Universidade Federal do Paraná

Professor José Renato Ramos Barbosa

Notas de Aulas - CM043

I Semestre - 2023

Conteúdo

Capítulo 1

Teoria de I ordem

Objetivo do curso

Estudar *equações diferenciais ordinárias (edos)*, bem como *séries de funções*, *transformadas de laplace* e *teoria qualitativa*, para aplicá-las nas *edos*.

O que é uma edo?

Uma *equação diferencial ordinária (edo)* é uma equação que relaciona uma função incógnita, digamos $x(t)$ ou $y(t)$, com algumas de suas derivadas. Determinar que funções satisfazem uma *edo* significa obter suas *soluções*.

Exemplo

Seja

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0. \tag{1.1}$$

Por um lado, escrevendo (1.1) como $1 \cdot x''(t) = -x$, se pensarmos na derivada de segunda ordem (em relação a t) como a aceleração a de uma partícula no instante t, $m = 1$ como uma massa unitária e o simétrico aditivo da função incógnita como uma força F, resistiva ao movimento, temos $F = ma$.[1] Por outro, $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ são soluções dessa *edo*, isto é, satisfazem a equação (1.1). Na verdade, *combinações lineares* dessas duas funções trigonométricas, ou seja,

$$x = \mathrm{cte}_1 \cos t + \mathrm{cte}_2 \operatorname{sen} t,$$

são soluções de (1.1), onde cte_1 e cte_2 são constantes numéricas.[2]

Técnicas de resolução

Além de resoluções analíticas, existem ainda resoluções numéricas, que estão fora do escopo dessas notas, e qualitativas, que estudaremos posteriormente.

[1] *Segunda lei de Newton*.
[2] Verifique!

DOMÍNIO DAS SOLUÇÕES

É importate observar o domínio máximo da solução de uma *edo*. Em geral, esse domínio é um conjunto *aberto* da reta real, isto é, um intervalo aberto ou uma união de intervalos abertos.

EXEMPLO

No exemplo anterior, o domínio das soluções é $\mathbb{R}$, isto é, o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE (TEU)

O problema de valor inicial (pvi)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) & \textit{(edo)} \\ x(t_0) = x_0 & \textit{(condição inicial)} \end{cases}$$

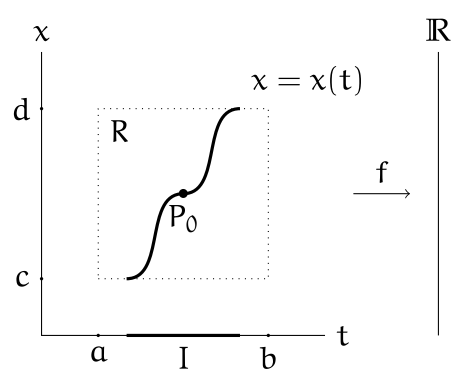
admite uma única solução $x = x(t)$ *num intervalo aberto* I *contendo* t_0*, caso* f *e* f_x *sejam contínuas num retângulo aberto*

$$R = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a < t < b \textit{ e } c < x < d\right\}$$

contendo $P_0 = (t_0, x_0)$ *com* $I \subset (a, b)$.

Para uma representação geométrica do TEU, considere a figura 1.1.

Figura 1.1: TEU



1.1 Edo linear de primeira ordem

Sejam $a, b : I \to \mathbb{R}$ contínuas, onde I é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, e o *pvi*

$$\begin{cases} x' = ax + b; & \textit{(edo)} \\ x(t_0) = x_0. & \textit{(condição inicial)} \end{cases}$$

Pelo TEU, considerando $f(t,x) = a(t)x + b(t)$, tal *pvi* admite uma única solução.

Vamos considerar os seguintes casos:

I. $\boxed{a \text{ é a função nula.}}$

Neste caso, temos a seguinte SOLUÇÃO GERAL, via integração simples:

$$\frac{dx}{dt} = b(t) \Longrightarrow \int \frac{dx}{dt}dt = \int b(t)dt$$
$$\Longrightarrow x(t) = \int b(t)dt + \text{cte}.$$

EXEMPLOS

1. $\begin{cases} x' = \cos t; \\ x(0) = 0. \end{cases}$

   Por um lado, a solução geral é dada por

$$x(t) = \int \cos t\,dt + \text{cte}$$
$$= \operatorname{sen} t + \text{cte}.$$

   Por outro lado, pela condição inicial,

$$0 = x(0) = \operatorname{sen} 0 + \text{cte} \Longrightarrow \text{cte} = 0.$$

   Portanto, $x(t) = \operatorname{sen} t$ é a solução de tal *pvi*.[3]

2. $\begin{cases} x' = \frac{1}{t}; \\ x(1) = 0. \end{cases}$

   Por um lado, a solução geral é dada por

$$x(t) = \int \frac{1}{t}dt + \text{cte}$$
$$= \ln|t| + \text{cte}.$$

   Por outro lado, pela condição inicial,

$$0 = x(1) = \ln|1| + \text{cte} \Longrightarrow \text{cte} = 0.$$

   Portanto, $x(t) = \ln t$ é a solução desse *pvi* com $I = (0, \infty)$.

II. $\boxed{b \text{ é a função nula.}}$

[3]Note que $I = \mathbb{R}$.

Nesse caso, a seguinte resolução fornece a solução geral:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} = a(t)x &\Longrightarrow \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a(t)\\
&\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left[\ln|x(t)|\right] = a(t)\\
&\Longrightarrow \int \frac{d}{dt}\left[\ln|x(t)|\right] dt = \int a(t)dt\\
&\Longrightarrow \ln|x(t)| = \int a(t)dt + cte_1\\
&\Longrightarrow e^{\ln|x(t)|} = e^{\int a(t)dt} \cdot e^{cte_1}\\
&\Longrightarrow |x(t)| = cte_2\, e^{\int a(t)dt}\\
&\Longrightarrow x(t) = cte\, e^{\int a(t)dt}.
\end{aligned}$$

De cima para baixo, a primeira implicação assume que x não se anula; a segunda usa a *regra da cadeia*; a última considera cte como sendo qualquer uma das constantes $\pm cte_2$.

EXEMPLOS

1. $x' = \frac{t}{1+t^2}\,x$.
   Se $u = 1 + t^2$, a solução geral segue de

   $$\begin{aligned}
   x(t) &= cte\, e^{\int \frac{t}{1+t^2}\, dt}\\
   &= cte\, e^{\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du}\\
   &= cte\, e^{\ln\sqrt{1+t^2}}\\
   &= cte\sqrt{1+t^2}.
   \end{aligned}$$

   Derivando $x = cte\left(1+t^2\right)^{1/2}$ em relação a t, podemos obter a *edo* desse exemplo. De fato:

   $$\begin{aligned}
   x' &= cte \cdot 2t \cdot \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)^{-1/2}\\
   &= cte\, t\left(1+t^2\right)^{-1+\frac{1}{2}}\\
   &= t \cdot \frac{1}{1+t^2} \cdot cte\left(1+t^2\right)^{1/2}\\
   &= \frac{t}{1+t^2}\,x.
   \end{aligned}$$

   Obviamente, uma cte (e portanto uma solução particular) é obtida se considerarmos um *pvi* composto de tal *edo* e de uma condição inicial.

2. Seja

   $$\begin{cases} x' = 2tx;\\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Por um lado, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{cte}\, e^{\int 2t dt} \\ &= \text{cte}\, e^{t^2}. \end{aligned}$$

Por outro, como

$$1 = x(0) = \text{cte}\, e^{0^2} \Longrightarrow \text{cte} = 1,$$

a solução do *pvi* é $x = e^{t^2}$.[4]

III. $\boxed{a \text{ e } b \text{ podem não ser identicamente nulas}}$

Nesse caso, sendo

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds, \tag{1.2}$$

a solução do *pvi* é dada por

$$x = e^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\, ds \right). \tag{1.3}$$

Primeiramente, note que, as soluções de I e II são casos particulares da equação (1.3). Além disso, em relação à equação (1.2), note que,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} a(s) ds &= A(t) \\ &= A(t) - 0 \\ &= A(t) - A(t_0) \\ &= A(s)\Big|_{s=t_0}^{s=t}, \end{aligned}$$

ou seja, A é a primitiva, isto é, a integral, de a, variando de t_0 até t.
Para demonstrar (1.3), como $\frac{dA}{dt} = a(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[e^{-A(t)} x\right] &= e^{-A(t)} x' - a(t) e^{-A(t)} x \\ &= e^{-A(t)} \left[x' - a(t) x\right] \\ &= e^{-A(t)} b(t), \end{aligned}$$

onde usamos a hipótese $x' - ax = b$. Assim, integrando de t_0 até t, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\left[e^{-A(s)} x\right] ds = \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\, ds &\Longrightarrow e^{-A(t)} x - e^{-A(t_0)} x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\, ds \\ &\Longrightarrow e^{-A(t)} x = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\, ds \\ &\Longrightarrow x = e^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\, ds \right). \end{aligned}$$

[4] Note que $I = \mathbb{R}$.

Embora a formúla (1.3) possa ser usada para obter a solução do caso III, em vez de memorizá-la, apresentaremos a técnica do *fator integrante*, com a qual podemos reobter (1.3) e, concomitantemente, obter um processo de resolução.

O objetivo aqui é escrever o primeiro membro da equação

$$x' - a(t)x = b(t) \tag{1.4}$$

como a derivada de um produto, para podermos utilizar o caso I. Assim, multiplicando a equação (1.4) por $\mu(t) \neq 0$, temos

$$\mu(t)x' - a(t)\mu(t)x = \mu(t)b(t), \tag{1.5}$$

onde estamos supondo que $\mu' = -a\mu$. Nesse caso, pelo caso III,

$$\mu = \text{cte}_1\, e^{\int(-a(t))dt}.$$

Aqui, sem perda de generalidade, considere $\text{cte}_1 = 1$. Agora, voltando à equação (1.5), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mu x) = \mu b &\Longrightarrow \int \frac{d}{dt}(\mu x)dt = \int \mu b dt \\
&\Longrightarrow \mu x = \int \mu b dt + \text{cte} \\
&\Longrightarrow x = \mu^{-1}\left(\text{cte} + \int \mu(t)b(t)dt\right).
\end{aligned}$$

Portanto, utilizando alguma condição inicial $x(t_0) = x_0$, obtemos (1.3).

EXEMPLO

Seja

$$\begin{cases} tx' = -x + t^2; \\ x(1) = x_0. \end{cases}$$

Para $t \neq 0$, a *edo* pode ser escrita como

$$x' + \frac{1}{t}x = t,$$

que, via o fator integrante

$$\begin{aligned}
\mu &= e^{\int \frac{1}{t}\, dt} \\
&= e^{\ln t} \\
&= t,
\end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mu x) = \mu t &\Longrightarrow \frac{d}{dt}(tx) = t^2 \\
&\Longrightarrow tx = \frac{t^3}{3} + \text{cte}.
\end{aligned}$$

Agora, como cte $= x_0 - \frac{1}{3}$ pela condição inicial, temos

$$x = \frac{t^2}{3} + \frac{x_0 - \frac{1}{3}}{t}.$$

Além disso, considerando tanto o cálculo da condição inicial, quanto o de μ, $I = (0, \infty)$.

1.2 Edo não-linear de primeira ordem

Sendo $f(t,x)$ como no TEU, estudaremos tal *edo* dos seguintes tipos:

I. SEPARÁVEL

$f(t,x) = \frac{g(t)}{h(x)}$, onde g e $h \neq 0$ são contínuas. Além disso, h admite uma primitiva H invertível, isto é, existe H com inversa H^{-1} tal que $\frac{dH}{dx} = h$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} = \frac{g(t)}{h(x)} &\Longrightarrow h(x)\frac{dx}{dt} = g(t) \\
&\Longrightarrow \frac{dH}{dx}\frac{dx}{dt} = g(t) \\
&\Longrightarrow \frac{d}{dt}[H(x(t))] = g(t) \\
&\Longrightarrow H(x(t)) = \int g(t)dt + \text{cte} \\
&\Longrightarrow x(t) = H^{-1}\left(\int g(t)dt + \text{cte}\right),
\end{aligned}$$

onde cte pode ser obtida pela condição inicial de um *pvi*. Além disso, note que, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* na terceira implicação e uma integração em t na quarta.

EXEMPLOS

1. $\begin{cases} x' = 1 + x^2; \\ x(0) = 0. \end{cases}$

   Como

   $$x' = \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}},$$

   temos $g(t) = 1$ e $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ satisfazendo as condições exigidas para essas funções. Portanto,

   $$\begin{aligned}
   \frac{1}{1+x^2}\frac{dx}{dt} = 1 &\Longrightarrow \frac{d}{dt}[\arctan x(t))] = 1 \\
   &\Longrightarrow \arctan x(t) = \int 1\, dt + \text{cte} \\
   &\Longrightarrow x(t) = \tan(t + \text{cte}).
   \end{aligned}$$

Nas duas primeiras implicações, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* e uma integração em t, respectivamente.
Aqui, a cte é obtida via

$$\begin{aligned} x(0) = 0 &\Longrightarrow \tan(0 + \text{cte}) = 0 \\ &\Longrightarrow \text{cte} = \arctan 0 \\ &\Longrightarrow \text{cte} = 0. \end{aligned}$$

Assim, $x = \tan t$, $t \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,[5] é a solução desse *pvi*.

2. $x' = \frac{t^2}{x^2}$.
Analogamente à resolução do exemplo anterior, temos

$$\begin{aligned} x^2 \frac{dx}{dt} = t^2 &\Longrightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{x(t)^3}{3}\right] = t^2 \\ &\Longrightarrow \frac{x(t)^3}{3} = \frac{t^3}{3} + \text{cte}_1 \\ &\Longrightarrow x(t) = \sqrt[3]{t^3 + \text{cte}}, \end{aligned}$$

onde $\text{cte} = 3\,\text{cte}_1$. Note que, nas duas primeiras implicações, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* e uma integração em t, respectivamente.
O domínio I de $x(t)$ é $\mathbb{R}$?
Conforme o TEU, x' deve ser contínua. Portanto, como

$$x'(t) = 3t^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\left(t^3 + \text{cte}\right)^2}} \to \infty$$

quando $t \to -\sqrt[3]{\text{cte}}$, temos uma assíntota vertical em $t = -\sqrt[3]{\text{cte}}$. Assim, I é igual a $\left(-\infty, -\sqrt[3]{\text{cte}}\right)$ ou a $\left(-\sqrt[3]{\text{cte}}, \infty\right)$.

3. $xx' = -t$, $x > 0$.
Analogamente aos dois exemplos anteriores, temos

$$\begin{aligned} x \frac{dx}{dt} = -t &\Longrightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{x(t)^2}{2}\right] = -t \\ &\Longrightarrow \frac{x(t)^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + \text{cte}_1 \\ &\Longrightarrow x(t) = \sqrt{\text{cte} - t^2}, \end{aligned}$$

onde $\text{cte} = 2\,\text{cte}_1$. Nas duas primeiras implicações, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* e uma integração em t, respectivamente. Na última, consideramos $x > 0$.
Para o domínio I de $x(t)$, note que, $t^2 \leq \text{cte}$. Na verdade, como $x \neq 0$, $t^2 < \text{cte}$, ou seja, $t \in \left(-\sqrt{\text{cte}}, \sqrt{\text{cte}}\right)$. I também pode ser obtido, observando que

$$x(t)^2 + t^2 = \left(\sqrt{\text{cte}}\right)^2$$

é a equação da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{\text{cte}}$. Assim, o domínio de x é dado por $I = \left(-\sqrt{\text{cte}}, \sqrt{\text{cte}}\right)$.

[5] Embora o domínio mais geral de uma função tan seja $\mathbb{R} - \left\{\pm\frac{(2n-1)\pi}{2} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$, como solução desse *pvi*, seu domínio é o maior intervalo aberto que contenha $t_0 = 0$.

II. EXATA

$f(t,x) = -\frac{M(t,x)}{N(t,x)}$, ou seja, a *edo* pode ser escrita da forma

$$M(t,x) + N(t,x)\frac{dx}{dt} = 0, \tag{1.6}$$

e existe alguma função $F(t,x)$ com $F_t = M$ e $F_x = N$ contínuas. Portanto, pela equação (1.6),

$$F_t + F_x x' = 0,$$

isto é, temos o produto interno nulo dado por

$$(F_t, F_x) \cdot \left(1, x'\right) = 0,$$

ou seja, pela *regra da cadeia*, temos

$$\frac{d}{dt}\left(F(t,x(t))\right) = 0,$$

isto é,

$$F(t,x) = \text{cte}$$

é uma solução *implícita* da *edo*, para qualquer constante cte.
Como saber se uma *edo* da forma $M + Nx' = 0$ é exata?
Em sendo exata, temos, via "cálculo II",

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial x} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} \\ &= \frac{\partial N}{\partial t},\end{aligned}$$

num conjunto *aberto* de $\mathbb{R}^2$,[6] ainda que "suficientemente pequeno", caso F tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas nesse *aberto*. Logo,

$$M_x = N_t$$

é uma condição necessária para que a *edo* seja exata, para M e N com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto *aberto* de $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLOS

1. $\left(2tx - 3t^2\right) + \left(t^2 - 2x\right)\frac{dx}{dt} = 0$.
   Como $M = 2tx - 3t^2$ e $N = t^2 - 2x$, temos

$$M_x = 2t = N_t.$$

[6]Busque, no Google, informações sobre conjuntos *abertos*.

Logo, se $F_t = M$, então

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \int M(t,x)dt \\ &= \int \left(2tx - 3t^2\right) dt \\ &= t^2x - t^3 + g(x), \end{aligned}$$

onde $g(x)$ é constante como resultado dessa integração em t. Portanto, se $F_x = N$, então

$$\begin{aligned} t^2 + \frac{dg}{dx} = t^2 - 2x &\Longrightarrow g(x) = -2\int x dx \\ &\Longrightarrow g(x) = -x^2 - cte \\ &\Longrightarrow F(t,x) = t^2x - t^3 - x^2 - cte \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\big(F(t,x(t))\big) = 0 \Longleftrightarrow \left(2tx - 3t^2\right) + \left(t^2 - 2x\right)x' = 0.$$

2. $\begin{cases} \left(\cos t - t \operatorname{sen} t + x^2\right) + 2tx\,\frac{dx}{dt} = 0; \\ x(\pi) = 1. \end{cases}$

Por um lado, como $M = \cos t - t \operatorname{sen} t + x^2$ e $N = 2tx$, temos

$$M_x = 2x = N_t.$$

Portanto, se $F_x = N$, então

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \int N(t,x)dx \\ &= \int 2tx dx \\ &= tx^2 + h(t), \end{aligned}$$

onde $h(t)$ é constante como resultado dessa integração em x. Assim, se $F_t = M$, então

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{dh}{dt} = \cos t - t \operatorname{sen} t + x^2 &\Longrightarrow h(t) = \int \cos t dx - \int t \operatorname{sen} t\, dt \\ &\Longrightarrow h(t) = \operatorname{sen} t + cte_1 - (-t\cos t + \operatorname{sen} t + cte_2) \\ &\Longrightarrow h(t) = t\cos t + cte \\ &\Longrightarrow F(t,x) = tx^2 + t\cos t + cte, \end{aligned}$$

onde $cte = cte_1 - cte_2$, e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\big(F(t,x(t))\big) = 0 \Longleftrightarrow \left(\cos t - t \operatorname{sen} t + x^2\right) + 2txx' = 0.$$

Agora, usando a condição inicial, temos $(\pi)(1)^2 + (\pi)\cos(\pi) = cte$, isto é, $cte = 0$. Logo, a solução implícita do *pvi* é

$$tx^2 + t\cos t = 0.$$

Note que, para $t \neq 0$, como $x(\pi) = 1$,

$$x(t) = \sqrt{-\cos t}$$

tem domínio dado por $I = (\pi/2, 3\pi/2)$.

SEPARÁVEL É EXATA

Qualquer *edo* separável $x' = \frac{g(t)}{h(x)}$, isto é,

$$-g(t) + h(x)\,\frac{dx}{dt} = 0,$$

é exata. De fato,

$$M(t,x) = -g(t) \text{ e } N(t,x) = h(x) \Longrightarrow M_x = 0 = N_t.$$

EXERCÍCIO

Em sendo possível, resolva os exemplos dados para as equações separáveis,[7] considerando, agora, essas equações como exatas.

III. BERNOULLI

Nesse tipo de *edo*,

$$f(t,x) = -p(t)x + q(t)x^n,$$

onde $p, q : I \to \mathbb{R}$ são contínuas, I é um intervalo real e $n \in \mathbb{R}$ é constante. Assim, pelo TEU, o *pvi* associado tem solução (única). Agora, como $f(t,x)$ é linear para $n \in \{0,1\}$, considere $n \notin \{0,1\}$. Assim, se $y = x^{1-n}$, sua derivada em relação a t é dada por $y' = (1-n)x^{-n}x'$. Então,

$$\begin{aligned} x' + p(t)x = q(t)x^n &\Longrightarrow x^{-n}x' + p(t)x^{1-n} = q(t) \\ &\Longrightarrow \left(\frac{1}{1-n}\right) y' + p(t)y = q(t), \end{aligned}$$

que é linear.

EXEMPLOS

1. $\begin{cases} x' + \frac{4}{t}\,x = t^3x^2; \\ \quad x(2) = -1. \end{cases}$

[7] Item i. anterior.

Como $n = 2$, $y = x^{1-n} = x^{-1}$, cuja derivada em relação a t é $y' = -x^{-2}x'$. Logo,

$$\begin{aligned}
x' + \frac{4}{t}x = t^3x^2 &\Longrightarrow x^{-2}x' + \frac{4}{t}x^{-1} = t^3 \\
&\Longrightarrow -y' + \frac{4}{t}y = t^3 \\
&\Longrightarrow y' - \frac{4}{t}y = -t^3 \\
&\Longrightarrow \left(t^{-4}y\right)' = -t^{-1} \\
&\Longrightarrow t^{-4}y = -\int \frac{1}{t}\,dt \\
&\Longrightarrow y = t^4\left(\ln\frac{1}{t} + \text{cte}\right) \\
&\Longrightarrow x = \frac{1}{t^4\left(\ln\frac{1}{t} + \text{cte}\right)}.
\end{aligned}$$

Na quarta implicação, de cima para baixo, usamos o fator integrante

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= e^{\int(-4/t)dt} \\
&= e^{-4\ln t} \\
&= t^{-4}.
\end{aligned}$$

Na segunda igualdade, $\ln|t| = \ln t$, pela condição inicial, pois $t_0 = 2$ não pode ser ponto do domínio de $\ln(-t)$. Na verdade, isso também garante que o domínio de $x(t)$ só pode ter pontos $t > 0$. Agora, pela condição inicial, temos

$$-1 = \frac{1}{2^4(\ln(1/2) + \text{cte})} \Longrightarrow \text{cte} = \ln 2 - \frac{1}{16}.$$

Portanto, a solução do *pvi* é dada por

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{t^4\left(\ln\frac{1}{t} + \ln 2 - \frac{1}{6}\right)} \\
&= \frac{1}{t^4\left(\ln\frac{2}{t} - \frac{1}{16}\right)},
\end{aligned}$$

cujo domínio, como $t > 0$ e

$$\begin{aligned}
\ln\frac{2}{t} - \frac{1}{16} = 0 &\Longrightarrow \ln\frac{2}{t} = \frac{1}{16} \\
&\Longrightarrow \frac{2}{t} = e^{1/16} \\
&\Longrightarrow t = 2e^{-1/16},
\end{aligned}$$

é dado por $\left(2e^{-1/16}, \infty\right)$.[8]

[8]A outra possibilidade para o domínio de $x(t)$, $\left(0, 2e^{-1/16}\right)$, é descartada pela condição inicial.

2. $\begin{cases} x' = 5x + e^{-2t}x^{-2}; \\ x(0) = 2. \end{cases}$

Como $n = -2$, $y = x^{1-n} = x^3$, cuja derivada em relação a t é $y' = 3x^2x'$. Temos, portanto,

$$\begin{aligned} x' - 5x = e^{-2t}x^{-2} &\Longrightarrow x^2x' - 5x^3 = e^{-2t} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{3}y' - 5y = e^{-2t} \\ &\Longrightarrow y' - 15y = 3e^{-2t} \\ &\Longrightarrow \left(e^{-15t}y\right)' = 3e^{-17t} \\ &\Longrightarrow e^{-15t}y = 3\int e^{-17t}dt \\ &\Longrightarrow e^{-15t}y = -\frac{3}{17}e^{-17t} + \text{cte} \\ &\Longrightarrow y = e^{15t}\text{cte} - \frac{3}{17}e^{-2t} \\ &\Longrightarrow x = \left(e^{15t}\text{cte} - \frac{3}{17}e^{-2t}\right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Na quarta implicação, de cima para baixo, usamos o fator integrante

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int(-15)dt} \\ &= e^{-15t}. \end{aligned}$$

Agora, pela condição inicial, temos

$$2 = \left(e^0\text{cte} - \frac{3}{17}e^0\right)^{1/3} \Longrightarrow \text{cte} = \frac{139}{17}.$$

Temos, então, a solução

$$x = \sqrt[3]{\frac{139e^{15t} - 3e^{-2t}}{17}}$$

para o *pvi*, com domínio dado por $I = \mathbb{R}$.

IV. HOMOGÊNEA

Para esse tipo de *edo*, $f(t,x) = F\left(\frac{x}{t}\right)$ e

$$\begin{aligned} v = \frac{x}{t} &\Longrightarrow x = tv \text{ e } x' = F(v) \\ &\Longrightarrow v + tv' = x' = F(v) \\ &\Longrightarrow tv' = F(v) - v \\ &\Longrightarrow \frac{1}{F(v) - v}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{t}, \end{aligned}$$

que é uma *edo* separável. Além disso, note que, nenhuma solução $x = x(t)$ pode interceptar o eixo vertical $t = 0$.

EXEMPLO

$$\begin{cases} txx' + 4t^2 + x^2 = 0; \\ x(2) = -7. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{t}x' = -4 - \left(\frac{x}{t}\right)^2 &\Longrightarrow vx' = -4 - v^2 \\ &\Longrightarrow v(v + tv') = -4 - v^2 \\ &\Longrightarrow vtv' = -4 - 2v^2 \\ &\Longrightarrow t\frac{dv}{dt} = -\frac{4 + 2v^2}{v} \\ &\Longrightarrow \frac{v}{4 + 2v^2}dv = -\frac{1}{t}dt \\ &\Longrightarrow \frac{1}{4}\ln\left(4 + 2v^2\right) = -\ln t + cte_1 \\ &\Longrightarrow \left(4 + 2v^2\right)^{1/4} = cte_2\,\frac{1}{t} \\ &\Longrightarrow 4 + 2v^2 = \frac{cte}{t^4} \\ &\Longrightarrow v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{cte}{t^4} - 4\right) \\ &\Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2}t^2\left(\frac{cte - 4t^4}{t^4}\right). \end{aligned}$$

Na sexta implicação, de cima para baixo, a condição inicial $t_0 = 2$ elimina a possibilidade do uso de $\ln(-t)$ e indica que o domínio de $x(t)$ só contêm $t > 0$. Ainda, pela condição inicial, temos

$$(-7)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2\left(\frac{cte - 4 \cdot 2^4}{2^4}\right) \Longrightarrow cte = 456.$$

Portanto, como $x_0 = -7$ e $t > 0$, temos

$$x = -\sqrt{\frac{228 - 2t^4}{t^2}},$$

onde

$$\begin{aligned} 228 - 2t^4 \geq 0 &\Longrightarrow t^4 \leq 114 \\ &\Longrightarrow 0 < t \leq \sqrt[4]{114}. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Teoria de II ordem - equação característica

Uma *edo linear de segunda ordem* é dada por

$$a(t)\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x(t) = d(t), \tag{2.1}$$

onde as funções reais a, b, c e d são contínuas num intervalo I, $a \neq 0$ e qualquer *solução* de (2.1), ou seja, qualquer função duas vezes diferenciável $x(t)$ que satisfaça a equação (2.1), também é contínua em I.

LEI DE NEWTON

Considerando x'', x' e x como a aceleração, a velocidade e a posição de um objeto de massa unitária m no instante t, respectivamente, e uma força

$$F(t, x, x') = -\frac{b}{a}x' - \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$$

atuando nesse objeto, a *edo* (2.1), reescrita como

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

representa a *segunda lei de Newton*.

2.1 Edo linear de II ordem homogênea

A *edo* (2.1) é dita *homogênea* se $d(t) = 0$ para cada $t \in I$, ou seja,

$$a(t)\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x(t) = 0. \tag{2.2}$$

EXEMPLO

$x'' + x' - 6x = 0$ é homogênea, com $a(t) = b(t) = 1$ e $c(t) = -6$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

2.1.1 Linearidade das soluções

Combinações lineares de soluções da equação (2.2) também são soluções dela, isto é, se x_1 e x_2 satisfazem (2.2), então

$$x = cte_1 x_1 + cte_2 x_2 \tag{2.3}$$

também a satisfaz.

De fato, Se

$$ax_1'' + bx_1' + cx_1 = 0 \text{ e } ax_2'' + bx_2' + cx_2 = 0,$$

então, pela *linearidade* das derivadas do "cálculo 1",

$$\begin{aligned} ax'' + bx' + cx &= a(cte_1 x_1 + cte_2 x_2)'' + b(cte_1 x_1 + cte_2 x_2)' + c(cte_1 x_1 + cte_2 x_2) \\ &= cte_1\big(ax_1'' + bx_1' + cx_1\big) + cte_2\big(ax_2'' + bx_2' + cx_2\big) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, x também satisfaz (2.2).

2.1.2 LD e LI

Duas funções são ditas LD quando são múltiplas escalares uma da outra. Caso contrário, são ditas LI.

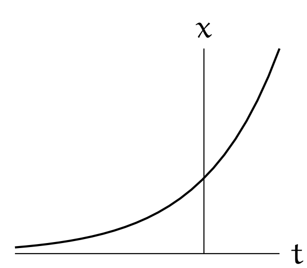
EXEMPLOS

1. $x_1(t) = t^2$ e $x_2(t) = \frac{t^2}{2}$ são LD pois $x_1 = 2x_2$.
2. $x_1 = e^t$ e $x_2 = te^t$ são LI. De fato, supondo serem LD, existe uma constante α tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_1 = \alpha x_2 &\Longrightarrow e^t = \alpha t e^t \\ &\Longrightarrow (\alpha t - 1)e^t = 0 \\ &\Longrightarrow \alpha t = 1, \end{aligned}$$

que não é uma proposição verdadeira para, por exemplo, $t = 0$.
Note que, a terceira implicação, de cima para baixo, segue de $e^t \neq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, conforme a figura 2.1.

Figura 2.1: A reta $x = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $x = e^t$



Portanto, para quaisquer $r, t \in \mathbb{R}$, com r fixo e t variável,

$$e^{rt} = \left(e^{t}\right)^{r} \neq 0$$

e, analogamente, e^{rt} e te^{rt} são LI.

2.1.3 Solução geral

Via *álgebra linear*, demonstra-se que, se x_1 e x_2 são soluções LI da equação (2.2), página 19, então qualquer outra solução dessa equação é dada por (2.3), página 20.

Agora, sejam a, b, c e $r \neq 0$ constantes e suponha que $x(t) = e^{rt}$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Portanto, via (2.2), temos, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 &\iff \left(ar^2 + br + c\right)e^{rt} = 0 \\ &\iff ar^2 + br + c = 0, \end{aligned}$$

chamada de *equação característica* de (2.2), com raízes dadas por

$$r_{\pm} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Analisaremos os seguintes casos:

I. $\boxed{b^2 - 4ac > 0}$

Nesse caso, $r_{\pm}$ são reais e distintas e $x_{\pm}(t) = e^{r_{\pm}t}$ são soluções LI de (2.2).[1] Portanto, simplificando a notação dos índices via $\{+, -\} = \{1, 2\}$,

$$x(t) = \mathrm{cte}_1 e^{r_1 t} + \mathrm{cte}_2 e^{r_2 t}$$

é a solução geral de (2.2), conforme (2.3).

EXEMPLOS

1. Para $x'' + x' - 6x = 0$, como $a = b = 1$ e $c = -6$, $r^2 + r - 6 = 0$. Portanto, como $r \in \{-3, 2\}$,
$$x(t) = \mathrm{cte}_1 e^{2t} + \mathrm{cte}_2 e^{-3t}$$
é a solução geral de $x'' + x' - 6x = 0$.
2. Para $3x'' + x' - x = 0$, como $a = 3$ e $b = 1$ e $c = -1$, $3r^2 + r - 1 = 0$. Portanto, como
$$r \in \left\{\frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}, \right\},$$

[1] De fato, supondo serem LD, existe alguma constante α tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{r_+ t} = \alpha e^{r_- t} \iff e^{(r_+ - r_+)t} = \alpha,$$

que não é uma proposição verdadeira pois, como $r_+ - r_- \neq 0$, a exponencial do primeiro membro assume infinitos valores, enquanto α, no segundo membro, é constante.

$$x(t) = cte_1 e^{\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{6}\right)t} + cte_2 e^{\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right)t}$$

é a solução geral de $3x'' + x' - x = 0$.

II. $\boxed{b^2 - 4ac = 0}$

Nesse caso, r_- e r_+ são raízes reais e iguais a

$$r = -\frac{b}{2a} \tag{2.4}$$

e $x_1(t) = e^{rt}$, $t \in \mathbb{R}$, é solução de (2.2), página 19.
Verificaremos, agora, que $x_2(t) = te^{rt}$, $t \in \mathbb{R}$, também satisfaz (2.2). De fato,

$$\begin{aligned} ax_2'' + bx_2' + cx_2 &= a\left(2re^{rt} + r^2te^{rt}\right) + b\left(e^{rt} + rte^{rt}\right) + cte^{rt} \\ &= e^{rt}(2ar + b) + te^{rt}\left(ar^2 + br + c\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois (2.4) é raiz da equação $ar^2 + br + c = 0$. Por fim, como x_1 e x_2 são LI,[2]

$$x(t) = cte_1 e^{rt} + cte_2 te^{rt}$$

é a solução geral de (2.2).

EXEMPLO

Para $4x'' + 12x' + 9x = 0$, como $a = 4$, $b = 12$ e $c = 9$, $4r^2 + 12r + 9 = 0$. Portanto, como $r = -\frac{3}{2}$,

$$x(t) = cte_1 e^{-3t/2} + cte_2 te^{-3t/2}$$

é a solução geral de $4x'' + 12x' + 9x = 0$.

III. $\boxed{b^2 - 4ac < 0}$

Nesse caso, para obter a solução geral, precisamos de algumas propriedades das *exponenciais complexas*,[3] inclusive da *fórmula de Euler*, dada por

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \tag{2.5}$$

onde o quadrado da *unidade imaginária* é igual ao número real -1, ou seja, $i \in \mathbb{C}$ e

$$i^2 = -1 \in \mathbb{R}.$$

Além disso, as raízes da equação característica são dadas por

$$r_\pm = \alpha \pm i\beta,$$

[2] Conforme demonstrado na subseção 2.1.2.

[3] Tal assunto é parte importante de um curso de *variáveis complexas* e, para uma rápida revisão do conjunto $\mathbb{C}$ dos *números complexos*, confira meu livro, LIÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR, disponibilizado em www.ufpr.br/~jrrb.

onde
$$\alpha = -\frac{b}{2a} \text{ e } \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a},$$
e, analogamente ao caso I, página 21, $x_\pm = e^{r_\pm t}$ são soluções LI de (2.2), página 19, acarretando que
$$x(t) = \text{cte}_1 e^{r_1 t} + \text{cte}_2 e^{r_2 t}$$
é a solução geral de (2.2) em $\mathbb{C}$.[4] Assim, pelas propriedades supracitadas e via (2.5), a solução geral de (2.2) em $\mathbb{R}$ é dada por:
$$\begin{aligned}
x(t) &= \text{cte}_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + \text{cte}_2 e^{(\alpha-i\beta)t}\\
&= \text{cte}_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} + \text{cte}_2 e^{\alpha t} e^{-i\beta t}\\
&= e^{\alpha t}\left(\text{cte}_1 e^{i\beta t} + \text{cte}_2 e^{-i\beta t}\right)\\
&= e^{\alpha t}(\text{cte}_1(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) + \text{cte}_2(\cos\beta t - i\operatorname{sen}\beta t))\\
&= e^{\alpha t}((\text{cte}_1 + \text{cte}_2)\cos\beta t + i\,(\text{cte}_1 - \text{cte}_2)\operatorname{sen}\beta t)\\
&= e^{\alpha t}(\text{cte}_{\text{I}}\cos\beta t + \text{cte}_{\text{II}}\operatorname{sen}\beta t)\,,
\end{aligned}$$
onde $\text{cte}_{\text{I}} = \text{cte}_1 + \text{cte}_2$ e $\text{cte}_{\text{II}} = i(\text{cte}_1 - \text{cte}_2)$, e, como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, podemos considerar constantes cte_{I} e cte_{II} reais.

EXEMPLO

Para $x'' - 6x' + 13x = 0$, como $a = 1$, $b = -6$ e $c = 13$, $r^2 - 6r + 13 = 0$. Portanto, como $r_\pm = 3 \pm 2i$, ou seja, $\alpha = 3$ e $\beta = 2$,
$$x(t) = e^{3t}(\text{cte}_{\text{I}}\cos 2t + \text{cte}_{\text{II}}\operatorname{sen} 2t)$$
é a solução geral de $x'' - 6x' + 13x = 0$.

EXISTÊNCIA E UNICIDADE PARA UMA EDO LINEAR DE II ORDEM

Assim como para as equações de I ordem do capítulo 1, existe uma única solução para o seguinte *pvi*:
$$\begin{cases} a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x &= 0;\\ x(t_0) &= x_0;\\ x'(t_0) &= y_0. \end{cases}$$
Note que, juntamente com (2.2), temos, agora, duas condições iniciais: "posição e velocidade em $t = t_0$ unidades de tempo."

EXEMPLOS

[4]Como no caso I supracitado, para simplificar a notação dos índices, denotamos
$$\{-,+\} = \{1,2\}.$$

1.
$$\begin{cases} x'' + x' - 6x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

A solução geral da *edo*, conforme o caso I da subseção 2.1.3, página 21, é dada por

$$x(t) = \text{cte}_1\, e^{2t} + \text{cte}_2\, e^{-3t},\ t \in \mathbb{R}.$$

Essa solução, juntamente com

$$x'(t) = 2\,\text{cte}_1\, e^{2t} - 3\,\text{cte}_2\, e^{-3t},\ t \in \mathbb{R},$$

e as condições iniciais do *pvi*, determinam cte_1 e cte_2. De fato, de

$$\begin{cases} \text{cte}_1 + \text{cte}_2 & = & x(0) & = & 1, \\ 2\,\text{cte}_1 - 3\,\text{cte}_2 & = & x'(0) & = & 1, \end{cases}$$

temos $\text{cte}_1 = \frac{3}{5}$ e $\text{cte}_2 = \frac{2}{5}$. Portanto, a solução do *pvi* é dada por

$$x(t) = \frac{3}{5}\, e^{2t} + \frac{2}{5}\, e^{-3t},\ t \in \mathbb{R}.$$

2. SISTEMA MASSA-MOLA SEM FORÇAMENTO[5]

$$\begin{cases} x'' + x = 0; \\ x(0) = 2; \\ x'(0) = 3. \end{cases}$$

Como $r^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow r = \pm i$, a solução geral da *edo* é dada por

$$x(t) = \text{cte}_{\text{I}} \cos t + \text{cte}_{\text{II}} \operatorname{sen} t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Essa solução, juntamente com

$$x'(t) = -\text{cte}_{\text{I}} \operatorname{sen} t + \text{cte}_{\text{II}} \cos t,\ t \in \mathbb{R},$$

e as condições iniciais do *pvi*, determinam cte_{I} e cte_{II}. De fato, como

$$\begin{cases} \text{cte}_{\text{I}} & = & x(0) & = & 2, \\ \text{cte}_{\text{II}} & = & x'(0) & = & 3, \end{cases}$$

a solução do *pvi* é dada por

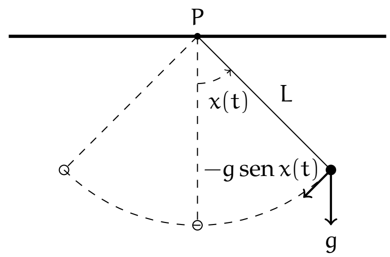
$$x(t) = 2 \cos t + 3 \operatorname{sen} t,\ t \in \mathbb{R}.$$

3. PÊNDULO SIMPLES

Conforme a figura 2.2, considere um pêndulo oscilando livremente, sem sofrer resistência do ar, em torno de um ponto fixo P, onde não há atrito. O pêndulo é formado

[5] Na figura 4.2, página 78, está ilustrado um sistema massa-mola com forçamento.

Figura 2.2: Pêndulo simples



por uma haste rígida de massa desprezível, medindo L unidades de comprimento, conectada a uma massa unitária puntiforme, fixada na extremidade oposta a P, e oscila sob a ação da aceleração da gravidade g. Seja $x(t)$ a *amplitude* do pêndulo, ou seja, o ângulo entre o pêndulo e a sua posição vertical de repouso.[6] Assim, a força atuando sobre a massa supracitada é dada por

$$-g\operatorname{sen} x(t).$$

O *período* T é o tempo necessário para o pêndulo completar um *ciclo*, isto é, uma oscilação para a esquerda seguida de uma para a direita. Para oscilações "suficientemente pequenas", temos $\operatorname{sen} x(t) \approx x(t)$, ou seja,

$$-g\operatorname{sen} x(t) \approx -gx(t),$$

e

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$[7]

Pela *segunda lei de Newton*, como esse movimento oscilatório depende apenas de g e L, temos a *edo*

$$Lx'' + g\operatorname{sen} x(t) = 0,$$

que, para oscilações "suficientemente pequenas", pode ser escrita como

$$Lx'' + gx = 0,$$

ou seja,

$$x'' + \frac{g}{L}x = 0,$$

com solução geral dada por

$$x(t) = \mathrm{cte}_{\mathrm{I}}\cos\left(\left(\sqrt{g/L}\right)t\right) + \mathrm{cte}_{\mathrm{II}}\operatorname{sen}\left(\left(\sqrt{g/L}\right)t\right),\ t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, para condições iniciais x_0 "suficientemente pequenas", podemos considerar o *pvi*

$$\begin{cases} x'' + \frac{g}{L}x = 0; \\ x(T) = x_0; \\ x'(T) = 0. \end{cases}$$

[6] Caso houvesse atrito e/ou resistência do ar, a amplitude diminuiria com o tempo, até que o movimento oscilatório cessasse na posição de repouso do pêndulo.

[7] Pesquise no *Google*!

Utilizando a solução geral supracitada, juntamente com as condições iniciais desse *pvi*, temos

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \mathrm{cte_I}\cos\left(T\sqrt{g/L}\right) & + & \mathrm{cte_{II}}\,\mathrm{sen}\left(T\sqrt{g/L}\right) & = & x_0; \\ \sqrt{g/L}\left(-\mathrm{cte_I}\,\mathrm{sen}\left(T\sqrt{g/L}\right)\right) & + & \sqrt{g/L}\left(\mathrm{cte_{II}}\cos\left(T\sqrt{g/L}\right)\right) & = & 0, \text{ ou seja,} \\ -\mathrm{cte_I}\,\mathrm{sen}\left(T\sqrt{g/L}\right) & + & \mathrm{cte_{II}}\cos\left(T\sqrt{g/L}\right) & = & 0. \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.6) por $\cos\left(T\sqrt{g/L}\right)$, a última por $-\mathrm{sen}\left(T\sqrt{g/L}\right)$, e, somando as equações obtidas dessas multiplicações, obtemos

$$\mathrm{cte_I} = x_0 \cos\left(T\sqrt{g/L}\right).$$

Substituindo essa constante na última equação de (2.6), temos

$$-x_0\,\mathrm{sen}\left(T\sqrt{g/L}\right) + \mathrm{cte_{II}} = 0.$$

Assim, a solução geral do *pvi* é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0\left(\cos\left(T\sqrt{g/L}\right)\cos\left(\left(\sqrt{g/L}\right)t\right) + \mathrm{sen}\left(T\sqrt{g/L}\right)\,\mathrm{sen}\left(\left(\sqrt{g/L}\right)t\right)\right) \\ &= x_0\cos\left((T-t)\sqrt{g/L}\right). \end{aligned}$$

2.2 Edo linear de II ordem não homogênea

Tal *edo* é dada por (2.1),[8] agora com $d \neq 0$.

SOLUÇÃO GERAL

Se x_h é a solução geral da edo homogênea associada à edo (2.1), isto é, solução geral de (2.2),[9] e x_p é uma solução particular de (2.1), então

$$x = x_h + x_p \tag{2.7}$$

é a solução geral de (2.1).

De fato,

$$\begin{aligned} ax'' + bx' + cx &= a(x_h + x_p)'' + b(x_h + x_p)' + c(x_h + x_p) \\ &= a\left(x_h'' + x_p''\right) + b\left(x_h' + x_p'\right) + c(x_h + x_p) \\ &= ax_h'' + bx_h' + cx_h + ax_p'' + bx_p' + cx_p \\ &= 0 + d \\ &= d. \end{aligned}$$

[8] Cf. página 19.

[9] Idem.

SENDO a, b E c CONSTANTES, COMO OBTER x_p?

Considere, por exemplo, $a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$, ou seja,

$$x'' - 3x' + 2x = d,$$

e $d(t)$ dada por uma das seguintes funções:

1. e^{3t};
2. $2t^2 + 4t + 1$;
3. $\cos t$;
4. $e^{3t} + 2t^2 + 4t + 1 + \cos t$.

Para cada d, como

$$\begin{aligned} x'' - 3x' + 2x = 0 &\iff r^2 - 3r + 2 = 0 \\ &\iff r \in \{1, 2\}, \end{aligned}$$

a solução geral é dada por (2.7), com

$$x_h = \text{cte}_1 e^t + \text{cte}_2 e^{2t}.$$

Agora, para determinar a solução particular x_p, dependendo da d considerada, usaremos o método seguinte:

2.2.1 Método dos coeficientes indeterminados, ou, a serem determinados

Nesse método, testamos "candidatas" para x_p, conforme o tipo de função d dada.

1. Para $d(t) = e^{3t}$, testaremos $x_p = Ae^{3t}$,[10] onde A é o coeficiente a ser determinado. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_p'' - 3x_p' + 2x_p = e^{3t} &\Longrightarrow \left(Ae^{3t}\right)'' - 3\left(Ae^{3t}\right)' + 2Ae^{3t} = e^{3t} \\ &\Longrightarrow 9Ae^{3t} - 3\left(3Ae^{3t}\right) + 2Ae^{3t} = e^{3t} \\ &\Longrightarrow (2A - 1)e^{3t} = 0. \end{aligned}$$

   Então, $2A - 1 = 0$, ou seja, $A = \frac{1}{2}$. Portanto, a solução geral de $x'' - 3x' + 2x = e^{3t}$ é dada por

$$x = \text{cte}_1 e^t + \text{cte}_2 e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}, \ t \in \mathbb{R}.$$

[10] Por quê?

2. Para $d(t) = 2t^2 + 4t + 1$, testaremos $x_p = At^2 + Bt + C$,[11] onde A, B e C são os coeficientes a serem determinados. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_p'' - 3x_p' + 2x_p = 2t^2 + 4t + 1 &\Longrightarrow \left(At^2 + Bt + C\right)'' - 3\left(At^2 + Bt + C\right)' \\ &\qquad + 2\left(At^2 + Bt + C\right) = 2t^2 + 4t + 1 \\ &\Longrightarrow 2A - 3(2At + B) + 2At^2 + 2Bt + 2C = 2t^2 + 4t + 1 \\ &\Longrightarrow (2A - 2)t^2 + (-6A + 2B - 4)t \\ &\qquad + 2A - 3B + 2C - 1 = 0. \end{aligned}$$

Então, $2A = 2$, $-6A + 2B = 4$ e $2A - 3B + 2C = 1$,[12] ou seja, $A = 1$, $B = 5$ e $C = 7$. Portanto, a solução geral de $x'' - 3x' + 2x = 2t^2 + 4t + 1$ é dada por

$$x = cte_1 e^t + cte_2 e^{2t} + t^2 + 5t + 7,\ t \in \mathbb{R}.$$

3. Para $d(t) = \cos t$, testaremos $x_p = A\cos t + B \operatorname{sen} t$,[13] onde A e B são os coeficientes a serem determinados. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_p'' - 3x_p' + 2x_p = \cos t &\Longrightarrow (A\cos t + B\operatorname{sen} t)'' - 3(A\cos t + B\operatorname{sen} t)' \\ &\qquad + 2(A\cos t + B\operatorname{sen} t) = \cos t \\ &\Longrightarrow -A\cos t - B\operatorname{sen} t - 3(-A\operatorname{sen} t + B\cos t) \\ &\qquad + 2A\cos t + 2B\operatorname{sen} t = \cos t \\ &\Longrightarrow (A - 3B - 1)\cos t + (3A + B)\operatorname{sen} t = 0. \end{aligned}$$

Então, $A - 3B = 1$ e $3A + B = 0$,[14] ou seja, $A = \frac{1}{10}$ e $B = -\frac{3}{10}$. Portanto, a solução geral de $x'' - 3x' + 2x = \cos t$ é dada por

$$x = cte_1 e^t + cte_2 e^{2t} + \frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\operatorname{sen} t,\ t \in \mathbb{R}.$$

4. Analogamente aos itens 1, 2 e 3 anteriores, para $d(t) = e^{3t} + 2t^2 + 4t + 1 + \cos t$, a "candidata" para solução particular pode ser escrita como

$$x_p = Ae^{3t} + Bt^2 + Ct + D + E\cos t + F\operatorname{sen} t.$$

Contudo, a resolução do sistema nas variáveis A, B, C, D, E e F, fica como exercício.[15]

[11] Idem.
[12] Idem.
[13] Idem.
[14] Idem.
[15] Resolvendo o sistema supracitado, obtemos

$$A = \frac{1}{2},\ B = 1,\ C = 5,\ D = 7,\ E = \frac{1}{10} \text{ e } F = -\frac{3}{10}.$$

Portanto, a solução particular (do item 4) é a soma das soluções particulares obtidas nos itens 1, 2 e 3 anteriores.

EXEMPLO

Considere a *edo*

$$x'' - 6x' + 9x = e^{3t}. \tag{2.8}$$

Assim, como

$$\begin{aligned} x'' - 6x' + 9x = 0 &\iff r^2 - 6r + 9 = 0 \\ &\iff r = 3, \end{aligned}$$

a solução da equação homogênea associada a (2.8) é dada por

$$x_h = cte_1 e^{3t} + cte_2 te^{3t}.$$

Agora, escolhendo $x_p = Ae^{3t}$ como "candidata" a solução particular de (2.8), temos, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_p'' - 6x_p' + 9x_p = e^{3t} &\implies 9Ae^{3t} - 6\left(3Ae^{3t}\right) + 9Ae^{3t} = e^{3t} \\ &\implies (9 - 18 + 9 - 1)e^{3t} = 0 \\ &\implies e^{3t} = 0, \end{aligned}$$

que é uma igualdade inválida. Tentaremos, então,

$$x_p(t) = y(t)e^{3t},$$

onde y é uma função a ser determinada. Logo, para cada t admissível,

$$\begin{aligned} x_p'' - 6x_p' + 9x_p = e^{3t} &\implies (y'' + 6y' + 9y)e^{3t} - 6(y' + 3y)e^{3t} + 9ye^{3t} = e^{3t} \\ &\implies (y'' - 1)e^{3t} = 0 \\ &\implies y'' = 1 \\ &\implies y'(t) = t + cte_3 \\ &\implies y(t) = \frac{t^2}{2} + cte_3 t + cte_4. \end{aligned}$$

Para uma solução particular, considere $cte_i = 0$, $i = 3, 4$. Portanto, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$x_p(t) = \frac{t^2}{2} e^{3t}. \tag{2.9}$$

Agora, estudaremos outro método para obter a solução particular, que também funciona caso $d(t)$ admita termos que não sejam exponenciais, polinomiais ou trigonométricos.

2.2.2 Método de variação de parâmetros

WRONSKIANO DE $x_1(t)$ E $x_2(t)$

É definido como o determinante

$$W(t) := \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam diferenciáveis.

EXEMPLO

Para cada $t \in \mathbb{R}$, se $x_1(t) = e^{3t}$ e $x_2(t) = te^{3t}$, então

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t} + 3te^{3t} \end{vmatrix} \\ &= e^{3t}\left(e^{3t} + te^{3t}\right) - te^{3t}e^{3t} \\ &= e^{6t}. \end{aligned}$$

FÓRMULA DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Se x_1 e x_2 são soluções li da equação homogênea (2.2), página 19, e $W(t)$ é o wronskiano dessas funções, pode ser demonstrado que

$$x_p(t) = x_1(t)\left(\int \frac{x_2(t)(-d(t))}{a(t)W(t)}\,dt\right) + x_2(t)\left(\int \frac{x_1(t)d(t)}{a(t)W(t)}\,dt\right)$$

é uma solução particular de (2.1), página 19.

EXEMPLOS

1. Para a *edo* (2.8), página 29, vimos que,

$$x(t) = cte_1 e^{3t} + cte_2 te^{3t} + x_p(t)$$

   é a sua solução geral e x_p é uma de suas soluções particulares. Como $a(t) = 1$ e, pelo exemplo anterior, $W(t) = e^{6t}$, temos

$$\begin{aligned} x_p(t) &= e^{3t}\left(\int \frac{te^{3t}\left(-e^{3t}\right)}{e^{6t}}\,dt\right) + te^{3t}\left(\int \frac{e^{3t}e^{3t}}{e^{6t}}\,dt\right) \\ &= e^{3t}\left(-\int t\,dt\right) + te^{3t}\left(\int 1\,dt\right) \\ &= e^{3t}\left(-\frac{t^2}{2}\right) + te^{3t}t \\ &= \frac{t^2}{2}e^{3t}, \end{aligned}$$

   coincidindo com (2.9), página 29.

2. Para a *edo*

$$x'' + x = \sec t,$$

   como $r^2 + 1 = 0$, isto é, $r = \pm i$, ou seja, $r = 0 \pm 1 \cdot i$,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{0\cdot t}\left(cte_I \cos(1\cdot t) + cte_{II}\,\mathrm{sen}\,(1\cdot t)\right) + x_p(t) \\ &= cte_I \cos t + cte_{II}\,\mathrm{sen}\,t + x_p(t) \end{aligned}$$

é a sua solução geral e x_p é uma de suas soluções particulares. Como $a(t) = 1$ e $W(t) = 1$,[16] temos

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \cos t \left(\int \operatorname{sen} t \, (-\sec t) \, dt \right) + \operatorname{sen} t \left(\int \cos t \, \sec t \, dt \right) \\ &= \cos t \left(\int (-\tan t) \, dt \right) + \operatorname{sen} t \left(\int 1 \, dt \right) \\ &= \cos t \, \ln |\cos t| + t \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade, utilizamos $\sec t = \frac{1}{\cos t}$. Na última, de cima para baixo, utilizamos

$$\begin{aligned} \int (-\tan t) \, dt &= \int \frac{(-\operatorname{sen} t)}{\cos t} \, dt \qquad (u = \cos t \Longrightarrow du = -\operatorname{sen} t \, dt) \\ &= \int \frac{1}{u} \, du \\ &= \ln |u| + \text{cte} \\ &= \ln |\cos t| + \text{cte}. \end{aligned}$$

Para uma solução particular, considere cte $= 0$.

[16] Verifique!

Capítulo 3

Teoria de II ordem - séries de Taylor

3.1 Séries numéricas

Seja $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ uma sequência numérica. A expressão

$$a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.1}$$

é uma *série* associada à sequência supracitada. Nesse caso,

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

é a n-*ésima soma parcial* dessa série.

EXEMPLO

Para a *progressão geométrica (pg)*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \tag{3.2}$$

temos as seguintes somas parciais:

$$s_1 = \frac{1}{2} = 0,5, \;\; s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,75, \;\; s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0,875, \;\; \ldots$$

OBSERVAÇÃO

O primeiro índice de uma série pode ser algum inteiro não-negativo $n_0 \neq 1$. Nesse caso, podemos representá-la por

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

EXEMPLO

Acrescentando o número 1 a (3.2), temos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Retirando o número 1/2 de (3.2), temos

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cdots=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

3.1.1 Convergência ou divergência

Suponha que a sequência

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots)$$

de somas parciais converge para o número s, isto é, existe o limite dessa sequência e tal limite é igual a s. Nesse caso, dizemos que a série $a_1 + a_2 + \cdots$ *converge (para s)* e denotamos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &:= \lim_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} s_n\\ &= s.\end{aligned}$$

Caso não exista tal s, $a_1 + a_2 + \cdots$ é dita *divergente*.

EXEMPLO

Considere a *pg*

$$\left(a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, aq^n, \ldots\right)$$

com razão $q \neq 0$ e primeiro termo $a_1 = a \neq 0$.[1] Temos, então, os seguintes casos:

DIVERGÊNCIA PARA $|q| \geq 1$

Nesse caso, temos os seguintes subcasos:

$\boxed{q = 1}$ Aqui, as somas parciais são dadas por

$$s_1 = a_1 = a,\ \ s_2 = a_1 + a_2 = 2a,\ \ \ldots,\ \ s_n = a_1 + \cdots + a_n = na,\ \ \ldots$$

Portanto,

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + \cdots &= \lim_{n\to\infty} na\\ &= \begin{cases} \infty \text{ se } a > 0;\\ -\infty \text{ se } a < 0.\end{cases}\end{aligned}$$

[1] Assim, o n-ésimo termo é $a_n = aq^{n-1}$.

$\boxed{q = -1}$ Aqui, as somas parciais são dadas por

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = a, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = a + a_2 = a - a = 0, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 0 + a_3 = a, \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a + a_4 = a - a = 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$s_n = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Obviamente, essa sequência diverge.

$\boxed{|q| > 1}$ Por um lado, como

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1},$$

temos

$$qs_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Assim, da diferença $s_n - qs_n$, temos

$$(1-q)s_n = a\,(1-q^n)\,.$$

Logo, como $q \neq 1$,

$$s_n = \frac{a\,(1-q^n)}{1-q}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a + aq + aq^2 + \cdots &= \lim_{n\to\infty} s_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a\,(1-q^n)}{1-q} \end{aligned} \tag{3.3}$$

é divergente. De fato, $|q^n|$ pode assumir valores tão grandes quanto se queira.

CONVERGÊNCIA PARA $|q| < 1$

Nesse caso, como

$$\lim_{n\to\infty} (1-q^n) = 1,$$

$$a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}, \tag{3.4}$$

por (3.3).

EXEMPLO

Para os dois primeiros exemplos desse capítulo, temos, via (3.4),

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}} = 1, \; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \text{ e } \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1/4}{1-\frac{1}{2}} = 1/2.$$

Podemos, ainda, utilizar esse exemplo para ilustrar o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 1

A convergência/divergência da série (3.1), página 33, não é alterada pela exclusão de um número finito de seus termos e nem pela inclusão de um número finito de outros termos.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 1

Seja σ_k a soma de k termos da série (3.1). Assim, se $s_{n,k} = s_n - \sigma_k$, $n = 1, 2, \ldots$, a existência de $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n,k}$ é equivalente a existência de $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

PROPOSIÇÃO 2

Considere α *constante e um número* s *tal que* $a_1 + a_2 + \cdots = s$. *Assim,*

$$\begin{aligned} \alpha a_1 + \alpha a_2 + \cdots &= \alpha s \\ &= \alpha\,(a_1 + a_2 + \cdots\,)\,. \end{aligned}$$

EXEMPLO

Pelo exemplo anterior, temos

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + \cdots &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \\ &= 2 \\ &= 2 \cdot 1 \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right). \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 2

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\right) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ &= \alpha s. \end{aligned}$$

Proposição 3

Sejam s e S números tais que $a_1 + a_2 + \cdots = s$ *e* $A_1 + A_2 + \cdots = S$. *Então,*

$$\begin{aligned} a_1 + A_1 + a_2 + A_2 + \cdots &= s + S \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots) + (A_1 + A_2 + \cdots). \end{aligned}$$

Exemplo

Note que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \\ &= 1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Demonstração da proposição 3

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + A_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + A_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} A_i \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \\ &= s + S. \end{aligned}$$

Proposição 4

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Portanto, se* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \cdots$$

diverge pois

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{2n+1}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\\ &= \frac{1}{2}\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4

Se $S_1 = 0$ e $S_n = s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Portanto, por um lado, existe um (único) número igualando esse limite comum pois $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Por outro,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(s_n - S_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} S_n\\ &= 0.\end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 5

A recíproca da proposição 4 não é verdadeira, ou seja, é possível que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *seja divergente.*

EXEMPLO

Embora $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, a *série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \tag{3.5}$$

diverge. De fato, como

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \qquad \text{etc,}$$

(3.5) não pode ser maior que a série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots,$$

que é divergente.

PROPOSIÇÃO 6

Considere $0 \leq a_n \leq A_n$ *para cada índice* $n \geq n_0$. *Assim,* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *converge se* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} A_n$ *converge.*

EXEMPLO

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

converge. De fato, como $(1/n)^n \leq (1/2)^n$ para cada inteiro $n > 1$, temos

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2}.$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 6

Como $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n$ converge, existe um número S tal que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=n_0}^{\infty} A_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n} A_i. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Além disso, para cada índice $n \geq n_0$, como $0 \leq a_n \leq A_n$, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq s_n &= a_1 + \cdots + a_n \\ &\leq A_1 + \cdots + A_n := S_n \\ &\leq S, \end{aligned}$$

por (3.6) e pela monotonicidade da sequência $(S_{n_0}, S_{n_0+1}, \ldots)$.[2] Portanto, a sequência crescente $(s_{n_0}, s_{n_0+1}, \ldots)$ também é limitada. Assim, existe um número s tal que

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n\to\infty} s_n \\ &= \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 7

Considere $0 \leq A_n \leq a_n$ *para cada índice* $n \geq n_0$. *Assim,* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *diverge se* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} A_n$ *diverge.*

[2]Essa sequência é crescente.

EXEMPLO

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$ diverge. De fato, $1/n \leq 1/\sqrt{n}$, para cada inteiro positivo n, e a série (3.5) diverge.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 7

Suponha que $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge. Logo, pela proposição 6, $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} A_n$ converge.

PROPOSIÇÃO 8: TESTE DA RAZÃO (RESPECTIVAMENTE, RAIZ)

Sejam $a_n > 0$ *para todo índice* $n \geq n_0$ *e* L *um número tal que*

$$\lim_{n\to} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \qquad \textit{(respectivamente, } \lim_{n\to} \sqrt[n]{a_n} = L).$$

Então,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \begin{cases} \textit{converge se } L < 1; \\ \textit{diverge se } L > 1; \\ \textit{pode convergir ou divergir se } L = 1. \end{cases}$$

EXEMPLOS

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ converge. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1/(n+1)!}{1/n!} \\ &= \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{n!}{(n+1)n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \to 0 \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots$ diverge. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} \\ &= \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 2 \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \cdots$ converge. De fato,

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}\\ &= \frac{n}{2n+1}\\ &= \frac{1}{\frac{2n+1}{n}}\\ &= \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots$ converge ou diverge?
Aqui, o teste da razão é inconclusivo. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}\\ &= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\\ &= \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\\ &= \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}\\ &= \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} \to 1\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{n}{n+1}\\ &= \frac{1}{\frac{n+1}{n}}\\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Então, pela proposição 4, a série é divergente.
Outro modo de verificar que a série diverge, utilizando a proposição 4, é observar que, para cada inteiro positivo n, $a_n = \frac{n}{n+1} < 1$ e

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\\ &= 1 + \frac{1}{n^2+2n}\\ &> 1,\end{aligned}$$

isto é, $a_{n+1} > a_n$. Assim, como

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots < 1$$

é uma sequência de termos positivos, estritamente crescente e limitada superiormente por 1, existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n \in (0, 1].$$

Portanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ diverge, pela proposição 4.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots$ converge ou diverge?
Aqui, o teste da razão é inconclusivo. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} \\ &= \frac{1}{\frac{n+2}{n}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} \to 1 \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Por outro lado, como, para cada inteiro positivo n,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \\ &= 1, \end{aligned}$$

isto é, a série converge para 1.

PROPOSIÇÃO 9: TESTE DE LEIBNIZ

Considerem válidas as seguintes condições:

1. $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots > 0;$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *converge para um número no intervalo* $(0, a_1]$*, isto é,*

$$0 < a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \leq a_1.$$

EXEMPLO

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ converge para um número em $(0, 1]$. De fato, as duas condições da proposição 9 são satisfeitas para $a_n = \frac{1}{n}$.

3.2 Séries de funções

Considere uma sequência de funções, digamos $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, e um conjunto $I \neq \emptyset$ contido no domínio de todas essas funções.
Note que, para cada $t \in I$,

$$f_1(t) + f_2(t) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

é uma série numérica. Assim, todos os resultados apresentados (para as séries numéricas) permanecem válidos para $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$, para cada $t \in I$. Portanto, caso exista um número $f(t)$, para cada $t \in I$, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = f(t),$$

diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge para* f (*em* I) e denotaremos $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$. Nesse caso, I é dito *domínio de convergência de* f.

3.2.1 Exemplo fundamental: série geométrica

$$\begin{aligned} 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} t^m \\ &= \frac{1}{1-t}, \end{aligned}$$

para $|t| < 1$, isto é, $t \in I = (-1, 1)$.[3] Por outro lado, a série geométrica é divergente para $|t| \geq 1$, ou seja, $t \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.[4]

[3] Na segunda igualdade, utilizamos a mudança de índices $m = n - 1$. Na terceira, de cima para baixo, utilizamos (3.4), página 35.

[4] Cf. (3.3), página 35.

EXEMPLOS

Utilizando a série geométrica, podemos obter representações em série de funções e I para:

1. $g(t) = \frac{1}{1+t^3}$;
2. $h(t) = \frac{2t^3}{1+t^3}$;
3. $\varphi(t) = \frac{t}{5-t}$;
4. $\phi(t) = \frac{t^2}{t-5}$.

De fato:

1. Se $u = -t^3$, então

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{1-(-t^3)} \\ &= \frac{1}{1-u} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{3n} \\ &= 1 - t^3 + t^6 - t^9 + \cdots, \end{aligned}$$

para $t \in I = (-1, 1)$.[5]

2.

$$\begin{aligned} h(t) &= 2t^3 g(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n t^{3(n+1)} \\ &= 2t^3 - 2t^6 + 2t^9 - 2t^{12} + \cdots, \end{aligned}$$

para $t \in I = (-1, 1)$.[6]

---

[5]

$$\begin{aligned} |t| < 1 &\Longrightarrow |t|^3 < 1 \\ &\Longrightarrow \left|t^3\right| < 1 \\ &\Longrightarrow |-1|\left|t^3\right| < 1 \\ &\Longrightarrow \left|-t^3\right| < 1 \\ &\Longrightarrow |u| < 1. \end{aligned}$$

[6] Por definição, o domínio de convergência de h é igual ao de g.

3. Se $\nu = \frac{t}{5}$, temos

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{t}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{5}}\\ &= \nu\cdot\frac{1}{1-\nu}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\nu^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{5}\right)^{n+1}\\ &= \frac{t}{5}+\frac{t^2}{25}+\frac{t^3}{75}+\cdots,\end{aligned}$$

para $t \in I = (-5, 5)$.[7]

4.

$$\begin{aligned}\phi(t) &= -t\varphi(t)\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+2}}{5^{n+1}}\\ &= -\frac{t^2}{5}-\frac{t^3}{25}-\frac{t^4}{75}+\cdots,\end{aligned}$$

para $t \in I = (-5, 5)$.[8]

3.2.2 Definição de convergência absoluta

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge absolutamente* (*em* I), isto é, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ *converge absolutamente, para todo* $t \in I$, quando $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n|$ converge (em I).

EXEMPLO

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nt}{2^n}$ converge absolutamente, para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, como, para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$,

$$|\operatorname{sen} nt| \leq 1 \Longrightarrow \left|\frac{\operatorname{sen} nt}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n},$$

7

$$\begin{aligned}|t| < 5 &\Longrightarrow \left|\frac{t}{5}\right| < 1\\ &\Longrightarrow |\nu| < 1.\end{aligned}$$

8 Por definição, o domínio de convergência de ϕ é igual ao de φ.

e $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ converge,

$$\left|\frac{\operatorname{sen} t}{2}\right| + \left|\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right| + \cdots$$

converge, para todo $t \in \mathbb{R}$, pela proposição 6 da seção 3.1.

Pode ser demonstrado que convergência absoluta implica em convergência.[9] Contudo, a recíproca não é verdadeira.

EXEMPLO

No último exemplo da seção 3.1, vimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 1/n$ converge. Contudo, a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} 1/n\right|$ diverge.[10]

3.3 Séries de potências

Uma série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ é uma *série de potências em torno de* t_0 quando

$$f_n(t) = a_n (t - t_0)^n, \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

isto é, quando a série é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = a_0 + a_1 (t - t_0) + a_2 (t - t_0)^2 + \cdots$$

Nesse caso, I é chamado de *intervalo de convergência* se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = f(t) \; \forall t \in I.$$

EXEMPLO

Para a série geométrica, página 43, temos $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ com $I = (-1, 1)$. Aqui, $f(t) = \frac{1}{1-t}$, $t_0 = 0$ e $a_n = 1$, para cada índice inteiro não negativo n.

OBSERVAÇÃO

Demonstra-se que, *para* $\left|t - t_0\right| < R$, *se*

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n \\ &= a_0 + a_1 (t - t_0) + a_2 (t - t_0)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

[9] Assim, a série do exemplo anterior converge.
[10] Confira (3.5), página 38.

então

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t - t_0)^{n-1} \\
&= a_1 + 2a_2 (t - t_0) + 3a_3 (t - t_0)^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

EXEMPLO

Seja $x(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt}(t^n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} \\
&= 1 + 2t + 3t^2 + \cdots,
\end{aligned}
$$

para cada $t \in (-1, 1)$.

TEOREMA DE CONVERGÊNCIA

Se, para todo $t \in I$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$ *converge, então* I *é, exatamente, um dos seguintes conjuntos:*

1. $\{t_0\}$;
2. $\mathbb{R}$;
3. $(t_0 - R, t_0 + R)$;
4. $[t_0 - R, t_0 + R)$;
5. $(t_0 - R, t_0 + R]$;
6. $[t_0 - R, t_0 + R]$.

Nesse caso, R é dito *raio de convergência* da série de potências e, por abuso de notação, $R = 0$ e $R = \infty$ para as condições 1 e 2, respectivamente.

EXEMPLO

Para a série geométrica, página 43, como $I = (0 - 1, 0 + 1)$, temos $t_0 = 0$ e $R = 1$.

TESTE DA RAZÃO

Considere que:

- $a_n \neq 0$, para $n \geq n_0$;
- $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}\,(t-t_0)^{n+1}}{a_n\,(t-t_0)^n}\right| = |t-t_0| \cdot L.$$

Então, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(t-t_0)^n$*:*

- *converge absolutamente, para* $|t-t_0| < \frac{1}{L}$;
- *diverge, para* $|t-t_0| > \frac{1}{L}$;
- *pode convergir ou divergir, se* $|t-t_0| = \frac{1}{L}$.

Note que, aqui, $R = \frac{1}{L}$.

EXEMPLOS

1. Considere a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n$. Assim, por um lado, como

$$\begin{aligned}\left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)(t-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}n(t-2)^n}\right| &= |-1| \left|\frac{n+1}{n}\right| |t-2| \\ &= |t-2|\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &\to |t-2| \cdot 1\end{aligned}$$

se $n \to \infty$, segue que $L = 1$, $R = 1$ e a série dada converge em $(2-1, 2+1) = (1,3)$ e diverge em $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$. Por outro lado, a série também diverge em $\{1, 3\}$. De fato:

- $t = 1$ acarreta

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} n \\ &= -(1+2+3+4+\cdots);\end{aligned}$$

- $t = 3$ acarreta

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n \\ &= 1-2+3-4+\cdots.\end{aligned}$$

Pela proposição 4, seção 3.1, essas séries numéricas divergem.

Portanto, $I = (1, 3)$.

2. Considere a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n}$. Assim, por um lado, como

$$\begin{aligned} \left|\frac{(t+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{(t+1)^n}\right| &= \left|\frac{t+1}{2}\right| \cdot \left|\frac{n}{n+1}\right| \\ &= \frac{|t+1|}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\ &\to |t+1| \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

se $n \to \infty$, segue que $L = \frac{1}{2}$, $R = 2$ e a série dada converge em $(-1-2, -1+2) = (-3, 1)$ e diverge em $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$. Por outro lado, a série converge para $t = -3$ e diverge para $t = 1$. De fato:

- $t = -3$ acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \end{aligned}$$

que converge, pelo teste de Leibniz;

- $t = 1$ acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

que chamamos de série harmônica e verificamos ser divergente.

Portanto, $I = [-3, 1)$.

3. Considere a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n)!(t-2)^n$. Assim, se $n \to \infty$, então

$$\begin{aligned} \left|\frac{(2(n+1))!(t-2)^{n+1}}{(2n)!(t-2)^n}\right| &= |t-2| \cdot \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\ &= |t-2| \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)((2n)!)}{(2n)!} \\ &= |t-2|(2n+2)(2n+1) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

somente em $t = 2$. Portanto, $I = \{2\}$.

3.4 Séries de Taylor e funções analíticas

Suponha que a função $f(t)$ possa ser representada por uma série de potências em torno de $t = t_0$, isto é, existe $R > 0$ tal que

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n \\ &= a_0 + a_1 (t-t_0) + a_2 (t-t_0)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

para $\left|t-t_0\right| < R$, e existe a n-ésima derivada de $f(t)$ para cada $t \in (t_0 - R, t_0 + R)$ e cada inteiro não negativo n. Então:

- $f(t_0) = a_0 \Longrightarrow a_0 = \frac{f^{(0)}(t_0)}{0!}$;
- Como
$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t-t_0)^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2 (t-t_0) + 3a_3 (t-t_0)^2 + \cdots, \end{aligned}$$
para $\left|t-t_0\right| < R$, segue que
$$f'(t_0) = a_1 \Longrightarrow a_1 = \frac{f^{(1)}(t_0)}{1!};$$
- Como
$$\begin{aligned} f''(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (t-t_0)^{n-2} \\ &= 2a_2 + 6a_3 (t-t_0) + 12 (t-t_0)^2 + \cdots, \end{aligned}$$
para $\left|t-t_0\right| < R$, temos
$$f''(t_0) = 2a_2 \Longrightarrow a_2 = \frac{f^{(2)}(t_0)}{2!};$$
- Como
$$\begin{aligned} f'''(t) &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (t-t_0)^{n-3} \\ &= 6a_3 + 24 (t-t_0) + 60 (t-t_0)^2 + \cdots, \end{aligned}$$
para $\left|t-t_0\right| < R$, temos
$$f'''(t_0) = 6a_3 \Longrightarrow a_3 = \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!};$$

- Repetindo esse procedimento para a n-ésima derivada de f, prova-se (*por indução*) que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!},$$

para cada inteiro não negativo n.

Nesse caso, define-se

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n \\ &= \frac{f(t_0)}{0!} + \frac{f'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

para $\left|t-t_0\right| < R$, como a *série de taylor de* f *em torno de* $t = t_0$ ou, simplesmente, *em* $I = (t_0 - R, t_0 + R)$,[11] e $f(t)$ é dita *analítica em* I.

EXEMPLOS

- Para a série geométrica,[12] $\frac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$, para $|t| < 1$. Podemos confirmar esse resultado, verificando que $f(t) = \frac{1}{1-t}$ é analítica em $I = (-1, 1)$,[13] via:

$$\begin{array}{rclclcl} f(0) &=& \frac{1}{1-0} &=& 1 &=& a_0; \\ f'(0) &=& \frac{1}{(1-0)^2} &=& 1 &=& a_1; \\ \frac{f''(0)}{2} &=& \frac{\frac{2}{(1-0)^3}}{2} &=& 1 &=& a_2; \\ && \vdots && && \end{array}$$

Note que, utilizamos $f'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$, $f''(t) = \frac{2}{(1-t)^3}$, etc.

- $f(t) = e^t$ é analítica em $I = \mathbb{R}$,[14] com

$$\begin{aligned} e^t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

De fato:

$$\begin{array}{rclclcl} f(0) &=& e^0 &=& 1 &=& a_0; \\ f'(0) &=& e^0 &=& 1 &=& a_1; \\ \frac{f''(0)}{2} &=& \frac{e^0}{2} &=& \frac{1}{2} &=& a_2; \\ && && \vdots && \end{array}$$

Note que, utilizamos $f^{(n)}(t) = e^t$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

[11] Se $t = 0$, essa série é chamada *série de maclaurin de* f.
[12] Cf. página 43.
[13] Aqui, $t_0 = 0$ e $R = 1$.
[14] Aqui, $t_0 = 0$ e $R = \infty$.

- $f(t) = \ln(1+t)$ é analítica em $I = (-1, 1)$,[15] com

$$\begin{aligned}\ln(1+t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} \\ &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots\end{aligned}$$

De fato:

$$\begin{array}{ccccccc} f(0) & = & \ln(1+0) & = & 0 & = & a_0; \\ f'(0) & = & \frac{1}{1+0} & = & 1 & = & a_1; \\ \frac{f''(0)}{2} & = & \frac{-\frac{1}{(1+0)^2}}{2} & = & -\frac{1}{2} & = & a_2; \\ \frac{f'''(0)}{3!} & = & \frac{\frac{2}{(1+0)^3}}{2\cdot 3} & = & \frac{1}{3} & = & a_3; \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

Note que, utilizamos $f'(t) = \frac{1}{1+t}$, $f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$, $f'''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$, etc.

EXERCÍCIO

Verifique que as funções seno e cosseno são analíticas em $I = \mathbb{R}$, com

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} t &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\cos t &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO

A analiticidade, em $I = \mathbb{R}$, das funções seno, cosseno e exponencial, pode ser utilizada para demonstrar a *fórmula de Euler*,

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t,$$ [16]

observando que

$$\begin{array}{cccc} i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = -i, \\ i^4 = 1, & i^5 = i, & i^6 = -1, & i^7 = -i, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

[15] Aqui, $t_0 = 0$ e $R = 1$.

[16] Cf. página 22.

3.4.1 Séries de potências e edo

OBSERVAÇÕES

- O índice de uma série é invariante por permutação de letras, ou seja,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f_n &= \sum_{m=0}^{\infty} f_m \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f_i \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j \\ &= \cdots\end{aligned}$$

- A igualdade de duas séries de Taylor em torno de $t_0 = 0$ implica na igualdade dos seus coeficientes de mesmos índices,[17], ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t - t_0)^n = 0 \Longrightarrow a_n = b_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = 0 \Longrightarrow a_n = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.7}$$

- Seja

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t) \tag{3.8}$$

como na página 19, com a, b e c analíticas em $I = (t_0 - R, t_0 + R)$. Assim, demonstra-se que suas soluções também são analíticas em I. Portanto, para obter a solução geral da homogênea associada à (3.8), via séries de Taylor em torno de $t_0 = 0$, considere as seguintes etapas:

  - Assuma que $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ é solução de (3.8);
  - Substitua x, $x' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ e $x'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n t^{n-2}$ em (3.8);
  - Determine a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, utilizando (3.7);
  - Pode ser necessário reindexar alguma série, como em:
    - Para $m = n - 2$,

$$x'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2) a_{m+2} t^m.$$

[17] De fato, basta calcular a derivada de ordem $n = 0, 1, 2, \ldots$ das duas séries.

* Para $m = n+1$,

$$tx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} t^m.$$

EXEMPLOS

1. $x'' + x = 0$.

$$\begin{aligned}
x'' + x = 0 &\Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\
&\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\
&\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + a_n\right] t^n = 0 \\
&\Longrightarrow (n+1)(n+2) a_{n+2} + a_n = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots \\
&\Longrightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, \ n = 0, 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

sendo que, na segunda implicação, de cima para baixo, reindexamos n via $m = n-2$, na primeira série, e, depois, trocamos o m pelo n. Então, para a_0 e a_1 constantes, temos:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\tfrac{a_0}{1\cdot 2}; \\
a_3 &= -\tfrac{a_1}{2\cdot 3}; \\
a_4 &= -\tfrac{a_2}{3\cdot 4} = \tfrac{a_0}{4!}; \\
a_5 &= -\tfrac{a_3}{4\cdot 5} = \tfrac{a_1}{5!}; \\
a_6 &= -\tfrac{a_4}{5\cdot 6} = -\tfrac{a_0}{6!}; \\
a_7 &= -\tfrac{a_5}{6\cdot 7} = -\tfrac{a_1}{7!}; \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Assim, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, temos

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{(2n)!} \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)!}.$$

Portanto, a solução de $x'' + x = 0$ é dada por

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} t^{2n+1} \\
&= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= a_0 \cos t + a_1 \operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

2. $x'' - tx = 0$.

$$\begin{aligned}
x'' - tx = 0 &\Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0 \\
&\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}t^n = 0 \\
&\Longrightarrow (1)(2)a_2 t^0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}t^n = 0 \\
&\Longrightarrow 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_{n-1}\right]t^n = 0 \\
&\Longrightarrow a_2 = 0,\ a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)},\ n = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

sendo que, na segunda implicação, de cima para baixo, reindexamos n via $m = n-2$, na primeira série, n via $i = n+1$, na segunda, e, depois, trocamos m e i pelo n. Logo, $a_2 = 0$ e, se a_0 e a_1 são constantes, temos:

$$\begin{array}{lllll}
a_3 & = & \frac{a_0}{(2)(3)}; & & \\
a_4 & = & \frac{a_1}{(3)(4)}; & & \\
a_5 & = & \frac{a_2}{(4)(5)} & = & 0; \\
a_6 & = & \frac{a_3}{(5)(6)} & = & \frac{a_0}{(2)(3)(5)(6)}; \\
a_7 & = & \frac{a_4}{(6)(7)} & = & \frac{a_1}{(3)(4)(6)(7)}; \\
a_8 & = & \frac{a_5}{(7)(8)} & = & 0; \\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

Então, para $n = 1, 2, 3 \ldots$, temos

$$a_{3n} = \frac{a_0}{(2)(3)(5)(6)\cdots(3n-1)(3n)} \quad \text{e} \quad a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3)(4)(6)(7)\cdots(3n)(3n+1)},$$

enquanto que, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, temos

$$a_{3n+2} = 0.$$

Portanto, a solução de $x'' - tx = 0$ é dada por

$$\begin{aligned}
x &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n}t^{3n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n+1}t^{3n+1} \\
&= a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{3n}}{(2)(3)(5)(6)\cdots(3n-1)(3n)}\right] \\
&\quad + a_1\left[t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{3n+1}}{(3)(4)(6)(7)\cdots(3n)(3n+1)}\right].
\end{aligned}$$

3. $\left(t^2+1\right)x''-4tx'+6x=0.$

$$\begin{aligned}
t^2x''+x''-4tx'+6x=0 &\Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nt^n+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nt^{n-2}\\
&\qquad -\sum_{n=1}^{\infty}4na_nt^n+\sum_{n=0}^{\infty}6a_nt^n=0\\
&\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)na_nt^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n\\
&\qquad -\sum_{n=0}^{\infty}4na_nt^n+\sum_{n=0}^{\infty}6a_nt^n=0\\
&\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n-1)na_n+(n+1)(n+2)a_{n+2}-4na_n+6a_n\right]t^n=0\\
&\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(n^2-5n+6\right)a_n+(n+1)(n+2)a_{n+2}\right]t^n=0\\
&\Longrightarrow a_{n+2}=-\frac{(n-2)(n-3)a_n}{(n+1)(n+2)},\ n=0,1,2,\ldots.
\end{aligned}$$

Portanto, se a_0 e a_1 são constantes, temos:

$$\begin{array}{lcccc}
a_2 & = & -3a_0; & & \\
a_3 & = & -\frac{a_1}{3}; & & \\
a_4 & = & -\frac{0\cdot a_2}{12} & = & 0;\\
a_5 & = & -\frac{0\cdot a_3}{20} & = & 0;\\
a_6 & = & -\frac{2\cdot a_4}{30} & = & 0;\\
a_7 & = & -\frac{6\cdot a_5}{42} & = & 0;\\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

A solução de $\left(t^2+1\right)x''-4tx'+6x=0$ é, assim, dada por

$$\begin{aligned}
x &= a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\\
&= a_0\left(1-3t^2\right)+a_1\left(t-\frac{1}{3}t^3\right).
\end{aligned}$$

4. $\begin{cases} \left(t^2+1\right)x''+tx'-x=0 \\ x(0)=0; \\ x'(0)=1. \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
t^2x''+x''+tx'-x=0 &\Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nt^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n \\
&\qquad +\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0 \\
&\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)na_nt^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n \\
&\qquad +\sum_{n=0}^{\infty}na_nt^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0 \\
&\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n-1)na_n+(n+1)(n+2)a_{n+2}+na_n-a_n\right]t^n=0 \\
&\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(n^2-1\right)a_n+(n+1)(n+2)a_{n+2}\right]t^n=0 \\
&\Longrightarrow a_{n+2}=-\frac{n-1}{n+2}a_n,\ n=0,1,2,\ldots
\end{aligned}
$$

Assim, se a_0 e a_1 são constantes, temos:

$$
\begin{array}{rcrcl}
a_2 &=& \frac{1}{2}a_0; && \\
a_3 &=& 0; && \\
a_4 &=& -\frac{1}{4}a_2 &=& -\frac{1}{2\cdot4}a_0; \\
a_5 &=& -\frac{2}{5}a_3 &=& 0; \\
a_6 &=& -\frac{3}{6}a_4 &=& \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}a_0; \\
a_7 &=& -\frac{4}{7}a_5 &=& 0; \\
a_8 &=& -\frac{5}{8}a_6 &=& -\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}a_0; \\
&& \vdots &&
\end{array}
$$

Portanto,

$$a_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots(2n)}a_0, n=2,3\ldots,$$

$$a_{2n+1}=0, n=1,2,\ldots,$$

e, assim, a solução de $\left(t^2+1\right)x''+tx'-x=0$ é dada por

$$
\begin{aligned}
x &= a_0+a_1t+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}t^{2n} \\
&= a_0\left(1+\frac{t^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots(2n)}t^{2n}\right)+a_1t.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, como $a_0=x(0)=0$ e $a_1=x'(0)=1$, a solução do PVI é apenas $x(t)=t$.

5. $\begin{cases} x'' - 2tx' + x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} x'' - 2tx' + x = 0 &\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} - (2n-1)a_n\right] t^n = 0 \\ &\Longrightarrow a_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)} a_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Assim, se a_0 e a_1 são constantes, temos:

$$\begin{array}{rclcl} a_2 & = & -\frac{1}{(1)(2)}a_0; & & \\ a_3 & = & \frac{1}{(2)(3)}a_1; & & \\ a_4 & = & \frac{3}{(3)(4)}a_2 & = & -\frac{3}{4!}a_0; \\ a_5 & = & \frac{5}{(4)(5)}a_3 & = & \frac{1\cdot 5}{5!}a_1; \\ a_6 & = & \frac{7}{(5)(6)}a_4 & = & -\frac{3\cdot 7}{6!}a_0; \\ a_7 & = & \frac{9}{(6)(7)}a_5 & = & \frac{1\cdot 5\cdot 9}{7!}a_1; \\ a_8 & = & \frac{11}{(7)(8)}a_6 & = & -\frac{3\cdot 7\cdot 11}{8!}a_0; \\ & & \vdots & & \end{array}$$

Portanto,

$$a_{2n} = -\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-5)}{(2n)!}a_0, n = 2, 3\ldots,$$

$$a_{2n+1} = \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}{(2n+1)!}a_1, n = 1, 2, \ldots,$$

e, assim, a solução de $\left(t^2+1\right)x'' - 2tx' + x = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}t^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}t^{2n+1} \\ &= a_0\left\{1 - \frac{t^2}{2!} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{[3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-5)]t^{2n}}{(2n)!}\right\} + a_1\left\{t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)]t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\} \\ &= a_0x_1(t) + a_1x_2(t). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $a_0 = x(0) = 0$ e $a_1 = x'(0) = 1$, a solução de tal *pvi* é apenas $x(t) = x_2(t)$.

Observação

Esse método de resolução, via séries, também é válido para toda *edo* de primeira ordem com coeficientes analíticos. De fato, basta considerar $a = 0$ em (3.8)

EXEMPLOS

1. $x' - x = 0$.

$$\begin{aligned} x' - x = 0 &\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)a_{n+1} - a_n\right] t^n = 0 \\ &\Longrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}, \; n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Assim, para a_0 constante, temos:

$$\begin{array}{lllll} a_1 & = & \frac{a_0}{1} & = & \frac{a_0}{1!}; \\ a_2 & = & \frac{a_1}{2} & = & \frac{a_0}{2!}; \\ a_3 & = & \frac{a_2}{3} & = & \frac{a_0}{3!}; \\ a_4 & = & \frac{a_3}{4} & = & \frac{a_0}{4!}; \\ & & \vdots & & \end{array}$$

Logo, esses coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{a_0}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

e a solução de $x' - x = 0$ pode ser representada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= a_0 e^t. \end{aligned}$$

2. $x' = t^2 x$.

$$\begin{aligned} x' - t^2 x = 0 &\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2} = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 0 \\ &\Longrightarrow a_1 + 2a_2 t + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 0 \\ &\Longrightarrow a_1 + 2a_2 t + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)a_{n+1} - a_{n-2}\right] t^n = 0 \\ &\Longrightarrow a_1 = a_2 = 0, \; a_{n+1} = \frac{a_{n-2}}{n+1}, \; n = 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

Assim, para a_0 constante, temos:

$$\begin{array}{rclcl}
a_3 & = & \frac{a_0}{3} & = & \frac{a_0}{3^1(1!)}; \\
a_4 & = & \frac{a_1}{4} & = & 0; \\
a_5 & = & \frac{a_2}{5} & = & 0; \\
a_6 & = & \frac{a_3}{6} & = & \frac{a_0}{3^2(2!)}; \\
a_7 & = & \frac{a_4}{7} & = & 0; \\
a_8 & = & \frac{a_5}{8} & = & 0; \\
a_9 & = & \frac{a_6}{9} & = & \frac{a_0}{3^3(3!)}; \\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

Portanto, esses coeficientes são dados por

$$a_{3n} = \frac{a_0}{3^n(n!)} \text{ e } a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0, n = 0, 1, 2, \dots,$$

e a solução de $x' - t^2 x = 0$ pode ser representada por

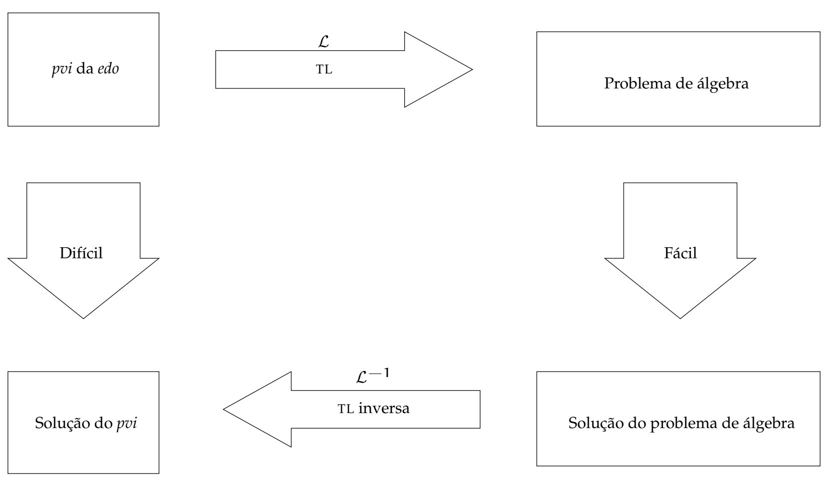
$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n} t^{3n} \\
&= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n}}{3^n(n!)} \\
&= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(t^3/3\right)^n}{n!} \\
&= a_0 e^{t^3/3}.
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Transformada de Laplace (TL) e edo

4.1 TL

Figura 4.1: Problema a ser resolvido



A figura 4.1 ilustra a passagem, via TL, do *pvi* de uma *edo*, para um problema álgebrico. Resolvido esse problema, aplicamos a TL inversa em sua solução, para obtermos a a solução do *pvi* original.

DEFINIÇÃO

A TL de uma função $f(t)$, $t \in [0, \infty)$, é uma função $F(s)$ calculada pelo operador $\mathcal{L}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= F(s). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Nesse caso, $f(t)$ é a TLI de $F(s)$ e denotamos

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t).$$

Além disso, o domínio de F, por (4.1), é formado por todo número s tal que $e^{-st}f(t)$ é integrável em $[0,\infty)$.

EXEMPLOS

1. Para s_0 fixo, se $s > s_0$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{s_0 t}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{s_0 t}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}dt \\
&= \lim_{L\to\infty}\int_{t=0}^{t=L} e^{-(s-s_0)t}dt \\
&= \lim_{L\to\infty}\left[\frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)}\right]_{t=0}^{t=L} \\
&= -\frac{1}{s-s_0}\lim_{L\to\infty}\left(e^{-(s-s_0)L}-1\right) \\
&= \frac{1}{s-s_0}.
\end{aligned}$$

Na quarta igualdade, de cima para baixo, utilizamos a integral

$$\int_a^b e^{\alpha t}dt = \left.\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\right|_a^b, \tag{4.2}$$

que pode ser tanto real quanto complexa.
Assim, para $s > s_0$,

$$\mathcal{L}\left\{e^{s_0 t}\right\} = \frac{1}{s-s_0} \Longleftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-s_0}\right\} = e^{s_0 t}. \tag{4.3}$$

2. Se $s > 0$, temos, por (4.3),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{1\} &= \mathcal{L}\left\{e^{0\cdot t}\right\} \\
&= \frac{1}{s-0} \\
&= \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Assim, para $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \Longleftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1. \tag{4.4}$$

3. Se $s > 0$, temos, via integração por partes,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\} &= \int_0^\infty e^{-st} t\,dt \\
&= \lim_{L\to\infty} \int_{t=0}^{t=L} te^{-st}dt \\
&= \lim_{L\to\infty} \left(t \cdot \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{t=0}^{t=L} - \int_{t=0}^{t=L} \frac{e^{-st}}{-s}dt \right) \\
&= \lim_{L\to\infty} \left\{ -\frac{Le^{-sL}}{s} + \frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=L} \right\} \\
&= \frac{1}{s^2},
\end{aligned}$$

onde aplicamos L'hôpital em $Le^{-sL} = \frac{L}{e^{sL}}$. Logo, se $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \iff \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t.$$

4. Sejam n um inteiro positivo e $s > 0$. Assim, via integração por partes,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty t^n e^{-st}dt \\
&= \left[-t^n \cdot \frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty nt^{n-1}\frac{e^{-st}}{-s}dt \\
&= \frac{n}{s}\mathcal{L}\left\{t^{n-1}\right\}.
\end{aligned}$$

Portanto, como $\mathcal{L}\left\{t^1\right\} = \frac{1}{s^2}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^2\right\} &= \frac{2}{s}\mathcal{L}\left\{t^1\right\} \\
&= \frac{2!}{s^3}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^3\right\} &= \frac{3}{s}\mathcal{L}\left\{t^2\right\} \\
&= \frac{3!}{s^4}.
\end{aligned}$$

Logo, supondo que

$$\mathcal{L}\left\{t^{n-1}\right\} = \frac{(n-1)!}{s^n},$$

prova-se, por indução, que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \tag{4.5}$$

para cada inteiro positivo n.[1]

ADMISSIBILIDADE

Em relação a (4.1), $f(t)$ é dita *admissível* quando existe sua TL $F(s)$.[2]

LINEARIDADE

Para cte_1 e cte_2 constantes, se $f(t)$ e $g(t)$ são admissíveis com transformadas $F(s)$ e $G(s)$, respectivamente, então:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{cte_1 f(t) + cte_2 g(t)\} &= cte_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + cte_2 \mathcal{L}\{g(t)\} \\ &= cte_1 F(s) + cte_2 G(s)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{cte_1 F(s) + cte_2 G(s)\} &= cte_1 \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + cte_2 \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \\ &= cte_1 f(t) + cte_2 g(t).\end{aligned}$$

EXEMPLOS

1. Seja $p(t) = -t^4 + 2t^3 + t - 7$. Portanto, para $s > 0$,

$$\begin{aligned}P(s) &= \mathcal{L}\{p(t)\} \\ &= -\mathcal{L}\left\{t^4\right\} + 2\mathcal{L}\left\{t^3\right\} + \mathcal{L}\{t\} - 7\mathcal{L}\{1\} \\ &= -\frac{4!}{s^5} + \frac{2(3!)}{s^4} + \frac{1}{s^2} - \frac{7}{s} \\ &= \frac{-24 + 12s + s^3 - 7s^4}{s^5},\end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade, de baixo para cima, utilizamos a equação (4.5).

2. Por um lado, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{e^{it}\right\} &= \mathcal{L}\{\cos t + i \operatorname{sen} t\} \\ &= \mathcal{L}\{\cos t\} + i\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\},\end{aligned}$$

[1]Na verdade, essa fórmula também é válida para $n = 0$. De fato, por (4.4),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{t^0\right\} &= \mathcal{L}\{1\} \\ &= \frac{1}{s} \\ &= \frac{0!}{s^{0+1}}.\end{aligned}$$

[2]Embora não sejam apresentadas, nesse texto, condições suficientes para a existência de uma $F(s)$ associada à uma $f(t)$ arbitrária, em cada exemplo, para $f(t)$ ser admissível, basta que o domínio da $F(s)$ associada seja não vazio.

por linearidade. Por outro, por definição, temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{it}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{it}dt \\
&= \int_0^\infty e^{(i-s)t}dt \\
&= \left.\frac{e^{(i-s)t}}{i-s}\right|_0^\infty \\
&= \frac{1}{s-i} \\
&= \frac{s}{s^2+1} + i\frac{1}{s^2+1},
\end{aligned}
$$

caso s seja positivo. De fato, na terceira, quarta e quinta igualdades, de cima para baixo, utilizamos, respectivamente, a equação (4.2),

$$
\begin{aligned}
e^{(i-s)t} &= e^{-st}e^{it} \\
&= e^{-st}(\cos t + i \operatorname{sen} t) \\
&\to 0,
\end{aligned}
$$

para $t \to \infty$,[3] e que

$$\frac{s}{s^2+1} + i\frac{1}{s^2+1}$$

é o inverso multiplicativo de $s - i$.[4] Então, para $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen} t.$$

3. Seja $s > \omega$, onde ω é uma constante positiva.[5] Como $\frac{\omega}{s^2-\omega^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\right)$,[6] temos, por linearidade e pela equação (4.3),

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2-\omega^2}\right\} &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\omega}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\omega}\right\}\right) \\
&= \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \\
&= \operatorname{senh}(\omega t).
\end{aligned}
$$

---

[3] $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ são limitadas e $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-st} = 0$.

[4] De fato, se $i^2 = -1$ e $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, então

$$(a+ib)\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right) = 1.$$

[5] Assim, também, $s > -\omega$.

[6] Utilizamos, aqui, a *técnica das frações parciais*, estudada no *cálculo de funções reais de uma variável real*.

Analogamente, para $s > \omega > 0$, temos

$$\mathcal{L}\{\cosh(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 - \omega^2}.$$

4. Para $s > 1$,[7] como

$$\frac{s+3}{s(s-1)(s+2)} = -\frac{3}{2s} + \frac{4}{3(s-1)} + \frac{1}{6(s+2)},$$

temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s-1)(s+2)}\right\} &= -\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{4}{3}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-2t},\end{aligned}$$

por (4.3), página 62.

5. Se $s > 2$,[8] então

$$\begin{aligned}\frac{s-1}{s^2+2s-8} &= \frac{s-1}{(s+4)(s-2)} \\ &= \frac{1}{6(s-2)} + \frac{5}{6(s+4)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+2s-8}\right\} = \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{5}{6}e^{-4t},$$

por (4.3).

MUDANÇA DE VARIÁVEL

Para qualquer constante cte positiva, se $f(t)$ é admissível, temos

$$\mathcal{L}\{f(\mathrm{cte}\, t)\} = \frac{1}{\mathrm{cte}} F\left(\frac{s}{\mathrm{cte}}\right).$$

De fato, como $f(\mathrm{cte}\, t)$ é função de t, temos, por definição,[9]

$$\mathcal{L}\{f(\mathrm{cte}\, t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(\mathrm{cte}\, t)\,dt.$$

Agora, se $\tau = \mathrm{cte}\, t$, essa integral é igual a

$$\frac{1}{\mathrm{cte}}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{\mathrm{cte}}\tau} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\mathrm{cte}} F\left(\frac{s}{\mathrm{cte}}\right).$$

[7] Assim, $s > -2$.
[8] Portanto, $s > -4$.
[9] Cf. página 61.

EXEMPLO

Utilizando as transformadas do seno e do cosseno e a mudança de variável supracitada, sendo ω uma constante positiva e $s > 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} &= \frac{1}{\omega}\frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1}\\ &= \frac{\frac{s}{\omega^2}}{\frac{s^2+\omega^2}{\omega^2}}\\ &= \frac{s}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \tag{4.6}$$

DESLOCAMENTO-I

Sendo cte constante e $f(t)$ admissível,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{e^{\text{cte}\,t}f(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{\text{cte}\,t}f(t)dt\\ &= \int_0^\infty e^{-(s-\text{cte})t}f(t)dt\\ &= F(s-\text{cte}),\end{aligned}$$

para $s > \text{cte}$.[10]

EXEMPLOS

1. Por (4.5), temos

$$f(t) = t^n \Longleftrightarrow F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ para } s > 0 \text{ e } n = 0, 1, 2, \ldots$$

   Portanto, para $s > \text{cte}$,

$$\mathcal{L}\left\{t^n e^{\text{cte}\,t}\right\} = \frac{n!}{(s-\text{cte})^{n+1}}$$

   e, assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-\text{cte})^{n+1}}\right\} = t^n e^{\text{cte}\,t}.$$

2. Seja $s > -3$. Assim, como

$$\frac{s^2}{(s+3)^3} = \frac{1}{s+3} - \frac{6}{(s+3)^2} + \frac{9}{(s+3)^3},$$

[10]Cf. o caso para $f(t) = 1$, página 62.

temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s+3)^3}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 6\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} + 9\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s+3)^3}\right\}\\ &= e^{-3t} - 6te^{-3t} + \frac{9}{2}t^2e^{-3t}.\end{aligned}$$

3. Sejam s e ω positivos. Como, por (4.6),

$$f(t) = \operatorname{sen}(\omega t) \Longleftrightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

temos, para $s >$ cte,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{e^{\text{cte}\,t}\operatorname{sen}(\omega t)\right\} &= F(s-\text{cte})\\ &= \frac{\omega}{(s-\text{cte})^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\mathcal{L}\left\{e^{\text{cte}\,t}\cos(\omega t)\right\} = \frac{s-\text{cte}}{(s-\text{cte})^2+\omega^2}.$$

4. Como podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{3s+7}{s^2-2s+5} &= \frac{3s+7}{s^2-2s+1+4}\\ &= \frac{3s+7}{(s-1)^2+4}\\ &= \frac{3s-3+3+7}{(s-1)^2+4}\\ &= \frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2+4},\end{aligned}$$

temos, para $s > 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s+5}\right\} &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+4}\right\}\\ &= 3e^t\cos(2t) + 5e^t\operatorname{sen}(2t).\end{aligned}$$

Função de Heaviside de passo unitário

Para $t_0 \geq 0$,

$$H(t-t_0) := \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0;\\ 1 & \text{se } t \geq t_0.\end{cases}$$

Exemplo

Se $s > 0$, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{H(t-t_0)\} &= \int_0^\infty e^{-st}H(t-t_0)dt\\ &= \int_{t_0}^\infty e^{-st}dt\\ &= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t_0}^\infty\\ &= \frac{e^{-t_0 s}}{s}.\end{aligned}$$

Esse exemplo é generalizado na observação seguinte:

DESLOCAMENTO-II

Se $s > 0$ e $f(t)$ é admissível, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{H(t-t_0)f(t-t_0)\} &= \int_0^\infty e^{-st}H(t-t_0)f(t-t_0)dt\\ &= \int_{t_0}^\infty e^{-st}f(t-t_0)dt\\ &= \int_0^\infty e^{-s(u+t_0)}f(u)du\\ &= e^{-t_0 s}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du\\ &= e^{-t_0 s}F(s).\end{aligned}$$

Na terceira igualdade, de cima para baixo, utilizamos a mudança de variável $u = t - t_0$. Note que, a função de Heaviside "aciona" outras funções, a partir de $t = t_0$.

EXEMPLOS

1. Qual a TL da função seno "acionada" em $t = 3$?
   Essa função é dada por
   $$S(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 3;\\ \operatorname{sen} t & \text{se } t \geq 3.\end{cases}$$
   Como $S(t) = H(t-3)\operatorname{sen} t$ e
   $$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t-3+3) = \operatorname{sen}(t-3)\cos 3 + \operatorname{sen} 3\cos(t-3),$$
   temos
   $$\begin{aligned}\mathcal{L}\{S(t)\} &= \cos 3\mathcal{L}\{H(t-3)\operatorname{sen}(t-3)\} + \operatorname{sen} 3\mathcal{L}\{H(t-3)\cos(t-3)\}\\ &= \cos 3\, e^{-3s}\frac{1}{s^2+1} + \operatorname{sen} 3\, e^{-3s}\frac{s}{s^2+1},\end{aligned}$$
   caso s seja positivo.

2. Considere $s > 3$. Logo, como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^3}\right\} = \frac{1}{2}t^2e^{3t},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-7s}}{(s-3)^3}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-7s}\frac{1}{(s-3)^3}\right\}\\ &= \frac{1}{2}H(t-7)(t-7)^2e^{3(t-7)}.\end{aligned}$$

TL E DERIVADAS DE $f(t)$

Para $s > 0$ e cada inteiro não-negativo n tais que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st}f^{(n)}(t) = 0,$$

temos

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f^{(0)}(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$ [11]

De fato:

- $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$;
- $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$, pois, via integração por partes,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt\\ &= e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\left(-se^{-st}\right)dt\\ &= s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\\ &= sF(s) - f(0);\end{aligned}$$

- $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, pois

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\left(f'\right)'(t)\right\}\\ &= s\,\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} - f'(0)\\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0);\end{aligned}$$

Podemos aplicar, agora, indução finita sobre n.

EXEMPLOS

[11] Aqui, $f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}(f(t))$.

1. É possível reobter a TL de $\cos(\omega t)$, utilizando a fórmula (4.6).[12] De fato, basta observar que

$$\begin{aligned}\omega\left(\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}\right) &= \mathcal{L}\{\omega\cos(\omega t)\}\\ &= \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}'(\omega t)\right\}\\ &= s\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(\omega t)\} - \operatorname{sen} 0\\ &= s\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)\\ &= \omega\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right).\end{aligned}$$

2. $\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}^2 t\right\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$.
   De fato, seja $f(t) = \operatorname{sen}^2 t$. Então, $f(0) = 0$ e

$$\begin{aligned}f'(t) &= 2\operatorname{sen} t\cos t\\ &= \operatorname{sen} 2t.\end{aligned}$$

   Por sua vez, a TL dessa derivada é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} &= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}\\ &= \frac{2}{s^2+4}.\end{aligned}$$

   Agora, basta utilizar a fórmula

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

TLI E DERIVADAS DE $F(s)$

Para cada inteiro n não-negativo onde exista a n-ésima derivada em relação a s, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t), \tag{4.7}$$

ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t); \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{F'(s)\right\} = -tf(t); \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{F''(s)\right\} = t^2 f(t); \quad \text{etc.}$$

De fato, a fórmula (4.7) é válida para $n = 0$, pois

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\right)\\ &= \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st}\right)f(t)dt\\ &= \int_0^\infty \left(-te^{-st}\right)f(t)dt\\ &= -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt\\ &= -\mathcal{L}\{tf(t)\},\end{aligned}$$

[12] Cf. página 67.

e, caso seja válida para algum inteiro n não negativo, mesmo que não nulo, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^{n+1}f(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}t^{n+1}f(t)dt \\
&= -\int_0^\infty \left(-te^{-st}\right)t^n f(t)dt \\
&= -\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st}\right)t^n f(t)dt \\
&= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}t^n f(t)dt \\
&= -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}\{t^n f(t)\}\right) \\
&= (-1)(-1)^n\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}F(s) \\
&= (-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}F(s).
\end{aligned}$$

Portanto, (4.7) é válida para todo inteiro n não negativo.

EXEMPLOS

1. É fácil ver que, se $s > 0$, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\cos t\} &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) \\
&= -\frac{1\cdot\left(s^2+1\right)-s\cdot 2s}{(s^2+1)^2} \\
&= \frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}.
\end{aligned}$$

2. Note que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^2\cos(3t)\right\} &= (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) \\
&= \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+9}\right)\right) \\
&= \frac{d}{ds}\left(\frac{9-s^2}{\left(9+s^2\right)^2}\right),
\end{aligned}$$

cuja resolução fica como exercício.

CONVOLUÇÃO

Se $f(t)$ e $g(t)$ são admissíveis, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\
&:= f(t)*g(t) \\
&= g(t)*f(t).
\end{aligned}$$

De fato, considere os domínios de integração

$$D_{uv} = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u > 0, v > 0\right\} \quad \text{e} \quad D_{t\tau} = \left\{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t > \tau > 0\right\}$$

e a mudança de variáveis

$$\begin{cases} t = u + v, \\ \tau = u. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du \int_0^\infty e^{-sv} g(v)\,dv \\ &= \iint_{D_{uv}} e^{-s(u+v)} f(u)g(v)\,du\,dv \\ &= \iint_{D_{t\tau}} e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right] dt \\ &= \mathcal{L}\{f(t) * g(t)\}. \end{aligned}$$

EXEMPLOS

1. Qual é a TLI de $H(s) = \frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$?

   Primeiramente, note que,

$$F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \Longrightarrow f(t) = g(t) = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t).$$

   Assim, por convolução, temos:

$$\begin{aligned} h(t) &= (f * g)(t) \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t \operatorname{sen}(\omega(t-\tau)) \operatorname{sen}(\omega\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t \operatorname{sen}(\omega t - \omega\tau) \operatorname{sen}(\omega\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t \left(\operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega\tau)\operatorname{sen}(\omega\tau) - \operatorname{sen}(\omega\tau)\cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega\tau)\right) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega^2} \left(\operatorname{sen}(\omega t) \int_0^t \operatorname{sen}(\omega\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau - \cos(\omega t) \int_0^t \operatorname{sen}^2(\omega\tau)\,d\tau\right) \\ &= \frac{1}{\omega^3} \left(\operatorname{sen}(\omega t) \int_0^{\omega t} \operatorname{sen} u \cos u\,du - \cos(\omega t) \int_0^{\omega t} \operatorname{sen}^2 u\,du\right) \\ &= \frac{1}{2\omega^3} \left(\operatorname{sen}(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)\right). \end{aligned}$$

2. TL DA FUNÇÃO ERRO

   Seja $\operatorname{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx$. Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right\} = e^t \cdot \operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right).$$

De fato, para $F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ e $G(s) = \frac{1}{s-1}$, temos $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ e $g(t) = e^t$ e, se $\tau = x^2$, então

$$\begin{aligned}
f(t) * g(t) &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{t-\tau} d\tau \\
&= \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau \\
&= \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{e^{-x^2}}{x} 2x dx \\
&= e^t \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx.
\end{aligned}$$

Vejamos, agora, como $f(t)$ foi calculada:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-u^2} \cdot \frac{\sqrt{s}}{u} \cdot \frac{2u}{s} du \\
&= \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-u^2} du \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{s}},
\end{aligned}$$

onde, na segunda e quarta igualdades, de cima para baixo, efetuamos, respectivamente, a mudança de variáveis $st = u^2$ e os cálculos seguintes:
Para $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$, $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, temos

$$\begin{aligned}
a \to \infty \Longrightarrow I &= \iint_{D_{xy}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\
&= \iint_{D_{r\theta}} e^{-r^2} r dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^a e^{-r^2} r dr\right] d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^a e^{-r^2} (-2) r dr\right] \\
&= -\frac{\pi}{4} \int_0^{-a^2} e^u du \\
&= \frac{\pi}{4} \left(1 - e^{-a^2}\right) \\
&\to \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para α qualquer, temos

$$\begin{aligned}\alpha \to \infty \Longrightarrow I_\alpha &= \int_0^\alpha \int_0^\alpha e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \left(\int_0^\alpha e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^\alpha e^{-y^2} dy\right) \\ &= \left(\int_0^\alpha e^{-x^2} dx\right)^2 \\ &\to \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2.\end{aligned}$$

Seja, então, $\alpha \in \left\{a, a/\sqrt{2}\right\}$. Como $I_{a/\sqrt{2}} < I < I_a$,[13] temos

$$a \to \infty \Longrightarrow I \to \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2.$$

Portanto, pela unicidade do limite,

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Para concluir a seção 4.1, seguem mais duas propriedades e uma tabela onde estão elencadas algumas transformadas calculadas nesse capítulo. Nessa tabela, figuram, por exemplo, as transformadas das funções $\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t)$ e $\delta(t)$, dita *delta de Dirac* e estudada na seção 4.2. Além disso, a apresentação das três últimas linhas da tabela objetiva estabelecer que *existem inúmeras outras transformadas que podem ser obtidas utilizando os resultados desse capítulo*.

Valores iniciais e finais

Se $f'(t)$ é admissível, ou seja,

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0),$$

então,

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \quad \left(\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s), \text{ respectivamente}\right), \tag{4.8}$$

caso esses limites existam.

Exemplo

Seja $X(s) = \frac{1}{s(s+2)}$. Então, por um lado,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} x(t) &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right\}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left(1 - e^{-2t}\right) \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

[13] No primeiro quadrante, o quarto da circunferência de centro $(0,0)$ e raio a, está inscrito num quadrado de lado a e circunscrito num de lado $a/\sqrt{2}$.

Por outro,

$$\lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}.$$

TL DE FUNÇÃO T-PERIÓDICA

Se $f(t+T) = f(t)$, $t \in [0, \infty)$, com f admissível e contínua por partes num período T, então

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt.$$

EXEMPLO

Seja $f(t) = \operatorname{sen} \omega t$, $\omega > 0$. Logo, f tem período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-st} \operatorname{sen}(\omega t)dt \\
&= \frac{\left[-\frac{\omega}{s^2+\omega^2} e^{-st}\cos(\omega t) - \frac{s}{s^2+\omega^2} e^{-st} \operatorname{sen}(\omega t)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}}{1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \\
&= \frac{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\left(1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}\right)}{1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \\
&= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$

TABELA DE TRANSFORMADAS

Pode ser conveniente alocar os resultados das transformadas em algum tipo de tabela ou planilha, para utilização posterior. Na verdade, existem muitos livros dedicados apenas a essas tabelas. Segue, agora, uma delas, onde coletamos, no lado esquerdo, algumas funções admissíveis estudadas nesse livro, enquanto que, no lado direito, suas respectivas transformadas.[14] Além disso, o significado das três últimas linhas da tabela é o seguinte: existe um número infinito de transformadas e, muitas delas, podem ser obtidas com as apresentadas nesse capítulo.

[14] Nas duas linhas da tabela relacionadas ao limite (finito) ℓ, a segunda coluna decorre da primeira, como consequência da proposição "Se ..., então ..." da página 75.

$f(t)$	$F(s)$
$t^n e^{\mathrm{cte}\,t},\ n = 0, 1, 2, \dots$	$n!/(s-\mathrm{cte})^{n+1}$ para $s > \mathrm{cte}$
$e^{\mathrm{cte}\,t}\,\mathrm{sen}(\omega t)$	$\omega/\left((s-\mathrm{cte})^2+\omega^2\right)$ para s e ω positivos e $s > \mathrm{cte}$
$e^{\mathrm{cte}\,t}\cos(\omega t)$	$(s-\mathrm{cte})/\left((s-\mathrm{cte})^2+\omega^2\right)$ para s e ω positivos e $s > \mathrm{cte}$
$\mathrm{senh}(\omega t)$	$\omega/\left(s^2-\omega^2\right)$ para $s > \omega > 0$
$\cosh(\omega t)$	$s/\left(s^2-\omega^2\right)$ para $s > \omega > 0$
$\delta(t-\mathrm{cte})$	$e^{-\mathrm{cte}\,s}$
$\mathrm{erf}(\mathrm{cte}\,t)$	$\frac{e^{s^2/4\mathrm{cte}^2}}{s}\cdot\mathrm{erfc}(s/2\mathrm{cte})$
$\mathrm{erf}\left(\sqrt{\mathrm{cte}\,t}\right)$	$\frac{\sqrt{\mathrm{cte}}}{s\sqrt{s+\mathrm{cte}}}$
$\mathrm{erfc}\left(\mathrm{cte}/2\sqrt{t}\right)$	$e^{-\mathrm{cte}\sqrt{s}}/s$
$\frac{\mathrm{cte}}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\mathrm{cte}^2/4t}$	$e^{-\mathrm{cte}\sqrt{s}}$
$f(\mathrm{cte}\,t)$	$\frac{1}{\mathrm{cte}}F\left(\frac{s}{\mathrm{cte}}\right)$ para $\mathrm{cte} > 0$
$e^{\mathrm{cte}\,t}f(t)$	$F(s-\mathrm{cte})$ para $s > \mathrm{cte}$
$H(t-t_0)\,f(t-t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$
$f(t)*g(t) := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{i=1}^{n} s^{n-i}f^{(i-1)}(0)$
$f'(t)$ com $\lim_{t\to 0} f(t) = \ell$	$sF(s)-f(0)$ com $\lim_{s\to\infty} sF(s) = \ell$
$f'(t)$ com $\lim_{t\to\infty} = \ell$	$sF(s)-f(0)$ com $\lim_{s\to 0} sF(s) = \ell$
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
$f(t+T) = f(t)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}e^{-\mathrm{cte}^2/4t}-\mathrm{cte}\cdot\mathrm{erfc}\left(\mathrm{cte}/2\sqrt{t}\right)$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}e^{-\mathrm{cte}\sqrt{s}}$
$\vdots$	$\vdots$

4.2 Edo e TL

Para resolver um *pvi* via TL, siga, em sequência, os passos seguintes:

1. Aplique a TL em ambos os membros da *edo* a ser resolvida;
2. Resolva o problema de álgebra resultante do passo 1;
3. Aplique a TLI em ambos os lados da solução obtida no passo 2.

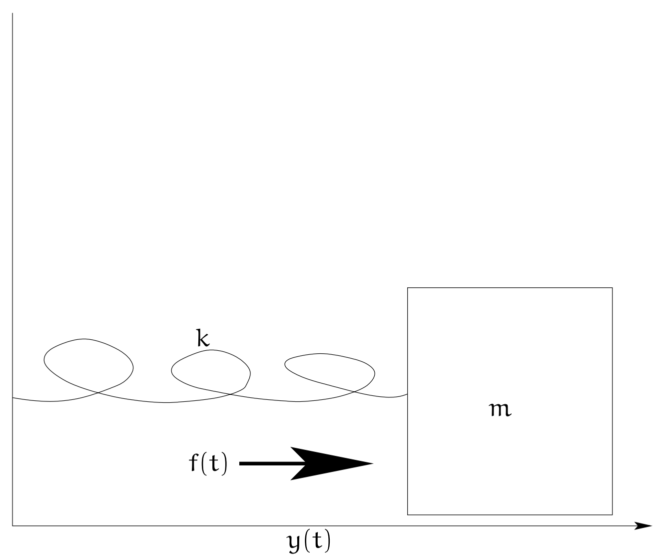
EXEMPLO: SISTEMA MASSA-MOLA COM FORÇAMENTO

Sejam m e k a massa e a constante de Hooke, respectivamente, de um corpo sob a ação de uma força $f(t)$ horizontal.[15] Considere, agora, o seguinte *pvi*:

$$\begin{cases} my''(t) + ky(t) &= f(t); \\ y(0) &= y_0; \\ y'(0) &= y_0'. \end{cases}$$

Para uma ilustração desse sistema mecânico, confira a figura 4.2.

Figura 4.2: Sistema massa-mola com forçamento



Logo, seguindo os passos supracitados, temos:

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{my''(t)+ky(t)\right\} = \mathcal{L}\{f(t)\} &\Longrightarrow m\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} + k\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \\ &\Longrightarrow ms^2Y(s) - msy_0 - my_0' + kY(s) = F(s); \end{aligned}$$

2.

$$Y(s) = \frac{F(s)}{ms^2+k} + \frac{msy_0}{ms^2+k} + \frac{my_0'}{ms^2+k};$$

[15] O uso de "horizontal" com $y(t)$ e não $x(t)$ é proposital!

3.
$$y(t) = \frac{1}{m}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2+k/m}\right\} + y_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k/m}\right\} + y_0'\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+k/m}\right\}.$$

Agora, se $\omega = \sqrt{k/m}$, como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\} = \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} = \cos\omega t,$$

então
$$y(t) = \frac{1}{m}\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\cdot\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\} + y_0\cos\omega t + \frac{y_0'}{\omega}\operatorname{sen}\omega t.$$

Portanto, via convolução, temos:

$$y(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t f(\tau)\operatorname{sen}(\omega(t-\tau))d\tau + y_0\cos\omega t + \frac{y_0'}{\omega}\operatorname{sen}\omega t.$$

Por exemplo, seja $f(t) = \operatorname{sen}\omega t$. Assim, procedendo como no primeiro exemplo dado após a definição de convolução,[16] temos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2m\omega^2}\left(\operatorname{sen}(\omega t) - \omega t\cos(\omega t)\right) + y_0\cos(\omega t) + \frac{y_0'}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t) \\ &= \left(\frac{2my_0'\omega+1}{2m\omega^2}\right)\operatorname{sen}(\omega t) + \left(\frac{2my_0\omega^2-\omega t}{2m\omega^2}\right)\cos(\omega t). \end{aligned}$$

Exemplo

Considere o seguinte *pvi*:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 15y = 2\operatorname{sen}3t; \\ y(0) = -1; \\ y'(0) = -4. \end{cases}$$

Aplicando $\mathcal{L}$ na *edo* desse sistema, temos:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6\left(sY(s) - y(0)\right) + 15Y(s) = 2\cdot\frac{3}{s^2+3^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} s^2Y(s) + s + 4 - 6sY(s) - 6 + 15Y(s) = \frac{6}{s^2+9} &\Longrightarrow \left(s^2-6s+15\right)Y(s) = \frac{6}{s^2+9} - s + 2 \\ &\Longrightarrow Y(s) = \frac{-s^3+2s^2-9s+24}{(s^2+9)(s^2-6s+15)}. \end{aligned}$$

Via frações parciais, como

$$\begin{aligned} \frac{-s^3+2s^2-9s+24}{\left(s^2+9\right)\left(s^2-6s+15\right)} &= \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{Cs+D}{s^2-6s+15} \\ &= \frac{(A+C)s^3 + (-6A+B+D)s^2 + (15A-6B+9C)s + 15B+9D}{\left(s^2+9\right)\left(s^2-6s+15\right)}, \end{aligned}$$

[16] Cf. seção 4.1.

obtemos $A = B = \frac{1}{10}$, $C = -\frac{11}{10}$ e $D = \frac{25}{10}$. Logo

$$Y(s) = \frac{1}{10}\left(\frac{s+1}{s^2+9} + \frac{-11s+25}{s^2-6s+15}\right).$$

Para a primeira parcela da soma entre parênteses, como

$$\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s^2+9} = \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{s^2+9},$$

sua TLI é dada por

$$\cos 3t + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\, 3t.$$

Para a segunda, como

$$\begin{aligned}
\frac{-11s+25}{s^2-6s+15} &= \frac{-11s+25}{s^2-6s+9+6} \\
&= \frac{-11s+25}{(s-3)^2+6} \\
&= \frac{-11(s-3)-8}{(s-3)^2+6} \\
&= -11\cdot\frac{s-3}{(s-3)^2+6} - \frac{8}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{6}}{(s-3)^2+6},
\end{aligned}$$

sua TLI é dada por

$$-11e^{3t}\cos\sqrt{6}t - \frac{8}{\sqrt{6}}e^{3t}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{6}t.$$

Portanto,

$$y(t) = \frac{1}{10}\left(\cos 3t + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\, 3t - 11e^{3t}\cos\sqrt{6}t - \frac{8}{\sqrt{6}}e^{3t}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{6}t\right)$$

é a solução do *pvi* supracitado.

EXEMPLO

Considere o seguinte *pvi*:

$$\begin{cases} y'' + 3ty' - 6y = 2; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Assim, como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{ty'\} &= -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}\{y'\}\right) \\
&= -\frac{d}{ds}\left(sY(s) - y(0)\right) \\
&= -sY'(s) - Y(s),
\end{aligned}$$

a aplicação de $\mathcal{L}$ (a ambos os membros da *edo* do *pvi*) resulta em

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3\left(-sY'(s) - Y(s)\right) - 6Y(s) = \frac{2}{s},$$

para $s > 0$, conforme a tabela de transformadas apresentada no final da seção 4.1. Portanto,

$$-3sY'(s) + \left(s^2 - 9\right) Y(s) = \frac{2}{s},$$

ou seja,

$$Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right) Y(s) = -\frac{2}{3s^2}, \tag{4.9}$$

cujo fator integrante é dado por

$$\begin{aligned} \mu(s) &= e^{\int\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{3}\right)ds} \\ &= e^{\ln(s^3)-\frac{s^2}{6}} \\ &= s^3 e^{-\frac{s^2}{6}}, \end{aligned}$$

conforme visto no capítulo 1. Então, multiplicando os dois membros de (4.9) por $\mu(s)$ e integrando, temos:

$$\begin{aligned} s^3 e^{-\frac{s^2}{6}} Y(s) &= 2\int e^{-\frac{s^2}{6}} \left(-\frac{s}{3}\right) ds \\ &= 2e^{-\frac{s^2}{6}} + \text{cte}. \end{aligned}$$

Logo,

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{\text{cte}\, e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3}.$$

Por outro lado, como $\lim\limits_{t\to 0} y(t) = 0$, temos $\lim\limits_{s\to\infty} sY(s) = 0$, por (4.8).[17] Contudo,

$$\lim_{s\to\infty} \left(\frac{2}{s^2} + \frac{\text{cte}\, e^{\frac{s^2}{6}}}{s^2}\right) = 0$$

apenas para cte $= 0$. Assim,

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} \Longrightarrow y(t) = t^2.$$

4.2.1 Função delta de Dirac ($\delta(t)$)

O *impulso* I de uma força $f(t)$, num intervalo de tempo $[t_0, t_0 + \varepsilon]$, é definido como

$$I = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} f(t)\,dt,$$

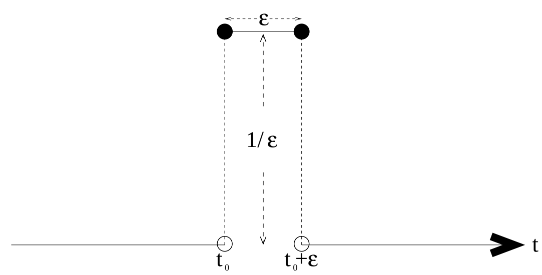
caso essa força seja integrável nesse intervalo de tempo.

Agora, para lidar com um impulso de curtíssima duração, considere, primeiramente, a função

$$f_\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{se } t \in [t_0, t_0 + \varepsilon], \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

[17]Cf. página 75.

Figura 4.3: Função $f_\varepsilon(t-t_0)$



Assim, para $0 < \varepsilon << 1$,[18] o *impulso instântaneo* é definido (e calculado) da forma seguinte:

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= \int_0^\infty f_\varepsilon(t-t_0)\,dt \\
&= \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left[t\right]_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \\
&= 1 \text{ u.i. (unidades de impulso)}
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que,

$$f_\varepsilon(t-t_0) = \frac{1}{\varepsilon}\left[H(t-t_0) - H(t-(t_0+\varepsilon))\right].$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f_\varepsilon(t-t_0)\} &= \frac{1}{\varepsilon s}\left(e^{-t_0 s} - e^{-(t_0+\varepsilon)s}\right) \\
&= e^{-t_0 s}\cdot\frac{1-e^{\varepsilon s}}{\varepsilon s}.
\end{aligned}$$

Definição e propriedades de $\delta(t)$

A função $\delta(t)$ modela pulsos de curtíssima duração, como na figura 4.3, considerando $\varepsilon \to 0$. Assim, definimos

$$\delta(t-t_0) := \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t-t_0),$$

tal que:

- $\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & \text{se } t = t_0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
  Para $t \neq t_0$, considere $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $t \notin [t_0, t_0+\varepsilon]$;
- $\int_0^\infty \delta(t-t_0)\,dt = 1$;[19]

[18] Isto é, ε é um número positivo, tão pequeno quanto se queira.
[19] De fato, $\varepsilon \to 0 \Longrightarrow I_\varepsilon \to 1$.

- Se $t_0 \in [t_1, t_2]$ está contido no domínio de $f(t)$, com $f(t)$ contínua em t_0, então

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta\left(t-t_0\right) dt &= \int_{t_1}^{t_2} f\left(t_0\right)\delta\left(t-t_0\right) dt \\ &= f\left(t_0\right);\end{aligned}$$

- $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-t_0 s}$ pois

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{L}\{f_\varepsilon\left(t-t_0\right)\} &= e^{-t_0 s}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} \\ &= e^{-t_0 s}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{se^{-\varepsilon s}}{s} \\ &= e^{-t_0 s}\lim_{\varepsilon\to 0} e^{-\varepsilon s}.\end{aligned}$$

Usamos L'hôpital na segunda igualdade, de cima para baixo.

EXEMPLO

Considere o sistema massa-mola

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t-1); \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Então, aplicando $\mathcal{L}$ a ambos os membros da *edo* desse sistema,

$$\begin{aligned}s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = e^{-s} &\Longrightarrow s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = e^{-s} \\ &\Longrightarrow Y(s) = e^{-s}F(s),\end{aligned}$$

onde, via frações parciais,

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{1}{s^2+3s+2} \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.\end{aligned}$$

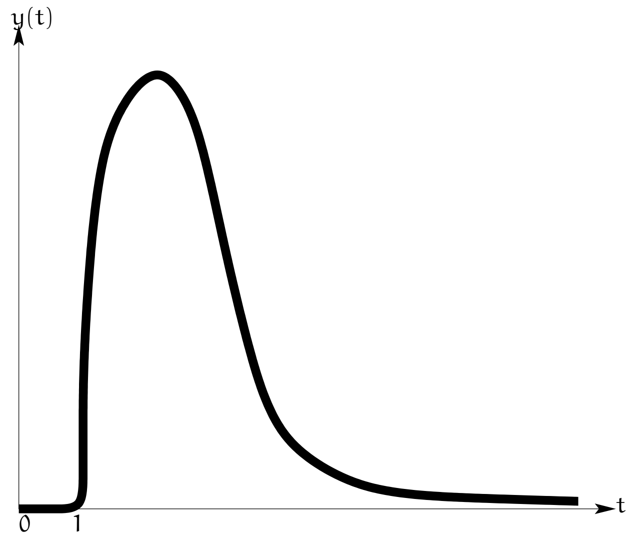
Logo, como

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \\ &= e^{-t} - e^{-2t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}F(s)\right\} \\ &= f(t-1)H(t-1) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le t < 1; \\ e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}, & \text{se } t > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

A figura 4.4 é uma representação qualitativa da solução desse sistema mecânico.

Figura 4.4: Representação qualitativa da solução $y(t)$ do problema massa-mola.



4.2.2 TL e Sistemas

Nos dois exemplos seguintes, vamos obter as soluções $x(t)$ e $y(t)$ de cada sistema dado.

1.
$$\begin{cases} x' = 2x + y; & x(0) = 1; \\ y' = 3x + 4y; & y(0) = 0. \end{cases}$$

Aplicando $\mathcal{L}$ em cada *edo* desse sistema, temos:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 2X(s) + Y(s); \\ sY(s) - y(0) = 3X(s) + 4Y(s). \end{cases}$$

A substituição das condições iniciais dadas em cada equação algébrica desse sistema, resulta em:

$$\begin{cases} sX(s) - 1 & = & 2X(s) & + & Y(s); \\ sY(s) & = & 3X(s) & + & 4Y(s). \end{cases}$$

Manipulando algebricamente esse sistema, temos:

$$\begin{cases} (s-2)X(s) & - & Y(s) & = & 1; \\ -3X(s) & + & (s-4)Y(s) & = & 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$X(s) = \frac{s-4}{(s-1)(s-5)} \quad \text{e} \quad Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s-5)}.$$

Então, via frações parciais,

$$X(s) = \frac{3/4}{s-1} + \frac{1/4}{s-5} \quad \text{e} \quad Y(s) = \frac{-3/4}{s-1} + \frac{3/4}{s-5}.$$

Assim, aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ em cada uma das duas equações anteriores,

$$x(t) = \frac{3}{4} \cdot e^{t} + \frac{1}{4} \cdot e^{5t} \quad \text{e} \quad y(t) = -\frac{3}{4} \cdot e^{t} + \frac{3}{4} \cdot e^{5t}.$$

2.
$$\begin{cases} x' = 3x - 3y + 2; & x(0) = 1; \\ y' = -6x - t; & y(0) = -1. \end{cases} \tag{4.10}$$

Aplicando $\mathcal{L}$ em cada *edo* de (4.10), temos:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 3X(s) - 3Y(s) + \frac{2}{s}; \\ sY(s) - y(0) = -6X(s) - \frac{1}{s^2}. \end{cases}$$

Substituindo as condições iniciais em cada equação algébrica desse sistema, resulta em:

$$\begin{cases} (s-3)X(s) + 3Y(s) = \frac{2+s}{s}; \\ 6X(s) + sY(s) = -\frac{s^2+1}{s^2}. \end{cases}$$

Agora, multiplique a equação de cima, desse sistema linear, por s, a de baixo por -3 e adicione as equações resultantes, desses produtos, para obter:

$$\left(s^2 - 3s - 18\right) X(s) = 2 + s + \frac{3s^2 + 3}{s^2}.$$

Assim, via frações parciais,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s^3 + 5s^2 + 3}{s^2(s+3)(s-6)} \\ &= \frac{1}{108}\left(\frac{133}{s-6} - \frac{28}{s+3} + \frac{3}{s} - \frac{18}{s^2}\right). \end{aligned}$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ em ambos os membros dessa equação, temos:

$$x(t) = \frac{1}{108}\left(133e^{6t} - 28e^{-3t} + 3 - 18t\right).$$

Por outro lado, a equação de baixo do sistema (4.10) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} y &= \int (-6x - t)\, dt \\ &= -\frac{1}{18}\int \left(133e^{6t} - 28e^{-3t} + 3\right) dt \\ &= -\frac{1}{108}\left(133e^{6t} + 56e^{-3t} + 18t\right) + \text{cte}. \end{aligned}$$

Substituindo a condição inicial, associada à equação supracitada, nessa última, temos:

$$-1 = -\frac{1}{108}(133 + 56) + \text{cte} \Longrightarrow \text{cte} = \frac{3}{4}.$$

Portanto,

$$y(t) = -\frac{1}{108}\left(133e^{6t} + 56e^{-3t} + 18t - 81\right).$$

Capítulo 5

Exercícios para os capítulos anteriores

Aqui, cada exercício desacompanhado de resposta/solução está resolvido como exemplo, no capítulo relativo a esse exercício. Sugiro que o leitor tente resolver cada um desses exercícios, sem consultar seu exemplo associado e, somente após um esforço genuíno, caso não consiga resolvê-lo, que tal exemplo seja revisado.

1. Nos itens seguintes, obtenha a solução geral de cada *edo* e a solução particular de cada *pvi*. Além disso, quando possível, determine o domínio I de cada solução obtida.

   (a) LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

   i. $\begin{cases} x' = \cos t; \\ x(0) = 0. \end{cases}$

   ii. $\begin{cases} x' = \frac{1}{t}; \\ x(1) = 0. \end{cases}$

   iii. $x' = \frac{t}{1+t^2}x$.

   iv. $\begin{cases} x' = 2tx; \\ x(0) = 1. \end{cases}$

   v. $\begin{cases} tx' = -x + t^2; \\ x(1) = x_0. \end{cases}$

   (b) NÃO-LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

   i. SEPARÁVEIS

   A. $\begin{cases} x' = 1 + x^2; \\ x(0) = 0. \end{cases}$

   B. $x' = \frac{t^2}{x^2}$.

   C. $xx' = -t, x > 0$.

   ii. EXATAS[1]

   A. $(2tx - 3t^2) + (t^2 - 2x)\frac{dx}{dt} = 0$.

   B. $\begin{cases} (\cos t - t \operatorname{sen} t + x^2) + (2tx)\frac{dx}{dt} = 0; \\ x(\pi) = 1. \end{cases}$

   iii. BERNOULLI

   A. $\begin{cases} x' + \frac{4}{t}x = t^3x^2; \\ x(2) = -1. \end{cases}$

[1] Primeiramente, utilize a condição necessária para ser exata.

B. $\begin{cases} x' = 5x + e^{-2t}x^{-2}; \\ x(0) = 2. \end{cases}$

iv. HOMOGÊNEA

A. $\begin{cases} txx' + 4t^2 + x^2 = 0; \\ x(2) = -7. \end{cases}$

(c) LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

i. $\begin{cases} x'' + x' - 6x = 0; \\ x(0) = 1; \\ x'(0) = 0. \end{cases}$

ii. $3x'' + x' - x = 0.$

iii. $4x'' + 12x' + 9x = 0.$

iv. $x'' - 6x' + 13x = 0.$

v. $\begin{cases} x'' + x = 0; \\ x(0) = 2; \\ x'(0) = 3. \end{cases}$

vi. Podemos modelar oscilações "suficientemente pequenas" para um pêndulo simples, rígido, de massa desprezível e comprimento L u.c. (unidades de comprimento), oscilando livremente, sem atrito em torno de um ponto fixo P, sem sofrer resistência do ar, conectado a uma massa unitária puntiforme na extremidade oposta à P, sob a ação da aceleração da gravidade g, pelo *pvi*:[2]

$$\begin{cases} x'' + \frac{g}{L}x = 0; \\ x(T) = x_0; \\ x'(T) = 0. \end{cases}$$

vii. $x'' - 3x' + 2x = d(t)$, para:

A. $d(t) = e^{3t}$;

B. $d(t) = 2t^2 + 4t + 1$;

C. $d(t) = \cos t$;

D. $d(t) = e^{3t} + 2t^2 + 4t + 1 + \cos t$.

viii. $x'' - 6x' + 9x = e^{3t}$.

ix. $x'' + x = \sec t$.

2. Para cada item abaixo, obtenha a solução de cada *edo/pvi* e, caso seja possível, seu respectivo domínio I.[3]

(a) $\begin{cases} x' + 3t^2x = t^2; \\ x(1) = \frac{1}{3e}. \end{cases}$ SOLUÇÃO: $x = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1-e}{3}}{e^{t^3}}$; $I = \mathbb{R}$.

(b) $\begin{cases} x' - \frac{1}{t}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{t}; \\ x\left(\frac{-1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}. \end{cases}$ SOLUÇÃO: $x = t\cos\frac{1}{t}$; $I = (-\infty, 0)$.

(c) $\begin{cases} x' + x = t; \\ x(0) = 1. \end{cases}$ SOLUÇÃO: $x = t - 1 + \frac{2}{e^t}$; $I = \mathbb{R}$.

(d) $\begin{cases} x' = 6x^2t; \\ x(1) = \frac{1}{25}. \end{cases}$ SOLUÇÃO: $x = \frac{1}{28-3t^2}$; $I = \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}, \sqrt{\frac{28}{3}}\right)$.

[2] Aqui, T representa o *período* do pêndulo.

[3] Lembre-se: $I = \mathbb{R}$ para cada *edo* linear homogênea de segunda ordem com coeficientes contantes.

(e) $3t^2 - x^3 + \left(2x - 3tx^2\right) x' = 0.$ SOLUÇÃO: $t^3 - tx^3 + x^2 = \text{cte}.$

(f) $2tx - 3t^2 + \left(t^2 - 2x\right) x' = 0.$ SOLUÇÃO: $t^2x - t^3 - x^2 = \text{cte}.$

(g) $x' = 5x - 5tx^3.$ SOLUÇÕES: $x = \pm\frac{\sqrt{10}e^{5t}}{\sqrt{\text{cte}+e^{10t}(10t-1)}}.$

(h) $6x' - 2x = tx^4.$ SOLUÇÃO: $x = -\frac{2^{1/3}e^{t/3}}{(\text{cte}+e^t(t-1))^{1/3}}.$

(i) $x' = 1 + \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2.$ SOLUÇÃO: $x = t\tan(\ln|t| + \text{cte}).$

(j) $4x'' + x' = 0.$ SOLUÇÃO: $x = \text{cte}_1 + \text{cte}_2 e^{-t/4}.$

(k) $x'' + 4x = 8t^2 - 20t + 8 + 5\,\text{sen}\,3t - 5\cos 3t + 24e^{-2t} + 8\cos 2t.$ SOLUÇÃO: $x = \text{cte}_1\cos 2t + \text{cte}_2\,\text{sen}\,2t + 2t^2 - 5t + 1 + \cos 3t - \text{sen}\,3t + 3e^{-2t} + 2t\,\text{sen}\,2t + \frac{\cos 2t}{2}.$

(l) $x'' + 2x' = 6e^{-2t} + 12t^2.$ SOLUÇÃO: $x = \text{cte}_1 e^{-2t} + \text{cte}_2 - 3te^{-2t} + 2t^3 - 3t^2 + 3t.$

(m) $x'' - 6x' - 7x = 13\cos 2t + 34\,\text{sen}\,2t + 8e^{-t} - 7t - 6.$
SOLUÇÃO: $x = \text{cte}_1 e^{-t} + \text{cte}_2 e^{7t} + \cos 2t - 2\,\text{sen}\,2t + t - te^{-t}.$

(n) $\begin{cases} x'' - 4x' + 4x = 2e^{2t} - 12\cos 3t - 5\,\text{sen}\,3t; \\ x(0) = -2; \\ x'(0) = 4. \end{cases}$
SOLUÇÃO: $x = -2e^{2t} + 5te^{2t} + t^2e^{2t} + \text{sen}\,3t.$

RESOLUÇÃO DO ITEM (k)

Por (2.7), página 26, basta obter $x = x_h + x_p$, onde x_h é a solução geral de $x'' + 4x = 0$ e x_p é uma solução particular da *edo*

$$\begin{aligned} x'' + 4x &= d \\ &= d_1 + d_2 + d_3 + d_4; \\ d_1(t) &= 8t^2 - 20t + 8, \\ d_2(t) &= 5\,\text{sen}\,3t - 5\cos 3t, \\ d_3(t) &= 24e^{-2t}, \\ d_4(t) &= 8\cos 2t. \end{aligned}$$

Por um lado, $r^2 + 4 = 0$ acarreta $r_\pm = 0 \pm 2i$, onde $i^2 = -1$. Assim,

$$\begin{aligned} x_h &= e^{0\cdot t}\left(\text{cte}_I\cos 2t + \text{cte}_{II}\,\text{sen}\,2t\right) \\ &= \text{cte}_I\cos 2t + \text{cte}_{II}\,\text{sen}\,2t. \end{aligned}$$

Por outro, determinando um solução particular x_{p_i} de $x'' + 4x = d_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$, temos uma solução particular

$$x_p = x_{p_1} + x_{p_2} + x_{p_3} + x_{p_4}$$

de $x'' + 4x = d$.[4] Portanto:

[4] Verifique!

$\boxed{i=1}$ Para A e B constantes,

$$x_{p_1}(t) = At^2 + Bt + C \Longrightarrow x'_{p_1}(t) = 2At + B$$
$$\Longrightarrow x''_{p_1}(t) = 2A$$

acarreta

$$x''_{p_1} + 4x_{p_1} = d_1 \Longrightarrow 4At^2 + 4Bt + 4C + 2A = 8t^2 - 20t + 8$$
$$\Longrightarrow A = 2,\ B = -5 \text{ e } C = 1.$$

Assim,

$$x_{p_1}(t) = 2t^2 - 5t + 1;$$

$\boxed{i=2}$ Para D e E constantes,

$$x_{p_2}(t) = D\cos 3t + E\,\mathrm{sen}\,3t \Longrightarrow x'_{p_2}(t) = -3D\,\mathrm{sen}\,3t + 3E\cos 3t$$
$$\Longrightarrow x''_{p_2}(t) = -9D\cos 3t - 9E\,\mathrm{sen}\,3t$$

acarreta

$$x''_{p_2} + 4x_{p_2} = d_2 \Longrightarrow -5D\cos 3t - 5E\,\mathrm{sen}\,3t = -5\cos 3t + 5\,\mathrm{sen}\,3t$$
$$\Longrightarrow D = 1 \text{ e } E = -1.$$

Assim,

$$x_{p_2}(t) = \cos 3t - \,\mathrm{sen}\,3t.$$

$\boxed{i=3}$ Para F constante,

$$x_{p_3}(t) = Fe^{-2t} \Longrightarrow x'_{p_3}(t) = -2Fe^{-2t}$$
$$\Longrightarrow x''_{p_3}(t) = 4Fe^{-2t}$$

acarreta

$$x''_{p_3} + 4x_{p_3} = d_1 \Longrightarrow 8e^{-2t} = 24e^{-2t}$$
$$\Longrightarrow F = 3.$$

Assim,

$$x_{p_3}(t) = 3e^{-2t}.$$

$\boxed{i=4}$ Para G e H constantes,

$$x_{p_4}(t) = G\cos 2t + H\,\mathrm{sen}\,2t \Longrightarrow x'_{p_4}(t) = -2G\,\mathrm{sen}\,2t + 2H\cos 2t$$
$$\Longrightarrow x''_{p_4}(t) = -4G\cos 2t - 4H\,\mathrm{sen}\,2t$$

acarreta

$$x''_{p_4} + 4x_{p_4} = 0$$
$$\neq d_4.$$

Logo, como G e H não podem ser constantes, podemos considerar

$$x_{p_4}(t) = g(t)\cos 2t + h(t)\,\mathrm{sen}\,2t,$$

onde g e h são funções a serem determinadas. Contudo, utilizaremos outro procedimento para obter x_{p_4}: a fórmula da variação de parâmetros da subseção 2.2.2. Assim, como

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} \cos 2t & \mathrm{sen}\,2t \\ -2\,\mathrm{sen}\,2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} \\ &= 2\left(\cos^2 2t + \mathrm{sen}^2 2t\right) \\ &= 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{p_4}(t) &= \cos 2t \int \frac{\mathrm{sen}\,2t(-8\cos 2t)}{1\cdot 2}\,dt + \mathrm{sen}\,2t \int \frac{\cos 2t(8\cos 2t)}{1\cdot 2}\,dt \\ &= -4\cos 2t \int \mathrm{sen}\,2t\cos 2t\,dt + 4\,\mathrm{sen}\,2t \int \cos^2 2t\,dt. \end{aligned}$$

Então, para $u = 2t$,[5]

$$\begin{aligned} x_{p_4}(t) &= -2\cos 2t \int \mathrm{sen}\,u\cos u\,du + 2\,\mathrm{sen}\,2t \int \cos^2 u\,du \\ &= -\cos 2t \int \mathrm{sen}\,2u\,du + 2\,\mathrm{sen}\,2t \int \cos^2 u\,du \\ &= \cos 2t \left(\frac{\cos 2u}{2}\right) + 2\,\mathrm{sen}\,2t \left(\frac{u}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,2u}{4}\right) \\ &= \frac{\cos 2t\cos 4t}{2} + \mathrm{sen}\,2t\left(2t + \frac{\mathrm{sen}\,4t}{2}\right) \\ &= 2t\,\mathrm{sen}\,2t + \frac{\cos 4t\cos 2t + \mathrm{sen}\,4t\,\mathrm{sen}\,2t}{2} \\ &= 2t\,\mathrm{sen}\,2t + \frac{\cos 2t}{2}. \end{aligned}$$

Note que, na segunda (respectivamente, última) igualdade, de cima para baixo, utilizamos a fórmula do "seno da soma" (respectivamente,"cosseno da diferença"). Além disso, como

$$\begin{aligned} x'_{p_4}(t) &= 2\,\mathrm{sen}\,2t + 4t\cos 2t - \mathrm{sen}\,2t \\ &= \mathrm{sen}\,2t + 4t\cos 2t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x''_{p_4}(t) &= 2\cos 2t + 4\cos 2t - 8t\,\mathrm{sen}\,2t \\ &= 6\cos 2t - 8t\,\mathrm{sen}\,2t \end{aligned}$$

e, portanto,

$$x''_{p_4} + 4x_{p_4} = d_4.$$

[5] Logo, $dt = \frac{1}{2}du$.

3. Quais das seguintes séries convergem/divergem? Justifique suas respostas e apresente os domínios e raios de convergência para as séries de potências convergentes.

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$;

   (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$;

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$;

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3+3n}{7n^3-2n^2+n}$; RESPOSTA: A série diverge.

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$;

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$;

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$;

   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$;

   (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

   (n) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$;

   (o) $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$;

   (p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nt}{2^n}$;

   (q) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n$;

   (r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n}$.

   (s) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)!(t-2)^n$.

4. Utilizando a série geométrica, obtenha representações em série de funções e I para:

   (a) $g(t) = \frac{1}{1+t^3}$;

   (b) $h(t) = \frac{2t^3}{1+t^3}$;

   (c) $\varphi(t) = \frac{t}{5-t}$;

   (d) $\phi(t) = \frac{t^2}{t-5}$;

   (e) $x(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$;

   (f) $y(t) = \frac{2}{(1-t)^3}$.[6] RESPOSTA: $y(t) = 2 + 6t + 12t^2 + \cdots$ para cada $t \in I = (-1, 1)$.

5. Verifique a analiticidade de $f(t)$ em $I = (-R, R)$ escrevendo a série de Maclaurin de f em I se:

   (a) $f(t) = \frac{1}{1-t}$, $R = 1$;

   (b) $f(t) = e^t$, $R = \infty$;

   (c) $f(t) = \ln(1+t)$, $R = 1$;

   (d) $f(t) = \operatorname{sen} t$, $R = \infty$;

   (e) $f(t) = \cos t$, $R = \infty$.

6. Resolva as *edos* seguintes via séries de Taylor em torno de zero.

   (a) $x' - x = 0$.

   (b) $x' = t^2 x$.

   (c) $x'' + x = 0$.

   (d) $x'' - tx = 0$.

   (e) $\left(t^2+1\right)x'' - 4tx' + 6x = 0$.

   (f) $\begin{cases} \left(t^2+1\right)x'' + tx' - x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$

   (g) $\begin{cases} x'' - 2tx' + x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$

7. Nos itens seguintes, dada uma função na variável t, obtenha a sua TL na variável s e, reciprocamente, dada uma função na variável s, determine a sua TLI na variável t.

   (a) $p(t) = -t^4 + 2t^3 + t - 7$.

   (b) $F(s) = \frac{s+3}{s(s-1)(s+2)}$.

   (c) $G(s) = \frac{s-1}{s^2+2s-8}$.

   (d) $X(s) = \frac{s^2}{(s+3)^3}$.

   (e) $Y(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s+5}$.

[6]Note que $\frac{dx}{dt} = y$.

(f) $S(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 3; \\ \operatorname{sen} t, & \text{se } t \geq 3. \end{cases}$

(g) $A(s) = \frac{e^{-7s}}{(s-3)^3}$.

(h) $x(t) = \operatorname{sen}^2 t$.

(i) $g(t) = t \cos t$.

(j) $h(t) = t^2 \cos(3t)$.

(k) $H(s) = \frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$.

8. Resolva, usando uma tabela de transformadas de Laplace, os sistemas seguintes:

(a) Sistema massa-mola com forçamento horizontal $f(t)$, massa m e constante de Hooke k:

$$\begin{cases} my''(t) + ky(t) &= f(t); \\ y(0) &= y_0; \\ y'(0) &= y_0'. \end{cases}$$

(b) $\begin{cases} y'' - 6y' + 15y = 2 \operatorname{sen} 3t; \\ y(0) = -1; \\ y'(0) = -4. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' + 3ty' - 6y = 2; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t-1); \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = 2x + y; & x(0) = 1; \\ y' = 3x + 4y; & y(0) = 0. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x' = 3x - 3y + 2; & x(0) = 1; \\ y' = -6x - t; & y(0) = -1. \end{cases}$