e^{-40}40^{50}}{50!}$ = **0,0177**

Discussão: P[X>50] = 0,05262805. Logo, em aproximadamente 5% dos casos a industria receberá mais de 50 pedidos. Portanto, se a gerência considerar esse índice alto, pode-se decidir em contratar mais funcionários. Caso contrário, não.

4. A chegada de ônibus em um terminal acontece a razão de 3 por minuto. Supondo que tenha uma distribuição de Poisson, determine a probabilidade de:

a) chegarem exatamente 8 ônibus em 2 minutos.

SOLUÇÃO:

λ=3 ônibus/min

X: Nº de ônibus que chegam no terminal num intervalo de tempo (t).

X~P(3) ⇒ μ=λ.t=3.2=6 ônibus.

P[X=8|t=2] = $\frac{e^{-6}6^8}{8!}$ = **0,1033**

b) chegarem exatamente 4 ônibus em 5 minutos.

X~P(3) $\Rightarrow$ **$\mu=\lambda.t=3.5$ = 15 ônibus**.

P[X=4|t=5] = $\frac{e^{-15}15^4}{4!}$ = **0,006**

5. A cada ano, ocorrem 450 mortes acidentais por arma de fogo na faixa etária de 15 – 24 anos (National Safety Council, Accident Facts,1996).

a) Por semana, qual é o número médio de mortes acidentais por armas de fogo?

SOLUÇÃO:

λ = 450 mortes por ano.

X: Nº de mortes acidentais num intervalo de tempo (t).

X~P(450) $\Rightarrow$ **$\mu=\lambda.t=450.1/52$ = 8,65 mortes (t=1 semana).**

$\frac{\lambda}{52}$ = $\frac{450}{52}$ = **8,65 mortes por semana em média.**

b) Em uma semana típica, qual é a probabilidade de não haver nenhuma morte acidental por armas de fogo?

P[X=0] = $\frac{e^{-8.6538}8.6538^0}{0!}$ **= 0.0002**

c) Em um dia típico, qual é a probabilidade de duas ou mais mortes acidentais por armas de fogo?

X~P(450) $\Rightarrow$ **$\mu=\lambda.t=450.1/52.7$ = 1,236 morte (t=1 dia).**

P[X≥2] = 1- {P[X=0] + P[X=1]} = 1- 0.6496 = **0.3504**

Distribuição Normal

1. (Dantas,2004) Para determinar a eficiência de uma certa dieta na redução da quantidade de colesterol na corrente sanguínea, 100 pessoas são submetidas a essa dieta por um intervalo de tempo bastante prolongado. Em seguida são

registrados os níveis de colesterol dessas pessoas. O nutricionista responsável pelo experimento decidiu endossar a dieta se pelo menos 65% dessas pessoas apresentarem um nível de colesterol menor após serem submetidas à dieta. Qual a probabilidade de que o nutricionista endosse a nova dieta se, na verdade, ela não tem efeito algum sobre o nível de colesterol? Calcule pela dist. Binomial e pela aproximação para dist. Normal.

(Admita que se a dieta não tem efeito algum sobre a quantidade de colesterol, então o nível de colesterol de cada pessoa será maior após a dieta com probabilidade 0,5).

SOLUÇÃO:

X: Nº de pessoas com nível de colesterol menor em 100.

$n=100$; $p=0{,}5$; $\mu = np = 50$; $\sigma^2 = npq = 25$

$X \sim B(100; 0{,}5) \rightarrow$ sob hipótese de não efeito da nova dieta

$P[X \geq 65] = 1 - P[X<65] =$ **0,001758821**

X *aprox.* $N(50,25)$

$P[X \geq 65] \Rightarrow$ Correção: $P[X \geq 64{,}5] = 1 - P[Z<2{,}9] = 1 - 0{,}9981342 =$ **0,001865813**

2. (Meyer, 2000) Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos, D_1 e D_2, tenham distribuições N(42, 36) e N(45, 9), respectivamente. Se o aparelho é para ser usado por um período de 45 horas, qual aparelho você escolheria? E se for por um período de 49 horas?

SOLUÇÃO:
Temos que:

$D1 \sim N(42; 36)$
$D2 \sim N(45; 9)$

Como queremos que o dispositivo dure mais de 45 horas, tem-se:

$P[D1 > 45] = P[Z > 0{,}5] = 0{,}30854$
$P[D2 > 45] = P[Z > 0] = 0{,}50$

Neste caso, D2 deve ser preferido, pois existe uma probabilidade maior de funcionar mais que 45 horas.

Para um período de 49 horas, tem-se:

$P[D1 > 49] = P[Z > 1{,}17] = 0{,}121$
$P[D2 > 49] = P[Z > 1{,}33] = 0{,}09176$

E neste caso, D1 deve ser preferido.

3.Uma fábrica de automóveis sabe que os motores de sua fabricação tem duração com distribuição normal com média de 150.000km e desvio padrão de 5.000km. Qual a probabilidade de que um carro escolhido ao acaso, dos fabricados por essa firma tenha um motor que dure:

a) menos que 170.000km?

SOLUÇÃO:

X: Tempo de duração dos motores

X ~N(150.000; 25.000)

P[X<170.000] = P[Z<4] = 0.9999683 ≈ **1**

b) entre 140.000km e 165.000km?

P[140.000≤X≤165.000] = P[-2≤Z≤3] = 0.4772 + 0.4987 = **0,9759**

c) Se a fábrica substitui o motor que apresenta duração inferior à garantia, qual deve ser esta garantia, para que a percentagem de motores substituídos seja inferior a 0,2%?

P[X<ξ] = 0.002

$$\frac{\xi - 150.000}{5.000} = -2.88$$

$$\xi = -14.400 + 150.000 = \mathbf{135.600\ Km}$$

4. Uma empresa produz televisores de 2 tipos, tipo *A* (comum) e tipo *B* (luxo), e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar defeito grave no prazo de seis meses. O tempo para ocorrência de algum defeito grave nos televisores tem distribuição normal sendo que, no tipo *A,* com média de 10 meses e desvio padrão de 2 meses e no tipo *B*, com média de 11 meses e desvio padrão de 3 meses. Os televisores de tipo *A* e *B* são produzidos com lucro de 1200 u.m. e 2100 u.m. respectivamente e, caso haja restituição, com prejuízo de 2500 u.m. e 7000 u.m., respectivamente.
Sejam:

X_A: Tempo de ocorrência de algum defeito grave nos televisores do tipo A

X_B: Tempo de ocorrência de algum defeito grave nos televisores do tipo B

$X_A \sim N(10; 2^2)$	$Lucro_A$: 1200 u.m.	$Prejuízo_A$: 2500 u.m.
$X_B \sim N(11; 3^2)$	$Lucro_B$: 2100 u.m.	$Prejuízo_B$: 7000 u.m.

(a) Calcule as probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo *A* e do tipo *B*.
Solução:

P[restituição de A] = P[X_A < 6] = P[Z<-2,0] = **0,0228**

P[restituição de B] = P[X_B < 6] = P[Z<-1,67] = **0,0475**

As probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo A e do tipo B, são, respectivamente, de 0,0228 e 0,0475.

(b) Calcule o lucro médio para os televisores do tipo *A* e para os televisores do tipo *B*.

P[não restituição de A] = 1 – P[restituição de A] = 1 – 0,0228 = 0,9772

P[não restituição de B] = 1 – P[restituição de B] = 1 - 0,0475 = 0,9525

Lucro médio de A = 1200 x 0,9772 – 2500 x 0,0228 = **1115,64 u.m**.

Lucro médio de B = 2100 x 0,9525 – 7000 x 0,0475 = **1667,75 u.m.**

(c) Baseando-se nos lucros médios, a empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo *A* ou do tipo *B*?

A empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo B, pois o lucro médio de B é maior que o lucro médio de A.

5. As notas dos alunos de Estatística de uma Universidade distribuem-se normalmente com média de 6,4 e desvio padrão de 0,8. Em uma classe de 80 alunos, quantos terão nota:

a) Menor que 5,0?
Solução:
X: Notas dos alunos
$X \sim N(6.4; 0{,}8^2)$
P[X<5] = P[Z<-1,75] = 0,04 → 0,04x80 = **3,2 alunos**

b) Entre 5,0 e 7,5
P[5≤X≤7.5] = P[-1.75≤Z≤1.38] = 0.8761 → 0.8761*80 = **70,01 alunos**
c) Maior que 7,5
P[X≥7.5] = P[Z≥1.38] = 0.084 → 0.084*80 = **6,72 alunos**

Distribuições: Binomial, Poisson e Normal

Distribuição Binomial

1. Uma remessa de 800 estabilizadores de tensão é recebida pelo controle de qualidade de uma empresa. São inspecionados 20 aparelhos da remessa, que será aceita se ocorrer no máximo um defeituoso. Há 80 defeituosos no lote. Qual a probabilidade de o lote ser aceito?

SOLUÇÃO:

Variável (X): nº de peças defeituosas no lote.

Sucesso: peça defeituosa

n= 20; p = 80/800 = 0,10 (prob. de sucesso)

X~B(20,0.1)

P[X≤1] = $\binom{20}{0}\, 0.1^0 0.9^{20} + \binom{20}{1}\, 0.1^1 0.9^{19}$ = **0,3917**

2. Acredita-se que 20% dos moradores das proximidades de uma grande indústria siderúrgica têm alergia aos poluentes lançados ao ar. Admitindo que este percentual de alérgicos é real (correto), calcule a probabilidade de que pelo menos 4 moradores tenham alergia entre 13 selecionados ao acaso.

SOLUÇÃO:

Seja X o número de moradores que têm alergia em 13.

Sucesso: ter alergia.

p: probabilidade de um indivíduo, selecionado ao acaso, ter alergia; p=0,2.

X ~B(13; 0,20),

Assim, a probabilidade de que pelo menos 4 moradores tenham alergia é dada por:

P(X ≥ 4) = 1 - P(X≤3) = 1 – [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)] = **0,2526**

3.(Magalhães, 2004) O escore em um teste internacional de proficiência na língua inglesa varia de 0 a 700 pontos, com mais pontos indicando um melhor desempenho. Informações, coletadas durante vários anos, permitem estabelecer o seguinte modelo para o desempenho no teste:

Pontos	[0,200)	[200,300)	[300,400)	[400,500)	[500,600)	[600,700)
Pi	0.06	0.15	0.16	0.25	0.28	0.10

Várias universidades americanas exigem um escore mínimo de 600 pontos para aceitar candidatos de países de língua não inglesa. De um grande grupo de estudantes brasileiros que prestaram o último exame escolhemos ao acaso 20 deles. Qual a probabilidade de no máximo 3 atenderem ao requisito mínimo mencionado?

SOLUÇÃO:

X: Nº de estudantes aptos em 20.

Sucesso: apto; p=0,10 (ver tabela: [600; 700])

X~B(20;0,10)

P[X≤3] = **0.867**

Este valor reflete as altas probabilidades atribuídas aos escores menores de 600, conforme o modelo de desempenho no teste.

4.(Magalhães,2004) 25% dos universitários de São Paulo praticam esporte. Escolhendo-se ao acaso 15 desses estudantes, determine a probabilidade de:

a) Pelo menos 2 deles serem esportistas

SOLUÇÃO:

X: Universitários que praticam esporte em 15.

Sucesso: praticar

n=15 ; p=0,25

X~B(15,0,25)

P[X≥2] = 1 – P[X<2] 1-[$\binom{15}{0}$ $0.25^0 0.75^{15}$ + $\binom{15}{1}$ $0.25^1 0.75^{14}$] = **0.9198**

b) No mínimo 12 deles não serem esportistas

SOLUÇÃO:

Y: Universitários que não praticam esporte em 15.

P[Y≥12] = P[X≤3] = [$\binom{15}{0}$ $0.25^0 0.75^{15}$ + $\binom{15}{1}$ $0.25^1 0.75^{14}$ + $\binom{15}{2}$ $0.25^2 0.75^{13}$ + $\binom{15}{3}$ $0.25^3 0.75^{12}$] = **0.4613**

5. (Moretin,1999) A probabilidade de uma máquina produzir uma peça defeituosa é de 0,1. Qual a probabilidade de que em 20 peças produzidas pela máquina num dia, ocorram 3 defeituosas? Com base nesse resultado você continuaria produzindo peças com esta máquina levando em consideração uma grande produção de peças por dia?

SOLUÇÃO:

X: nº de peças defeituosas em 20.

Sucesso: defeituosa. p=0,1

X~B(20,0,10)

P[X=3] = $\binom{20}{3} 0.1^3 0.9^{17}$ = **0.1901**

Discussão: Veja que P(X=3) já possui um lavor elevado. Praticamente 19% (o que se espera) das amostras de tamanho 20 teriam exatamente 3 peças com defeito. Acredito que seja um valor significativo a ponto de não se utilizar essa máquina. Agora, se contemplarmos X≥3, teremos P(X≥3)=0,3230732, um valor ainda mais preocupante.

Distribuição de Poisson

Considere:

Função de Probabilidade: $P(X = x) = \dfrac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^x}{x!}$ **;**

λ: frequência média; t: intervalo contínuo

Notação: X~P(λ) $\Rightarrow \mu = \sigma^2 = \lambda.t$

1. O número de vezes que um indivíduo tem gripe em determinado ano é uma variável aleatória de Poisson com λ = 5. Suponha que um novo medicamento reduza o parâmetro λ para 3 em 75% da população. Para os 25% restantes a droga não tem um efeito significativo. Se um indivíduo toma o medicamento durante um ano e tem duas gripes, qual a probabilidade de que o medicamento seja benéfico para ele (ela)? Com base nesse resultado, se o indivíduo soubesse essa probabilidade a priori, você acha que ele deveria continuar tomando o medicamento?
SOLUÇÃO:

Sejam os eventos:

G_2: indivíduo tem duas gripes no ano

M: Medicamento é benéfico para ele (a)

M^c: Medicamento não é benéfico para ele (a)

E sejam as variáveis aleatórias:

N: Indivíduo tem duas gripes no ano quando o medicamento é benéfico para ele.

T: Indivíduo tem duas gripes no ano quando o medicamento não é benéfico para ele.

N ~P(5)

T ~P(3)

Queremos saber $P(M|G_2)$. Assim:

$$P[M|G_2] = \frac{P[M \cap G2]}{P[G2]} = \frac{P[G2/M]P[M]}{P[G2]}$$

Do enunciado tem-se que P[M] = 0,75 e P[G2|M] = P[T = 2]. Basta, então, encontrar $P[G_2]$. Para isso, usa-se a regra de probabilidade total, condicionando G_2 pelos eventos M e Mc:

$$P[G_2] = P[G_2|M]P[M] + P[G_2|M^c]P[M^c]$$

Substituindo com os valores que temos do enunciado:

$$P[T = 2]*0.75 + P[N=2]*0.25 = \frac{e^{-3}3^2}{2!}*0.75 + \frac{e^{-5}5^2}{2!}*0.25 = 0.1891$$

Substituindo na primeira igualdade:

$$P[M|G_2] = \frac{\frac{e^{-3}3^2}{2!}*0.75}{0.1891} = 0.8886$$

A probabilidade de o medicamento ser benéfico para ele é, portanto, de 0,8886.

2.(Meyer,2000) Suponha que X_t, o nº de partículas emitidas em t horas por uma fonte radioativa, tenha uma distribuição de Poisson com parâmetro 20t. Qual será a probabilidade de que exatamente 5 partículas sejam emitidas durante um período de 15 min?

SOLUÇÃO:

X: o nº de partículas emitidas em t horas;

X~P(20)

λ = 20t é representado para partículas emitidas em 1 hora

15min = $\frac{1}{4}$ hora $\rightarrow$ $\lambda = 20^* (\frac{1}{4}) = 5$

X~P(5)

$$P[X=5] = \frac{e^{-5}5^5}{5!} = \mathbf{0.1754}$$

3.(Magalhães, 2004) Uma indústria de tintas recebe pedidos de seus vendedores através de fax, telefone e internet. A taxa média é de 5 pedidos por hora.

a) Qual a probabilidade da indústria receber mais de dois pedidos por hora? Digamos que, no horário do almoço, a indústria fica impossibilitada de atender a mais de dois pedidos por hora. Você acha que deveria aumentar o nº de atendentes nesse período?

SOLUÇÃO:

X: Nº de pedidos que chegam à indústria por hora.

X~P(5)

P[X>2] = 1 – P[X≤2] = 1 – [$\frac{e^{-5}5^0}{0!}$ + $\frac{e^{-5}5^1}{1!}$ + $\frac{e^{-5}5^2}{2!}$] = 1 – [0.0067 + 0.00337 + 0.0842] = 1 – 0.1246 = **0,8754.**

Discussão: Como P[X>2] = 0,8754, tem-se um alto índice para tal ocorrência. Portanto, recomenda-se a contração ou remanejamento de funcionários.

b) Em um dia de trabalho (8 horas) qual seria a probabilidade de haver 50 pedidos? A indústria deveria aumentar o nº de atendentes para receber mais de 50 pedidos por dia?

SOLUÇÃO:

λ = 5/hora → λ = 5*8 = 40/dia

P[X=50] = $\frac{e^{-40}40^{50}}{50!}$ = **0,0177**

Discussão: P[X>50] = 0,05262805. Logo, em aproximadamente 5% dos casos a industria receberá mais de 50 pedidos. Portanto, se a gerência considerar esse índice alto, pode-se decidir em contratar mais funcionários. Caso contrário, não.

4. A chegada de ônibus em um terminal acontece a razão de 3 por minuto. Supondo que tenha uma distribuição de Poisson, determine a probabilidade de:

a) chegarem exatamente 8 ônibus em 2 minutos.

SOLUÇÃO:

λ=3 ônibus/min

X: Nº de ônibus que chegam no terminal num intervalo de tempo (t).

X~P(3) ⇒ μ=λ.t=3.2=6 ônibus.

P[X=8|t=2] = $\frac{e^{-6}6^8}{8!}$ = **0,1033**

b) chegarem exatamente 4 ônibus em 5 minutos.

X~P(3) ⇒ **μ=λ.t=3.5 = 15 ônibus**.

P[X=4|t=5] = $\frac{e^{-15}15^{4}}{4!}$ = **0,006**

5. A cada ano, ocorrem 450 mortes acidentais por arma de fogo na faixa etária de 15 – 24 anos (National Safety Council, Accident Facts,1996).

a) Por semana, qual é o número médio de mortes acidentais por armas de fogo?

SOLUÇÃO:

λ = 450 mortes por ano.

X: Nº de mortes acidentais num intervalo de tempo (t).

X~P(450) ⇒ **μ=λ.t=450.1/52 = 8,65 mortes (t=1 semana).**

$\frac{\lambda}{52}$ = $\frac{450}{52}$ = **8,65 mortes por semana em média.**

b) Em uma semana típica, qual é a probabilidade de não haver nenhuma morte acidental por armas de fogo?

P[X=0] = $\frac{e^{-8.6538}8.6538^{0}}{0!}$ **= 0.0002**

c) Em um dia típico, qual é a probabilidade de duas ou mais mortes acidentais por armas de fogo?

X~P(450) ⇒ **μ=λ.t=450.1/52.7 = 1,236 morte (t=1 dia).**

P[X≥2] = 1- {P[X=0] + P[X=1]} = 1- 0.6496 = **0.3504**

Distribuição Normal

1. (Dantas,2004) Para determinar a eficiência de uma certa dieta na redução da quantidade de colesterol na corrente sanguínea, 100 pessoas são submetidas a essa dieta por um intervalo de tempo bastante prolongado. Em seguida são

registrados os níveis de colesterol dessas pessoas. O nutricionista responsável pelo experimento decidiu endossar a dieta se pelo menos 65% dessas pessoas apresentarem um nível de colesterol menor após serem submetidas à dieta. Qual a probabilidade de que o nutricionista endosse a nova dieta se, na verdade, ela não tem efeito algum sobre o nível de colesterol? Calcule pela dist. Binomial e pela aproximação para dist. Normal.

(Admita que se a dieta não tem efeito algum sobre a quantidade de colesterol, então o nível de colesterol de cada pessoa será maior após a dieta com probabilidade 0,5).

SOLUÇÃO:

X: Nº de pessoas com nível de colesterol menor em 100.

$n=100$; $p=0,5$; $\mu = np = 50$; $\sigma^2 = npq = 25$

$X \sim B(100; 0,5) \rightarrow$ sob hipótese de não efeito da nova dieta

$P[X \geq 65] = 1 - P[X<65] =$ **0,001758821**

X *aprox.* N(50,25)

$P[X \geq 65] \Rightarrow$ Correção: $P[X \geq 64,5] = 1 - P[Z<2,9] = 1 - 0,9981342 =$ **0,001865813**

2. (Meyer, 2000) Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos, D_1 e D_2, tenham distribuições N(42, 36) e N(45, 9), respectivamente. Se o aparelho é para ser usado por um período de 45 horas, qual aparelho você escolheria? E se for por um período de 49 horas?

SOLUÇÃO:
Temos que:

$D1 \sim N(42; 36)$
$D2 \sim N(45; 9)$

Como queremos que o dispositivo dure mais de 45 horas, tem-se:

$P[D1 > 45] = P[Z > 0,5] = 0,30854$
$P[D2 > 45] = P[Z > 0] = 0,50$

Neste caso, D2 deve ser preferido, pois existe uma probabilidade maior de funcionar mais que 45 horas.

Para um período de 49 horas, tem-se:

$P[D1 > 49] = P[Z > 1,17] = 0,121$
$P[D2 > 49] = P[Z > 1,33] = 0,09176$

E neste caso, D1 deve ser preferido.

3.Uma fábrica de automóveis sabe que os motores de sua fabricação tem duração com distribuição normal com média de 150.000km e desvio padrão de 5.000km. Qual a probabilidade de que um carro escolhido ao acaso, dos fabricados por essa firma tenha um motor que dure:

a) menos que 170.000km?

SOLUÇÃO:

X: Tempo de duração dos motores

X ~N(150.000; 25.000)

P[X<170.000] = P[Z<4] = 0.9999683 ≈ **1**

b) entre 140.000km e 165.000km?

P[140.000≤X≤165.000] = P[-2≤Z≤3] = 0.4772 + 0.4987 = **0,9759**

c) Se a fábrica substitui o motor que apresenta duração inferior à garantia, qual deve ser esta garantia, para que a percentagem de motores substituídos seja inferior a 0,2%?

P[X<ξ] = 0.002

$$\frac{\xi - 150.000}{5.000} = -2.88$$

$$\xi = -14.400 + 150.000 = \mathbf{135.600\ Km}$$

4. Uma empresa produz televisores de 2 tipos, tipo *A* (comum) e tipo *B* (luxo), e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar defeito grave no prazo de seis meses. O tempo para ocorrência de algum defeito grave nos televisores tem distribuição normal sendo que, no tipo *A,* com média de 10 meses e desvio padrão de 2 meses e no tipo *B*, com média de 11 meses e desvio padrão de 3 meses. Os televisores de tipo *A* e *B* são produzidos com lucro de 1200 u.m. e 2100 u.m. respectivamente e, caso haja restituição, com prejuízo de 2500 u.m. e 7000 u.m., respectivamente.
Sejam:

X_A: Tempo de ocorrência de algum defeito grave nos televisores do tipo A

X_B: Tempo de ocorrência de algum defeito grave nos televisores do tipo B

X_A~N(10; 2^2)	$Lucro_A$: 1200 u.m.	$Prejuízo_A$: 2500 u.m.
X_B~N(11; 3^2)	$Lucro_B$: 2100 u.m.	$Prejuízo_B$: 7000 u.m.

(a) Calcule as probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo *A* e do tipo *B*.
Solução:

P[restituição de A] = P[X_A < 6] = P[Z<-2,0] = **0,0228**

P[restituição de B] = P[X_B < 6] = P[Z<-1,67] = **0,0475**

As probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo A e do tipo B, são, respectivamente, de 0,0228 e 0,0475.

(b) Calcule o lucro médio para os televisores do tipo *A* e para os televisores do tipo *B*.

P[não restituição de A] = 1 – P[restituição de A] = 1 – 0,0228 = 0,9772

P[não restituição de B] = 1 – P[restituição de B] = 1 - 0,0475 = 0,9525

Lucro médio de A = 1200 x 0,9772 – 2500 x 0,0228 = **1115,64 u.m**.

Lucro médio de B = 2100 x 0,9525 – 7000 x 0,0475 = **1667,75 u.m.**

(c) Baseando-se nos lucros médios, a empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo *A* ou do tipo *B*?

A empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo B, pois o lucro médio de B é maior que o lucro médio de A.

5. As notas dos alunos de Estatística de uma Universidade distribuem-se normalmente com média de 6,4 e desvio padrão de 0,8. Em uma classe de 80 alunos, quantos terão nota:

a) Menor que 5,0?
Solução:
X: Notas dos alunos
$X \sim N(6.4; 0{,}8^2)$
P[X<5] = P[Z<-1,75] = 0,04 → 0,04x80 = **3,2 alunos**

b) Entre 5,0 e 7,5
P[5≤X≤7.5] = P[-1.75≤Z≤1.38] = 0.8761 → 0.8761*80 = **70,01 alunos**
c) Maior que 7,5
P[X≥7.5] = P[Z≥1.38] = 0.084 → 0.084*80 = **6,72 alunos**