Prof. Jomar

SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Seja o S.E.L. ${}_m\mathbf{X}_n \; {}_n\boldsymbol{\theta}_1 = {}_m\mathbf{y}_1$, sendo **X**: a matriz dos coeficientes dos parâmetros; **θ**: o vetor de parâmetros e **y**: o vetor de observações. Esse sistema pode ser:

1) **Consistente** (Possível ou Compatível), ou seja, possui Solução Exata. Assim, quando **θ** for obtido, o S.E.L. se verificará para todas as equações lineares, logo, $\mathbf{X\theta = y}$. Porém, podemos ter situações em que **θ** é único (apenas um vetor solução; o sistema será dito **Determinado**) ou ainda, **θ** poderá assumir infinitas soluções (infinitos vetores solução; o sistema será chamado de **Indeterminado**).

Nesse contexto, a(s) **solução(ões) EXATA(S)** seriam obtidas pelos seguintes estimadores:

1.1) Para **X**;(m=n): $\theta = X^{-1}y$ **(Determinado)** ou $\theta = X^{G}y$ **(Indeterminado)**

1.2) Para **X**; (m≠n): $\theta = X^{G}y$ **(Determinado ou Indeterminado; Ver Teorema 2)**

Obs.: $\mathbf{X^G}$ é uma Inversa Generalizada.

2) **Inconsistente** (Impossível ou Incompatível), assim, o S.E.L. **não** possuirá **Solução Exata**. Dessa forma, o sistema não se verificará ($\mathbf{X\theta \approx y}$). Logo, as **Soluções** obtidas serão **Aproximadas**. Essas soluções poderão assim serem obtidas:

$$\hat{\theta} = X^{G}y \text{ ou}$$

$\theta^0 = (X'X)^G X'y$ (Estimador de Mínimos Quadrados).

Assim, $\hat{y} = X\hat{\theta}$ ou $\hat{y} = X\theta^0$.

Conseqüentemente, existirá um erro associado a cada uma das equações lineares do S.E.L.. Tal erro poderá ser obtido por:

$$\hat{e} = y - \hat{y}\,.$$

Obs.: $\theta^0 = (X'X)^G X'y$ resultará no menor erro.

Verificação de Consistência:

Teorema 1: Uma condição necessária e suficiente para que o S.E.L. (${}_m\mathbf{X}_n\ {}_n\theta_1 = {}_m\mathbf{y}_1$) seja consistente é que **r[X]=r[X|y].**

Verificação de Solução Única:

Se Consistente:

Teorema 2: Uma condição necessária e suficiente para que o S.E.L. **consistente** possua solução única (Determinado) é que:

r[X]=n (nº de parâmetros do modelo).

Em Resumo:

$$\mathbf{Y=X\theta} \Rightarrow \begin{cases} \text{Consistente} \begin{cases} X_{(n)} \begin{cases} \text{Determinado} \rightarrow \theta = X^{-1}y \quad \text{ou} \quad \theta = X^{-}y \\ \text{Indeterminado} \rightarrow \theta = X^{-}y \end{cases} \\ {}_{m}X_{n} \begin{cases} \text{Determinado } (r[X]=n) \\ \text{Indeterminado} (r[X]<n) \end{cases} \Rightarrow \theta = X^{-}y \end{cases} \\ \text{Inconsistente} \rightarrow \theta^{0} = (X'X)^{-}X'y \text{ (Solução Aproximada)} \end{cases}$$

EXEMPLOS

Dados os S.E.L., estude-os detalhadamente:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$.

Solução:

a) Consistência:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 13 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Logo, r[X]=r[X|y]=2. Sistema Consistente. (Teo. 1)

b) Determinado ou Indeterminado?

Como o r[X]=2=nº de parâmetros (θ_1; θ_2). (Teo. 2)

Então, o Sistema é Determinado.

c) Vetor Solução:

$$\theta = X^{-1}y$$

Assim, $\theta = X^{-1}y = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$.

Note, então, que:

i) só existe esse vetor solução que satisfaça o S.E.L.. Ou seja:

$$X\theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix};$$

ii) não haverá erro associado (Sistema é Consistente):

$$y - \hat{y} = 0$$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$

Solução:

a) Consistência:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 9/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 \\ 14/5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, r[X]=r[X|y]=2. Sistema Consistente. (Teo. 1).

b) Determinado ou Indeterminado?

Como o r[X]= 2 < nº de parâmetros (x_1; x_2; x_3). (Teo. 2)

Então, o Sistema é Indeterminado.

c) Vetores Solução: Infinitos!!!

Porém, uma das possíveis soluções, pode ser encontrada por meio do

Estimador: $\theta = X^{-}y$. Assim, basta obter X^{-}.

X^{-} = ?

Procedimento para obtenção de X^{-}:

1. r[X]=2. Encontrar $M_{(2)}$ não-singular dentro de X:

$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Veja que δ(M)=3≠0 (Não-singular: admite X^{-1}).

2. $(M^{-1})' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$.

3. Substituir $(M^{-1})'$ em X e zerar os demais elementos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

4. Transpor a matriz resultante:

$$X^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Agora, basta obter:

$$\theta = X^{-}y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Note que, de fato,

$$X\theta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix},$$

será uma das possíveis soluções do sistema. Além disso, novamente não teremos erro associado, pois, o S.E.L. é Consistente.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

Solução:

a) Consistência:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como, r[X]=2 < r[X|y]=3. Sistema Inconsistente. (Teo. 1).

b) Não faz, agora, sentido falarmos em Determinado ou Indeterminado, pois o sistema é Inconsistente, não possuindo, portanto, Solução Exata. Logo, obteremos Soluções Aproximadas. Consequentemente, dessa vez teremos um erro associado. Note, também, que sendo essas soluções aproximadas, qualquer vetor θ escolhido poderá ser "candidato" à solução. Devemos, então, escolher dentre infinitos vetores, um que nos forneça um menor erro de estimação. Sabemos que esse Estimador é dado por:

$$\theta^0 = (X'X)^- X'y.$$

Assim, podemos obter o vetor θ^o que resultará num erro, $\hat{e} = y - \hat{y}$, menor do que todos os outros que por ventura pudessem ser escolhidos.

Dessa forma, vamos obter $(X'X)^-$.

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}. \text{ Logo,}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -9 & 14 \end{bmatrix}.$$

Note que, nesse caso, coincidentemente, a Inversa Condicional será idêntica à Inversa Clássica. Quase sempre, na prática, isso não ocorre.

Agora, vamos obter $X'y$:

$$X'y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\theta^0 = (X'X)^- X'y$ fica:

$$\theta^0 = (X'X)^{-1} X'y = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -9 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2/3 \end{bmatrix}.$$

Note que, nesse caso, teremos apenas um vetor solução associado ao Estimador $\theta^0 = (X'X)^- X'y$.

Então,

$$X\theta^o = \hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 10/3 \\ 14/3 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, o erro associado será dado por:

$$\hat{e} = y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/3 \\ 10/3 \\ 14/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Agora, podemos quantificar (mensurar) o erro envolvido:

$$S.Q._{Erro} = \hat{e}'\hat{e} = 3.\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

É isso!!!

PAZ!!!