Listas de estudo: Introdução ao Cálculo Diferencial - PRAAE Licenciatura em Ciências (1º semestre 2009)

Prof. Emerson Joucoski, maio de 2009.

- Estas listas são sugestões de problemas para as avaliações escritas a serem realizadas;
- Nem todos os problemas propostos têm gabarito;
- Haverá duas avaliações, escritas e **sem consulta**:
  - **Avaliação 1 – Matemática básica –** 01/07/2009 (semana da SEI), quarta-feira, às 19h-22h;
  - **Avaliação 2 – Cálculo diferencial –** em 07/07/2009, terça-feira, às 19h-22h.
- Cada avaliação terá a duração de 3 horas e poderá ser usada calculadora;
- Sugestão de livros para consulta:
  - MUNEM, M. A. FOULIS, D.J. **Cálculo.** Volume 1. Ed. Livros Tecnicos e Cientificos (LTC). RJ: Rio de Janeiro, 1982.
  - ANTON, H. **Cálculo, um novo horizonte.** 6ª ed. Ed. Bookman . RS: Porto Alegre, 2000.
  - IEZZI, G. *et al* **Matemática.** Vol. Único. 2ª ed. Ed. Atual. SP: São Paulo, 2002.
  - GUIDORIZZI, H.L. **Um curso de cálculo.** 5ª ed. Ed. Livros Tecnicos e Cientificos. RJ: Rio de Janeiro, 2001.
  - HOFFMANN, L.D. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações.** 7ª ed. Ed. Livros Tecnicos e Cientificos. RJ: Rio de Janeiro, 2002.

Avaliação 1: Matemática básica.

1. Nos trabalhos científicos, números muito grandes ou muito próximos de zero são escritos em *notação científica*, que consiste em um número x, $1 < x < 10$, multiplicado por uma potência de 10. Escreva os números a seguir em notação científica:
a) 0,000052 b) 23,10 c) 0,00000001 d) 923.871,09

2. a) $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$ é um número inteiro? b) $\sqrt[3]{-0{,}064}$ é número racional ou irracional?

3. Encontre a geratriz de cada dízima periódica: a) $0,\overline{4}$ b) 1,777... c) $1,\overline{81}$ d) $1{,}24\overline{15}$

4. O preço unitário de um produto é dada por $p = \frac{k}{n} + 10$, para n ≥ 1, sendo k uma constante e n o número de unidades adquiridas. a) Qual o valor da constante k, sabendo-se que, quando foram adquiridas 10 unidades, o preço unitário foi de R$19,00. b) Com R$590,00, quantas unidades do referido produto podem ser adquiridas?

5. Sejam f e g função reais definidas por $f(x) = -3x + 2$ e $g(x) = 2x - 4$. Determine: a) $f(2) + g(1)$. b) $\frac{f(0)+g(5)}{f(-2)}$. c) O valor de x tal que $f(x) = g(x)$.

6. Uma função real f de variável real é tal que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ e $f(x + 1) = xf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Qual o valor de $f(\frac{7}{2})$?

7. Uma herança foi dividida entre a viúva, o filho, a filha e o cozinheiro. A filha e o filho ficaram com a metade, distribuída na proporção de 4 para 3, respectivamente. A viúva ganhou o dobro do que coube ao filho, e o cozinheiro, R$500,00. Qual o valor da herança?

8. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações: a) $3x - 4 \leq x + 5$. b) $x - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} + 2x$. c) $\frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} + x \leq \frac{x-2}{5} - \frac{x-3}{4}$. d) $x^2 + 3x + 7 < 0$. e) $-x^2 > -1$. f) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$. g) $5^2 < (x-2)^2$. h) $|x^2 - x - 4| > 2$. i) $|x^2 - 3x - 4| \leq 6$. j) $|x| \geq x^2$.

9. Empresas Alfa e Beta alugam televisores do mesmo tipo. A empresa Alfa cobra R$35,00 fixos pelos primeiros 30 dias de uso e R$1,00 por dia extra. A empresa Beta cobra R$15,00 pelos primeiros 20 dias de uso e R$1,50 por dia extra. Após n dias o valor cobrado pela empresa Beta passa a ser maior do que o cobrado pela empresa Alfa. Qual é o valor de n?

10. Determine as raízes (zeros) reais das funções: a) $f(x) = x^2 + 5x + 7$. b) $f(x) = x - 2x^2$. c) $f(x) = -x^2 + \frac{3x}{2} + 1$. d) $f(x) = (2x-3)(x^2 - 7x + 10)$. e) $f(x) = x^2 - 11^2$.

11. Uma das raízes da equação $-x^2 + px + 3 = 0$ é igual a 2. a) Qual é o valor de p? b) Qual é a outra raiz que essa equação possui?

12. Qual é o valor de m na equação $x^2 - (m+5)x + m + 1 = 0$, para que as raízes sejam simétricas?

13. Determine o valor máximo (ou mínimo) e o ponto de máximo (ou mínimo) das funções: a) $y = 2x^2 + 5x$. b) $y = 4x^2 - 8x + 4$. c) $y = -3x^2 + 12x$. d) $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{4x}{3} - \frac{1}{2}$.

14. Uma empresa fundada em 1990 tem, para cada ano n de funcionamento, um lucro igual a $L(n) = 100000(-n^2 + 22n)$. a) Em que período a empresa apresentou lucro crescente? b) A partir de que ano a empresa terá prejuízo?

15. Os pontos (0,0) e (2,1) estão no gráfico de uma função quadrática f. O mínimo de f é assumido no ponto de abscissa $x = -\frac{1}{4}$. Qual é o valor de $f(1)$?

16. Qual é o valor da função $y = |x-3| + |x-1|$ se: a) $x = -2$. b) $x = 5$. c) $1 < x < 3$.

17. Uma pesquisa ecológica determinou que a população (s) de sapos de uma determinada região, medida em centenas, depende da população (m) de insetos, medida em milhares, de acordo com a equação $s(m) = 65 + \sqrt{\frac{m}{8}}$. A população de insetos, por sua vez, varia com a precipitação (p) de chuva em centímetros, de acordo com a equação $m(p) = 43p + 7{,}5$. a) Expresse a população de sapos como função da precipitação. b) Calcule a população de sapos quando a precipitação é de 1,5cm.

18. Se $f(g(x)) = x$ e $f(x) = \frac{x+3}{2}$, então qual é a expressão de $g(x)$?

19. Efetue: a) $\sqrt{8+\sqrt{15}} \cdot \sqrt{8-\sqrt{15}}$. b) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$. c) $\sqrt{\sqrt{81}}$. d) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$. e) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$. f) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}$. g) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2}$.

20. Utilizando um microscópio, um técnico constatou que cada célula de uma bactéria subdivide-se em duas ao final de 20 minutos. Ao final de dez horas, qual será o total de células produzidas a partir de uma célula?

21. Uma reserva florestal possui 10.000 árvores. Determine em quantos anos a quantidade de árvores estará reduzida à oitava parte, se a função que representa a quantidade de árvores por ano é $y(t) = 10000 \cdot 2^{-t}$.

22. Em certo período de marcação é utilizado o isótopo do potássio K^{42}. Ele perde 5,4% de sua intensidade por hora. Qual a percentagem perdida ao final de três horas?

23. Uma imobiliária acredita que o valor *v* de um imóvel no litoral varia segundo a lei $v(t) = 60000(0{,}9)^t$, em que *t* é o número de anos contados a partir de hoje. a) Qual é o valor atual desse imóvel? b) Quanto valerá este imóvel daqui a 2 anos? c) Daqui a quantos anos o imóvel valerá R$ 35.429,40?
24. A lei seguinte representa o crescimento do número de pessoas infectadas por uma gripe, em certa metrópole: $N(t) = a \cdot 2^{bt}$, em que *N(t)* é o número de pessoas infectadas *t* dias após a realização desse estudo e *a* e *b* são constantes reais. Sabendo que no dia em que se iniciou o estudo já havia 3.000 pessoas infectadas e que, após 2 dias, esse número já era de 24.000 pessoas, determine: a) Os valores de *a* e *b*. b) Número de infectados pela gripe após 16 horas do início dos estudos. c) Número mínimo de dias necessários para que o número de infectados ultrapasse 3 milhões. (pode-se usar $2^{10} \sim 10^3$)
25. Imaginar que todas as dimensões lineares de um animal aumentem 12%. Então, o animal terá a mesma forma. Como aumentam a superfície, o volume e o peso (sob a gravidade constante)? Dar as porcentagens de aumento.
26. Se $\log 5 = k$, determine em função de *k*: a) $\log 2$. b) $\log \sqrt[3]{25}$. c) $\log 5000$. d) $\log 1250$.
27. Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule em função de *a* e *b* os logaritmos: a) $\log 6$. b) $\log 1{,}5$. c) $\log \sqrt[5]{72}$. d) $\log 180$.
28. Sabendo-se que $\log 2 = 0{,}301$. Qual o valor do $\log 80$?
29. Qual é o perímetro de um quadrado de diagonal 2,0 cm?
30. A altura relativa à hipotenusa determina sobre ela segmentos de medidas 3cm e 4cm. Quanto mede os catetos deste triângulo?
31. Uma escada de 13,0 m de comprimento encontra-se com a extremidade superior apoiada na parede vertical de um edifício e a parte inferior apoiada no piso horizontal desse mesmo edifício, a uma distância de 5,0m da parede. Se o topo da escada deslizar 1,0 para baixo, qual é o valor de quanto a parte inferior escorregará?
32. A Terra é aproximadamente um esfera de 40.000 km de circunferência. Imaginemos que um arame fosse enrolado em torno de tal esfera. Agora aumentamos de 10m o comprimento requerido de 40.000km e enrolamos o arame novamente de forma que um espaço de medida constante é deixado entre a Terra e o arame. Um camundongo seria capaz de passar entre o arame e a Terra? Justifique com as contas.
33. Dado $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, ache o seno do ângulo *x* e a seguir determine *x* em radianos.
34. Num triângulo retângulo, um dos catetos mede a terça parte da hipotenusa. Calcule a tangente do menor ângulo do triângulo.
35. Sendo *x* um ângulo agudo tal que $sen(x) = \frac{4}{5}$, determine $tg(x)$.
36. Determine o ângulo formado entre um mastro vertical de 25m e um fio de arame de 30,5m, preso pelas extremidades no solo, horizontal, e no topo do mastro.
37. Dois pescadores, P_1 e P_2, estão na beira de um rio de margens paralelas e conseguem ver um bote *B* na outra margem. Sabendo que P_1P_2 = 63m, os ângulos $B\widehat{P_1}P_2 = \alpha$ e $B\widehat{P_2}P_1 = \beta$ e que $tg\alpha = 2$ e $tg\beta = 4$, determine a distância (em metros) entre as margens.
38. Um triângulo isósceles é tal que a medida dos ângulos de sua base é 30°. Se a altura relativa a essa base mede 1,5cm, qual é o valor do perímetro, em centímetros, desse triângulo?
39. Calcule o ângulo entre os ponteiros do relógio às 4 horas e 20 minutos.
40. Se o ponteiro menor de um relógio percorre um arco de $\frac{\pi}{12}$rad, o ponteiro maior percorre que arco?
41. Qual o valor numérico da expressão $\frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)+2tg\left(\frac{3x}{4}\right)}{3\cos(x)}$ para $x = \frac{\pi}{3}$?
42. As rodas traseiras de um veículo têm 4,25m de circunferência cada uma. Enquanto as rodas dianteiras dão 15 voltas, as traseiras dão somente 12 voltas. Qual a circunferência de cada roda dianteira?
43. Simplifique as expressões: a) $y = \frac{senx}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{senx}$. b) $\frac{1}{cossec(x)(1+\cos x)} + cossec(x)(1+\cos x)$. c) $\frac{sen^3 x - \cos^3 x}{sen\, x - \cos x}$. d) $(\cos^2 x)(tg^2 x + 1)$. e) $\cos^4 x - sen^4 x$. f) $\frac{cossec(x)+\cos(x)}{\sec(x)+sen(x)}$. g) $\frac{sen(x+y)}{\cos(x)\cos(y)}$.
44. Mostre que $sen(a+b) \cdot sen(a-b) = sen^2 a - sen^2 b$.
45. Qual é o valor máximo assumido pela função $f(x) = sen(x)\cos(x)$? Para que valores de *x* esta função assume esse valor máximo?
46. Determine o coeficiente angular da reta *r* que passa pelos pontos (0,2) e (5,1). A seguir determine a equação da reta *r*.
47. A reta $2x + 3y = 5$, ao interceptar os dois eixos coordenados, forma com este um triângulo retângulo. Calcule a medida da hipotenusa desse triângulo.
48. Obtenha o ponto de interseção entre as retas $r: 2x + 5y - 9 = 0$ e $s: y = -2x - 3$.
49. Determine, em cada caso, a equação reduzida da circunferência de centro *C* e raio *r*: a) $C(-1,2), r = 1$. b) $C(-2,-3), r = 4$. c) $C(0,0), r = 11$. d) $C(2,1), r = \sqrt{2}$.
50. Determine *a* e *b* em $p(x) = -3x^4 + ax^3 - 5x^2 + bx - 2$, sabendo que 1 é raiz de $p(x)$ e que $p(2) = -80$.
51. Sabendo que $x = -3$ é raiz do polinômio $p(x) = 2x^3 + mx^2 - 5x + 3$, determine o valor de *m*.
52. Determine o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, em cada caso, sendo: a) $f(x) = (x-4)^2$ e $g(x) = x - 3$. b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 1$ e $g(x) = x + 1$. c) $f(x) = -2x^5 + x^4 - 6x^3 + 2x + 4$ e $g(x) = x - 2$.

<u>Gabarito:</u> **1.** a)$5{,}2\times10^{-5}$ b) $2{,}31\times10^{1}$ c) $1{,}0\times10^{-8}$ d) $9{,}2387109\times10^{5}$. **2.** a) não. b) racional, -0,4. **3.** a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{16}{9}$ c) $\frac{20}{11}$ d) $\frac{4097}{3300}$. **4.** a) 90 b) 50. **5.** a) -6 b) 1 c) $\frac{6}{5}$. **6.** $15\sqrt{\pi}/8$. **7.** R$7.000,00. **8.** a) $(-\infty,\frac{9}{2}]$ b) $(-\infty,-2]$ c) $(-\infty,\frac{51}{113}]$ **9.** *n*=40. **10.** a) ∄ b) 0 e $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ e 2 d) $\{\frac{3}{2}, 5{,}2\}$ e){-11,11}. **11.** a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{3}{2}$. **12.** m=-5. **13.** a) mínimo:$(-\frac{5}{4},-\frac{25}{8})$ b) mínimo:(1,0) c) máximo:(2,12) d) máximo:$(\frac{4}{3},\frac{7}{18})$. **14.** a) 1990 a 2001 b) a partir de 2012. **15.** f(1)=3/10. **16.** a) 8 b) 6 c) 2. **17.** a) $s = 65 + \sqrt{\frac{43p+7{,}5}{8}}$ b) 68 centenas. **18.** g(x)=2x-3. **19.** a) 7 b) $5 - 2\sqrt{6}$ c) 3 d) $\sqrt[6]{32}$ e) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ f) $\frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{6}$ g) $\frac{14-7\sqrt{3}}{3}$. **20.** 2^{30} células. **21.** 3 anos. **22.** a) 60.000,00 b) 48.600,00 c) 5 anos **23.** a) R$60.000,00 b) R$48.600,00 c) 5 anos. **24.** a) a=3.000 e b=$\frac{3}{2}$ b) 6.000 c) 7 dias. **25.** **26.** $\frac{82}{9}$. **26.** a) 1-k b) $\frac{2k}{3}$ c) k+3 d) 3k+1. **27.** a) a+b b) b-a c) $\frac{3}{5}a + \frac{2}{5}b$ d) a+2b+1. **28.** a) 19 b) 3 c) $\{-\frac{1}{2}, 5\}$ d) $\{\frac{1}{4}, 256\}$ e) $\frac{1}{8}$ f) {1,10}. **29.** $4\sqrt{2}cm$ **30.** $\sqrt{21}cm$ e $2\sqrt{7}cm$ **31.** 2,0m **32.** $\frac{10}{2\pi}$ m **33.** $\frac{\sqrt{13}}{4}$; aproximadamente 64°. **35.** $\frac{4}{3}$. **36.** aproximadamente 35°. **37.** 84m **38.** $6 + 3\sqrt{3}$. **39.** 10° ou 350°. **40.** **41.** $\frac{5}{3}$. **42.** 3,4m. **43.** a) 2cossec x b) 2cossec x c) 1+sen x cos x d) 1 e) 2cos²x – 1 f) cotg x g) tg x + tg y. **45.** $\frac{1}{2}$; $x \in \mathbb{R} | x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **46.** $a = -\frac{1}{5}$; $r: y = -\frac{x}{5} + 2$. **47.** $\frac{5\sqrt{13}}{6}$. **48.** (-3,3). **49.** a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ b) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 16$ c) $x^2 + y^2 = 121$d) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$. **50.** a=-5 e b=15. **51.** 4. **52.** a) 1 b) -8 c) -88.

Avaliação 2: Cálculo diferencial.

1. Determine a derivada primeira ($f^{(1)}(x)$) até a derivada quinta ($f^{(5)}(x)$) de: $f(x) = 5x^{10} - 6x^5 - 27x + 4$.

2. Diferencie em relação a variável ***x*** as funções a seguir:

a) $f(x) = (8x^3 - 2x^2 + x - 7)^5$. b) $s(x) = \left(\frac{3x+4}{6x-7}\right)^3$. c) $g(x) = \frac{x}{(x^2-1)^4}$.

3. Se uma caixa de base quadrada deve ter um volume de 10 m^3, determine as dimensões que exigem menor quantidade de material (desprezar a espessura e a perda de material).

4. Determine as dimensões do retângulo de área máxima que pode ser inscrito num triângulo equilátero de lado a, com dois vértices sobre um dos lados do triângulo.

05. Encontre, usando o cálculo diferencial, as dimensões do retângulo de menor perímetro cuja área é de 450 centímetros quadrados.

06. Uma caixa de papelão com base quadrada e *sem tampa* é feita de 648 centímetros quadrados de papelão. Determine, usando o cálculo diferencial, as dimensões da caixa de tal modo que seu volume seja máximo.

07. Uma caixa de papelão com base quadrada e *sem tampa* é feita numa folha de $20cm \times 20cm$ de papelão. *(a)* Determine, usando o cálculo diferencial, as dimensões (altura, largura e profundidade) da caixa de tal modo que seu volume seja máximo. *(b)* Determine também qual é este volume máximo. Sabe-se que o volume da caixa é dado pelo produto da área da base vezes a altura.

08. Determinar um triângulo retangular de área máxima cuja hipotenusa é **h**. *Resposta: cada cateto tem* $h/\sqrt{2}$.

09. Achar dois números positivos cuja soma seja 20 e *(a)* seu produto seja máximo, *(b)* a soma dos quadrados seja mínima, *(c)* o produto do quadrado de um deles pelo cubo do outro seja máximo. *Respostas: (a) 10, 10; (b) 10, 10; (c) 8, 12.*

10. A área de uma superfície retangular é 18 m^2. Sabendo que em seu interior há outra superfície tal que as margens superiores e inferiores são de ¾ m e que as margens laterais são de ½ m, achar as dimensões da superfície exterior para que área compreendida entre as margens seja máxima. *Resposta:* $2\sqrt{3}m$ *e* $3\sqrt{3}m$.