

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PROFESSOR JOSÉ RENATO RAMOS BARBOSA

NOTAS DE AULAS - EDO E DINÂMICA CLIMÁTICA

PRIMEIRA VERSÃO: 2014

ÚLTIMA VERSÃO: 2024



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Teoria de I ordem</b>	<b>5</b>
1.1	Edo linear de primeira ordem . . . . .	6
1.2	Edo não-linear de primeira ordem . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Teoria de II ordem - equação característica</b>	<b>19</b>
2.1	Edo linear de II ordem homogênea . . . . .	19
2.1.1	Linearidade das soluções . . . . .	20
2.1.2	LD e LI . . . . .	20
2.1.3	Solução geral . . . . .	21
2.2	Edo linear de II ordem não homogênea . . . . .	26
2.2.1	Método dos coeficientes indeterminados, ou, a serem determinados . . . . .	27
2.2.2	Método de variação de parâmetros . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Teoria de II ordem - séries de Taylor</b>	<b>33</b>
3.1	Séries numéricas . . . . .	33
3.1.1	Convergência ou divergência . . . . .	34
3.2	Séries de funções . . . . .	44
3.2.1	Exemplo fundamental: série geométrica . . . . .	44
3.2.2	Definição de convergência absoluta . . . . .	46
3.3	Séries de potências . . . . .	47
3.4	Séries de Taylor e funções analíticas . . . . .	50
3.4.1	Séries de potências e edo . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Transformada de Laplace (TL) e edo</b>	<b>63</b>
4.1	TL . . . . .	63
4.2	Edo e TL . . . . .	81
4.2.1	Função delta de Dirac ( $\delta(t)$ ) . . . . .	84
4.2.2	TL e sistemas . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Exercícios para os capítulos anteriores</b>	<b>89</b>
<b>6</b>	<b>Matemática e clima</b>	<b>97</b>
6.1	Climatologia . . . . .	97
6.2	Modelo de equilíbrio/balço energético terrestre ( <i>meet</i> ) . . . . .	99
6.2.1	<i>meet</i> básico . . . . .	101
6.2.2	<i>meet</i> com efeito estufa . . . . .	102
6.2.3	<i>meet</i> com múltiplos pontos de equilíbrio . . . . .	102
6.2.4	<i>meet</i> de Budiko . . . . .	104
6.2.5	Introduzindo bifurcações . . . . .	105

6.3	Oceanos e clima . . . . .	106
6.3.1	2-box model (modelo de duas caixas) para a <i>cth</i> do Atlântico Norte . .	106
<b>7</b>	<b>Teoria qualitativa</b>	<b>115</b>
7.1	Sistemas dinâmicos . . . . .	115
7.1.1	Edo (vetorial) autônoma de primeira ordem . . . . .	115

# Capítulo 1

## Teoria de I ordem

### OBJETIVO DO CURSO

Estudar *equações diferenciais ordinárias (edos)*, bem como *séries de funções, transformadas de Laplace* e *teoria qualitativa*, para aplicá-las nas *edos*.

### O QUE É UMA EDO?

Uma *equação diferencial ordinária (edo)* é uma equação que relaciona uma função incógnita, digamos  $x(t)$  ou  $y(t)$ , com algumas de suas derivadas. Determinar que funções satisfazem uma *edo* significa obter suas *soluções*.

### EXEMPLO

Seja

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0. \quad (1.1)$$

Por um lado, escrevendo (1.1) como  $1 \cdot x''(t) = -x$ , se pensarmos na derivada de segunda ordem (em relação a  $t$ ) como a aceleração  $a$  de uma partícula no instante  $t$ ,  $m = 1$  como uma massa unitária e o simétrico aditivo da função incógnita como uma força  $F$ , resistiva ao movimento, temos  $F = ma$ .<sup>1</sup> Por outro,  $\cos t$  e  $\sin t$  são soluções dessa *edo*, isto é, satisfazem a equação (1.1). Na verdade, *combinações lineares* dessas duas funções trigonométricas, ou seja,

$$x = cte_1 \cos t + cte_2 \sin t,$$

são soluções de (1.1), onde  $cte_1$  e  $cte_2$  são constantes numéricas.<sup>2</sup>

### TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO

Além de resoluções analíticas, existem ainda resoluções numéricas, que estão fora do escopo dessas notas, e qualitativas, que estudaremos posteriormente.

---

<sup>1</sup>Segunda lei de Newton.

<sup>2</sup>Verifique!

**DOMÍNIO DAS SOLUÇÕES**

É importante observar o domínio máximo da solução de uma *edo*. Em geral, esse domínio é um conjunto *aberto* da reta real, isto é, um intervalo aberto ou uma união de intervalos abertos.

**EXEMPLO**

No exemplo anterior, o domínio das soluções é  $\mathbb{R}$ , isto é, o intervalo  $(-\infty, +\infty)$ .

**TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE (TEU)**

O problema de valor inicial (*pvi*)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) & (\text{edo}) \\ x(t_0) = x_0 & (\text{condição inicial}) \end{cases}$$

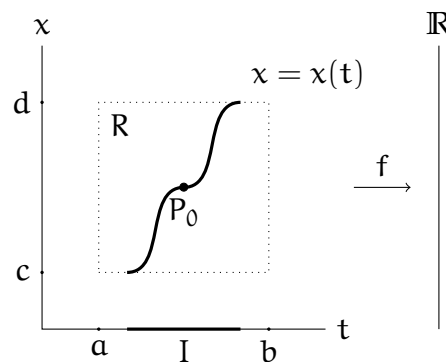
admite uma única solução  $x = x(t)$  no intervalo aberto máximo  $I$  contendo  $t_0$ , caso  $f$  e  $f_x$  sejam contínuas num retângulo aberto

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid a < t < b \text{ e } c < x < d\}$$

contendo  $P_0 = (t_0, x_0)$  com  $I \subset (a, b)$ .

Para uma representação geométrica do TEU, considere a figura 1.1.

Figura 1.1: TEU



## 1.1 Edo linear de primeira ordem

Sejam  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas, onde  $I$  é um intervalo aberto em  $\mathbb{R}$ , e o *pvi*

$$\begin{cases} x' = ax + b; & (\text{edo}) \\ x(t_0) = x_0. & (\text{condição inicial}) \end{cases}$$

Pelo TEU, considerando  $f(t, x) = a(t)x + b(t)$ , tal *pvi* admite uma única solução.

Vamos considerar os seguintes casos:

I. **a é a função nula.**

Nesse caso, temos a seguinte *solução geral*, via integração simples:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} = b(t) &\implies \int \frac{dx}{dt} dt = \int b(t) dt \\ &\implies x(t) = \int b(t) dt + cte.\end{aligned}$$

### EXEMPLOS

$$1. \begin{cases} x' = \cos t; \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Por um lado, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned}x(t) &= \int \cos t dt + cte \\ &= \sin t + cte.\end{aligned}$$

Por outro, pela condição inicial,

$$0 = x(0) = \sin 0 + cte \implies cte = 0.$$

Portanto,  $x(t) = \sin t$  é a solução desse *pvi*.<sup>3</sup>

$$2. \begin{cases} x' = \frac{1}{t}; \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Por um lado, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned}x(t) &= \int \frac{1}{t} dt + cte \\ &= \ln |t| + cte.\end{aligned}$$

Por outro lado, pela condição inicial,

$$0 = x(1) = \ln |1| + cte \implies cte = 0.$$

Portanto,  $x(t) = \ln t$  é a solução desse *pvi* com  $I = (0, \infty)$ .

II. **b é a função nula.**

---

<sup>3</sup>Note que  $I = \mathbb{R}$ .

Nesse caso, a solução geral é obtida pela seguinte resolução:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = a(t)x &\implies \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a(t) \\ &\implies \frac{d}{dt} [\ln |x(t)|] = a(t) \\ &\implies \int \frac{d}{dt} [\ln |x(t)|] dt = \int a(t) dt \\ &\implies \ln |x(t)| = \int a(t) dt + cte_1 \\ &\implies e^{\ln |x(t)|} = e^{\int a(t) dt} \cdot e^{cte_1} \\ &\implies |x(t)| = cte_2 e^{\int a(t) dt} \\ &\implies x(t) = cte e^{\int a(t) dt}. \end{aligned}$$

De cima para baixo, na primeira implicação, assumimos que  $x$  não se anula; na segunda, usamos a *regra da cadeia*; na penúltima, denotamos  $cte_2 = e^{cte_1}$ ; na última, consideramos  $cte$  como sendo qualquer uma das constantes  $\pm cte_2$ .

#### EXEMPLOS

1.  $x' = \frac{t}{1+t^2} x$ .

Se  $u = 1 + t^2$ , a solução geral segue de

$$\begin{aligned} x(t) &= cte e^{\int \frac{t}{1+t^2} dt} \\ &= cte e^{\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du} \\ &= cte e^{\ln \sqrt{1+t^2}} \\ &= cte \sqrt{1+t^2}. \end{aligned}$$

Derivando  $x = cte (1 + t^2)^{1/2}$  em relação a  $t$ , podemos obter a *edo* desse exemplo. De fato:

$$\begin{aligned} x' &= cte \cdot 2t \cdot \frac{1}{2} (1 + t^2)^{-1/2} \\ &= cte t (1 + t^2)^{-1+\frac{1}{2}} \\ &= t \cdot \frac{1}{1+t^2} \cdot cte (1 + t^2)^{1/2} \\ &= \frac{t}{1+t^2} x. \end{aligned}$$

Obviamente, uma  $cte$  (e portanto uma solução particular) é obtida se considerarmos um *pvi* composto de tal *edo* e de uma condição inicial.

2. Seja

$$\begin{cases} x' = 2tx; \\ x(0) = 1. \end{cases}$$



Por um lado, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{cte} e^{\int 2t dt} \\ &= \text{cte} e^{t^2}. \end{aligned}$$

Por outro, como

$$1 = x(0) = \text{cte} e^{0^2} \implies \text{cte} = 1,$$

a solução do *pvi* é  $x = e^{t^2}$ .<sup>4</sup>

### III. a e b podem não ser identicamente nulas

Nesse caso, sendo

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds, \quad (1.2)$$

a solução do *pvi* é dada por

$$x = e^{A(t)} \left( x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right). \quad (1.3)$$

Primeiramente, note que, as soluções de I e II são casos particulares da equação (1.3). Além disso, em relação à equação (1.2), note que,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t a(s) ds &= A(t) \\ &= A(t) - 0 \\ &= A(t) - A(t_0) \\ &= A(s) \Big|_{s=t_0}^{s=t}, \end{aligned}$$

ou seja,  $A$  é a primitiva, isto é, a integral, de  $a$ , variando de  $t_0$  até  $t$ .

Para demonstrar (1.3), como  $\frac{dA}{dt} = a(t)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ e^{-A(t)} x \right] &= e^{-A(t)} x' - a(t) e^{-A(t)} x \\ &= e^{-A(t)} [x' - a(t)x] \\ &= e^{-A(t)} b(t), \end{aligned}$$

onde usamos a hipótese  $x' - ax = b$ . Assim, integrando de  $t_0$  até  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} \left[ e^{-A(s)} x \right] ds &= \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \implies e^{-A(t)} x - e^{-A(t_0)} x(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \\ &\implies e^{-A(t)} x = x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \\ &\implies x = e^{A(t)} \left( x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right). \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Note que  $I = \mathbb{R}$ .

Embora a fórmula (1.3) possa ser usada para obter a solução do caso III, em vez de memorizá-la, apresentaremos a técnica do *fator integrante*, com a qual podemos reobter (1.3) e, concomitantemente, obter um processo de resolução.

O objetivo aqui é escrever o primeiro membro da equação

$$x' - a(t)x = b(t) \quad (1.4)$$

como a derivada de um produto, para podermos utilizar o caso I. Assim, multiplicando a equação (1.4) por  $\mu(t) \neq 0$ , temos

$$\mu(t)x' - a(t)\mu(t)x = \mu(t)b(t), \quad (1.5)$$

onde estamos supondo que  $\mu' = -a\mu$ . Nesse caso, pelo caso II,

$$\mu = cte_1 e^{\int(-a(t))dt}.$$

Aqui, sem perda de generalidade, considere  $cte_1 = 1$ . Agora, voltando à equação (1.5), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu x) = \mu b &\implies \int \frac{d}{dt}(\mu x) dt = \int \mu b dt \\ \implies \mu x &= \int \mu b dt + cte \\ \implies x &= \mu^{-1} \left( cte + \int \mu(t)b(t) dt \right). \end{aligned}$$

Portanto, utilizando alguma condição inicial  $x(t_0) = x_0$ , obtemos (1.3).

#### EXEMPLO

Seja

$$\begin{cases} tx' = -x + t^2; \\ x(1) = x_0. \end{cases}$$

Para  $t \neq 0$ , a *edo* pode ser escrita como

$$x' + \frac{1}{t}x = t.$$

Então, pelo fator integrante

$$\begin{aligned} \mu &= e^{\int \frac{1}{t} dt} \\ &= e^{\ln t} \\ &= t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu x) = \mu t &\implies \frac{d}{dt}(tx) = t^2 \\ \implies tx &= \frac{t^3}{3} + cte. \end{aligned}$$

Note que, a condição inicial foi utilizada em  $\ln|t| = \ln t$ , no cálculo de  $\mu$ ,<sup>5</sup> e, além disso, acarreta  $cte = x_0 - \frac{1}{3}$ . Portanto,

$$x = \frac{t^2}{3} + \frac{x_0 - \frac{1}{3}}{t}$$

e  $I = (0, \infty)$ .

## 1.2 Edo não-linear de primeira ordem

Sendo  $f(t, x)$  como no TEU, estudaremos essa *edo*, dos seguintes tipos:

### I. **SEPARÁVEL**

$f(t, x) = \frac{g(t)}{h(x)}$ , onde  $g$  e  $h \neq 0$  são contínuas. Além disso,  $h$  admite uma primitiva  $H$  invertível, isto é, existe  $H$  com inversa  $H^{-1}$  tal que  $\frac{dH}{dx} = h$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{g(t)}{h(x)} &\implies h(x) \frac{dx}{dt} = g(t) \\ &\implies \frac{dH}{dx} \frac{dx}{dt} = g(t) \\ &\implies \frac{d}{dt}[H(x(t))] = g(t) \\ &\implies H(x(t)) = \int g(t) dt + cte \\ &\implies x(t) = H^{-1} \left( \int g(t) dt + cte \right), \end{aligned}$$

onde  $cte$  pode ser obtida pela condição inicial de um *pvi*. Além disso, note que, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* na terceira implicação e uma integração em  $t$  na quarta.

### **EXEMPLOS**

1. 
$$\begin{cases} x' = 1 + x^2; \\ x(0) = 0. \end{cases}$$
  
Como

$$x' = \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}},$$

temos  $g(t) = 1$  e  $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$  satisfazendo as condições exigidas para essas funções. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} \frac{dx}{dt} = 1 &\implies \frac{d}{dt}[\arctan x(t)] = 1 \\ &\implies \arctan x(t) = \int 1 dt + cte \\ &\implies x(t) = \tan(t + cte). \end{aligned}$$

<sup>5</sup>De fato,  $t_0 = 1$  não pode ser ponto do domínio de  $\ln(-t)$ .

Nas duas primeiras implicações, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* e uma integração em  $t$ , respectivamente.

Aqui, a cte é obtida via

$$\begin{aligned}x(0) = 0 &\implies \tan(0 + \text{cte}) = 0 \\ &\implies \text{cte} = \arctan 0 \\ &\implies \text{cte} = 0.\end{aligned}$$

Assim,  $x = \tan t$ ,  $t \in I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,<sup>6</sup> é a solução desse *pvi*.

2.  $x' = \frac{t^2}{x^2}$ .

Analogamente à resolução do exemplo anterior, temos

$$\begin{aligned}x^2 \frac{dx}{dt} = t^2 &\implies \frac{d}{dx} \left[ \frac{x(t)^3}{3} \right] = t^2 \\ &\implies \frac{x(t)^3}{3} = \frac{t^3}{3} + \text{cte}_1 \\ &\implies x(t) = \sqrt[3]{t^3 + \text{cte}},\end{aligned}$$

onde  $\text{cte} = 3 \text{cte}_1$ . Note que, nas duas primeiras implicações, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* e uma integração em  $t$ , respectivamente.

O domínio  $I$  de  $x(t)$  é  $\mathbb{R}$ ?

Conforme o TEU,  $x'$  deve ser contínua. Portanto, como

$$x'(t) = 3t^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(t^3 + \text{cte})^2}} \rightarrow \infty$$

quando  $t \rightarrow -\sqrt[3]{\text{cte}}$ , temos uma assíntota vertical em  $t = -\sqrt[3]{\text{cte}}$ . Assim,  $I$  é igual a  $(-\infty, -\sqrt[3]{\text{cte}})$  ou a  $(-\sqrt[3]{\text{cte}}, \infty)$ .

3.  $xx' = -t$ ,  $x > 0$ .

Analogamente aos dois exemplos anteriores, temos

$$\begin{aligned}x \frac{dx}{dt} = -t &\implies \frac{d}{dx} \left[ \frac{x(t)^2}{2} \right] = -t \\ &\implies \frac{x(t)^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + \text{cte}_1 \\ &\implies x(t) = \sqrt{\text{cte} - t^2},\end{aligned}$$

onde  $\text{cte} = 2 \text{cte}_1$ . Nas duas primeiras implicações, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* e uma integração em  $t$ , respectivamente. Na última, consideramos  $x > 0$ .

Para o domínio  $I$  de  $x(t)$ , note que,  $t^2 \leq \text{cte}$ . Na verdade, como  $x \neq 0$ ,  $t^2 < \text{cte}$ , ou seja,  $t \in (-\sqrt{\text{cte}}, \sqrt{\text{cte}})$ .  $I$  também pode ser obtido, observando que

$$x(t)^2 + t^2 = (\sqrt{\text{cte}})^2$$

é a equação da circunferência de centro  $(0,0)$  e raio  $\sqrt{\text{cte}}$ . Assim, o domínio de  $x$  é dado por  $I = (-\sqrt{\text{cte}}, \sqrt{\text{cte}})$ .

---

<sup>6</sup>Embora o domínio mais geral de uma função  $\tan$  seja  $\mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{(2n-1)\pi}{2} \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ , como solução desse *pvi*, seu domínio é o maior intervalo aberto que contenha  $t_0 = 0$ .

II. **EXATA**

$f(t, x) = -\frac{M(t, x)}{N(t, x)}$ , ou seja, a *edo* pode ser escrita da forma

$$M(t, x) + N(t, x) \frac{dx}{dt} = 0, \quad (1.6)$$

e existe alguma função  $F(t, x)$  com  $F_t = M$  e  $F_x = N$  contínuas. Portanto, pela equação (1.6),

$$F_t + F_x x' = 0,$$

isto é, temos o produto interno nulo dado por

$$(F_t, F_x) \cdot (1, x') = 0,$$

ou seja, pela *regra da cadeia*, temos

$$\frac{d}{dt}(F(t, x(t))) = 0,$$

isto é,

$$F(t, x) = \text{cte}$$

é uma solução *implícita* da *edo*, para qualquer constante *cte*.

Como saber se uma *edo* da forma  $M + Nx' = 0$  é exata?

Em sendo exata, temos, via “cálculo II”,

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} \\ &= \frac{\partial N}{\partial t} \end{aligned}$$

num conjunto *aberto* de  $\mathbb{R}^2$ ,<sup>7</sup> ainda que “suficientemente pequeno”, caso  $F$  tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas nesse *aberto*. Logo,

$$M_x = N_t$$

é uma condição necessária para que a *edo* seja exata, para  $M$  e  $N$  com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto *aberto* de  $\mathbb{R}^2$ .

**EXEMPLOS**

1.  $(2tx - 3t^2) + (t^2 - 2x) \frac{dx}{dt} = 0.$

Como  $M = 2tx - 3t^2$  e  $N = t^2 - 2x$ , temos

$$M_x = 2t = N_t.$$

<sup>7</sup>Busque, no Google, informações sobre conjuntos *abertos*.

Logo, se  $F_t = M$ , então

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \int M(t, x) dt \\ &= \int (2tx - 3t^2) dt \\ &= t^2x - t^3 + g(x), \end{aligned}$$

onde  $g(x)$  é constante como resultado dessa integração em  $t$ . Portanto, se  $F_x = N$ , então

$$\begin{aligned} t^2 + \frac{dg}{dx} = t^2 - 2x &\implies g(x) = -2 \int x dx \\ &\implies g(x) = -x^2 - cte \\ &\implies F(t, x) = t^2x - t^3 - x^2 - cte \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}(F(t, x(t))) = 0 \iff (2tx - 3t^2) + (t^2 - 2x)x' = 0.$$

$$2. \begin{cases} (\cos t - t \sin t + x^2) + 2tx \frac{dx}{dt} = 0; \\ x(\pi) = 1. \end{cases}$$

Por um lado, como  $M = \cos t - t \sin t + x^2$  e  $N = 2tx$ , temos

$$M_x = 2x = N_t.$$

Portanto, se  $F_x = N$ , então

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \int N(t, x) dx \\ &= \int 2tx dx \\ &= tx^2 + h(t), \end{aligned}$$

onde  $h(t)$  é constante como resultado dessa integração em  $x$ . Assim, se  $F_t = M$ , então

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{dh}{dt} = \cos t - t \sin t + x^2 &\implies h(t) = \int \cos t dx - \int t \sin t dt \\ &\implies h(t) = \sin t + cte_1 - (-t \cos t + \sin t + cte_2) \\ &\implies h(t) = t \cos t + cte \\ &\implies F(t, x) = tx^2 + t \cos t + cte, \end{aligned}$$

onde  $cte = cte_1 - cte_2$ , e, portanto,

$$\frac{d}{dt}(F(t, x(t))) = 0 \iff (\cos t - t \sin t + x^2) + 2txx' = 0.$$

Agora, usando a condição inicial, temos  $(\pi)(1)^2 + (\pi) \cos(\pi) = cte$ , isto é,  $cte = 0$ . Logo, a solução implícita do *pvi* é

$$tx^2 + t \cos t = 0.$$

Note que, para  $t \neq 0$ , como  $x(\pi) = 1$ ,

$$x(t) = \sqrt{-\cos t}$$

tem domínio dado por  $I = (\pi/2, 3\pi/2)$ .

### SEPARÁVEL É EXATA

Qualquer *edo* separável  $x' = \frac{g(t)}{h(x)}$ , isto é,

$$-g(t) + h(x) \frac{dx}{dt} = 0,$$

é exata. De fato,

$$M(t, x) = -g(t) \text{ e } N(t, x) = h(x) \implies M_x = 0 = N_t.$$

### EXERCÍCIO

Em sendo possível, resolva os exemplos dados para as equações separáveis,<sup>8</sup> considerando, agora, aquelas equações como exatas.

### III. BERNOULLI

Nesse tipo de *edo*,

$$f(t, x) = -p(t)x + q(t)x^n,$$

onde  $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas,  $I$  é um intervalo real e  $n \in \mathbb{R}$  é constante. Assim, pelo TEU, o *pvi* associado tem solução (única). Agora, como  $f(t, x)$  é linear para  $n \in \{0, 1\}$ , considere  $n \notin \{0, 1\}$ . Assim, se  $y = x^{1-n}$ , sua derivada em relação a  $t$  é dada por  $y' = (1-n)x^{-n}x'$ . Então,

$$\begin{aligned} x' + p(t)x &= q(t)x^n \implies x^{-n}x' + p(t)x^{1-n} = q(t) \\ &\implies \left( \frac{1}{1-n} \right) y' + p(t)y = q(t), \end{aligned}$$

que é linear.

### EXEMPLOS

$$1. \begin{cases} x' + \frac{4}{t}x = t^3x^2; \\ x(2) = -1. \end{cases}$$

<sup>8</sup>Item I da seção 1.2.

Como  $n = 2$ ,  $y = x^{1-n} = x^{-1}$ , cuja derivada em relação a  $t$  é  $y' = -x^{-2}x'$ . Logo,

$$\begin{aligned} x' + \frac{4}{t}x &= t^3x^2 \implies x^{-2}x' + \frac{4}{t}x^{-1} = t^3 \\ &\implies -y' + \frac{4}{t}y = t^3 \\ &\implies y' - \frac{4}{t}y = -t^3 \\ &\implies (t^{-4}y)' = -t^{-1} \\ &\implies t^{-4}y = -\int \frac{1}{t} dt \\ &\implies y = t^4 \left( \ln \frac{1}{t} + \text{cte} \right) \\ &\implies x = \frac{1}{t^4 \left( \ln \frac{1}{t} + \text{cte} \right)}. \end{aligned}$$

Na quarta implicação, de cima para baixo, usamos o fator integrante

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int (-4/t) dt} \\ &= e^{-4 \ln t} \\ &= t^{-4}. \end{aligned}$$

No cálculo de  $\mu(t)$ ,  $\ln|t| = \ln t$ , pela condição inicial.<sup>9</sup> Assim, o domínio de  $x(t)$  só pode ter pontos  $t > 0$  e

$$-1 = \frac{1}{2^4(\ln(1/2) + \text{cte})} \implies \text{cte} = \ln 2 - \frac{1}{16}.$$

Portanto, a solução do *pvi* é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{t^4 \left( \ln \frac{1}{t} + \ln 2 - \frac{1}{16} \right)} \\ &= \frac{1}{t^4 \left( \ln \frac{2}{t} - \frac{1}{16} \right)}, \end{aligned}$$

cujo domínio, como  $t > 0$  e

$$\begin{aligned} \ln \frac{2}{t} - \frac{1}{16} &= 0 \implies \ln \frac{2}{t} = \frac{1}{16} \\ &\implies \frac{2}{t} = e^{1/16} \\ &\implies t = 2e^{-1/16}, \end{aligned}$$

é dado por  $(2e^{-1/16}, \infty)$ .<sup>10</sup>

<sup>9</sup>De fato,  $t_0 = 2$  não pode ser ponto do domínio de  $\ln(-t)$ .

<sup>10</sup>A outra possibilidade para o domínio de  $x(t)$ ,  $(0, 2e^{-1/16})$ , é descartada pela condição inicial.



$$2. \begin{cases} x' = 5x + e^{-2t}x^{-2}; \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

Como  $n = -2$ ,  $y = x^{1-n} = x^3$ , cuja derivada em relação a  $t$  é  $y' = 3x^2x'$ . Temos, portanto,

$$\begin{aligned} x' - 5x &= e^{-2t}x^{-2} \implies x^2x' - 5x^3 = e^{-2t} \\ &\implies \frac{1}{3}y' - 5y = e^{-2t} \\ &\implies y' - 15y = 3e^{-2t} \\ &\implies (e^{-15t}y)' = 3e^{-17t} \\ &\implies e^{-15t}y = 3 \int e^{-17t} dt \\ &\implies e^{-15t}y = -\frac{3}{17}e^{-17t} + \text{cte} \\ &\implies y = e^{15t}\text{cte} - \frac{3}{17}e^{-2t} \\ &\implies x = \left( e^{15t}\text{cte} - \frac{3}{17}e^{-2t} \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Na quarta implicação, de cima para baixo, usamos o fator integrante

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int (-15)dt} \\ &= e^{-15t}. \end{aligned}$$

Agora, pela condição inicial, temos

$$2 = \left( e^0\text{cte} - \frac{3}{17}e^0 \right)^{1/3} \implies \text{cte} = \frac{139}{17}.$$

Temos, então, a solução

$$x = \sqrt[3]{\frac{139e^{15t} - 3e^{-2t}}{17}}$$

para o *pvi*, com domínio dado por  $I = \mathbb{R}$ .

#### IV. **HOMOGÊNEA**

Para esse tipo de *edo*,  $f(t, x) = F\left(\frac{x}{t}\right)$  e

$$\begin{aligned} v &= \frac{x}{t} \implies x = tv \text{ e } x' = F(v) \\ &\implies v + tv' = x' = F(v) \\ &\implies tv' = F(v) - v \\ &\implies \frac{1}{F(v) - v} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{t} \end{aligned}$$

que é uma *edo* separável. Além disso, note que, nenhuma solução  $x = x(t)$  pode interceptar o eixo vertical  $t = 0$ .

**EXEMPLO**

$$\begin{cases} txx' + 4t^2 + x^2 = 0; \\ x(2) = -7. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{t}x' &= -4 - \left(\frac{x}{t}\right)^2 \implies vx' = -4 - v^2 \\ &\implies v(v + tv') = -4 - v^2 \\ &\implies vt v' = -4 - 2v^2 \\ &\implies t \frac{dv}{dt} = -\frac{4 + 2v^2}{v} \\ &\implies \frac{v}{4 + 2v^2} dv = -\frac{1}{t} dt \\ &\implies \frac{1}{4} \ln(4 + 2v^2) = -\ln t + \text{cte}_1 \\ &\implies (4 + 2v^2)^{1/4} = \text{cte}_2 \frac{1}{t} \\ &\implies 4 + 2v^2 = \frac{\text{cte}}{t^4} \\ &\implies v^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{cte}}{t^4} - 4 \right) \\ &\implies x^2 = \frac{1}{2} t^2 \left( \frac{\text{cte} - 4t^4}{t^4} \right). \end{aligned}$$

Na sexta implicação, de cima para baixo, a condição inicial  $t_0 = 2$  elimina a possibilidade do uso de  $\ln(-t)$  e indica que o domínio de  $x(t)$  só contém  $t > 0$ . Ainda, pela condição inicial, temos

$$(-7)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \left( \frac{\text{cte} - 4 \cdot 2^4}{2^4} \right) \implies \text{cte} = 456.$$

Portanto, como  $x_0 = -7$  e  $t > 0$ , temos

$$x = -\sqrt{\frac{228 - 2t^4}{t^2}},$$

onde

$$\begin{aligned} 228 - 2t^4 \geq 0 &\implies t^4 \leq 114 \\ &\implies 0 < t \leq \sqrt[4]{114}. \end{aligned}$$

# Capítulo 2

## Teoria de II ordem - equação característica

Uma *edo linear de segunda ordem* é dada por

$$a(t)\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x(t) = d(t), \quad (2.1)$$

onde as funções reais  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são contínuas num intervalo  $I$ ,  $a \neq 0$  e qualquer *solução* de (2.1), ou seja, qualquer função duas vezes diferenciável  $x(t)$  que satisfaça a equação (2.1), também é contínua em  $I$ .

### LEI DE NEWTON

Considerando  $x''$ ,  $x'$  e  $x$  como a aceleração, a velocidade e a posição de um objeto de massa unitária  $m$  no instante  $t$ , respectivamente, e uma força

$$F(t, x, x') = -\frac{b}{a}x' - \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$$

atuando nesse objeto, a *edo* (2.1), reescrita como

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

representa a *segunda lei de Newton*.

### 2.1 Edo linear de II ordem homogênea

A *edo* (2.1) é dita *homogênea* se  $d(t) = 0$  para cada  $t \in I$ , ou seja,

$$a(t)\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x(t) = 0. \quad (2.2)$$

### EXEMPLO

$x'' + x' - 6x = 0$  é homogênea, com  $a(t) = b(t) = 1$  e  $c(t) = -6$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

### 2.1.1 Linearidade das soluções

Combinações lineares de soluções da equação (2.2) também são soluções dessa equação, isto é, se  $x_1$  e  $x_2$  satisfazem (2.2), então

$$x = cte_1 x_1 + cte_2 x_2 \quad (2.3)$$

também a satisfaz.

De fato, Se

$$ax_1'' + bx_1' + cx_1 = 0 \text{ e } ax_2'' + bx_2' + cx_2 = 0,$$

então, pela *linearidade* das derivadas do “cálculo 1”,

$$\begin{aligned} ax'' + bx' + cx &= a(cte_1 x_1 + cte_2 x_2)'' + b(cte_1 x_1 + cte_2 x_2)' + c(cte_1 x_1 + cte_2 x_2) \\ &= cte_1 (ax_1'' + bx_1' + cx_1) + cte_2 (ax_2'' + bx_2' + cx_2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $x$  também satisfaz (2.2).

### 2.1.2 LD e LI

Duas funções são ditas LD quando são múltiplas escalares uma da outra. Caso contrário, são ditas LI.

#### EXEMPLOS

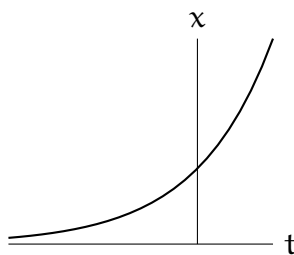
- $x_1(t) = t^2$  e  $x_2(t) = \frac{t^2}{2}$  são LD pois  $x_1 = 2x_2$ .
- $x_1 = e^t$  e  $x_2 = te^t$  são LI. De fato, supondo serem LD, existe uma constante  $\alpha$  tal que, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} x_1 = \alpha x_2 &\implies e^t = \alpha te^t \\ &\implies (\alpha t - 1)e^t = 0 \\ &\implies \alpha t = 1, \end{aligned}$$

que não é uma proposição verdadeira para, por exemplo,  $t = 0$ .

Note que, a terceira implicação, de cima para baixo, segue de  $e^t \neq 0$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ , conforme a figura 2.1.

Figura 2.1: A reta  $x = 0$  é uma assíntota horizontal do gráfico de  $x = e^t$



Portanto, para quaisquer  $r, t \in \mathbb{R}$ , com  $r$  fixo e  $t$  variável,

$$e^{rt} = (e^t)^r \neq 0$$

e, analogamente,  $e^{rt}$  e  $te^{rt}$  são LI.

### 2.1.3 Solução geral

Via *álgebra linear*, demonstra-se que, se  $x_1$  e  $x_2$  são soluções LI da equação (2.2),<sup>1</sup> então qualquer outra solução dessa equação é dada por (2.3).<sup>2</sup>

Agora, sejam  $a, b, c$  e  $r \neq 0$  constantes e suponha que  $x(t) = e^{rt}$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$ , é solução da equação (2.2). Portanto, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 &\iff (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \\ &\iff ar^2 + br + c = 0, \end{aligned}$$

chamada de *equação característica* de (2.2), com raízes dadas por

$$r_{\pm} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Analisaremos os seguintes casos:

I.  $b^2 - 4ac > 0$

Nesse caso,  $r_{\pm}$  são reais e distintas e  $x_{\pm}(t) = e^{r_{\pm}t}$  são soluções LI de (2.2).<sup>3</sup> Portanto, simplificando a notação dos índices via  $\{+, -\} = \{1, 2\}$ ,

$$x(t) = cte_1e^{r_1t} + cte_2e^{r_2t}$$

é uma solução geral de (2.2), conforme (2.3).

#### EXEMPLOS

1. Para  $x'' + x' - 6x = 0$ , como  $a = b = 1$  e  $c = -6$ ,  $r^2 + r - 6 = 0$ . Portanto, como  $r \in \{-3, 2\}$ ,

$$x(t) = cte_1e^{2t} + cte_2e^{-3t}$$

é uma solução geral de  $x'' + x' - 6x = 0$ .

<sup>1</sup>Cf. p. 19.

<sup>2</sup>Cf. p. 20.

<sup>3</sup>De fato, supondo serem LD, existe alguma constante  $\alpha$  tal que, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{r_+t} = \alpha e^{r_-t} \iff e^{(r_+ - r_-)t} = \alpha,$$

que não é uma proposição verdadeira pois, como  $r_+ - r_- \neq 0$ , a exponencial do primeiro membro assume infinitos valores, enquanto  $\alpha$ , no segundo membro, é constante.

2. Para  $3x'' + x' - x = 0$ , como  $a = 3$  e  $b = 1$  e  $c = -1$ ,  $3r^2 + r - 1 = 0$ . Portanto, como

$$r \in \left\{ \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \right\},$$

$$x(t) = cte_1 e^{\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{6}\right)t} + cte_2 e^{\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right)t}$$

é uma solução geral de  $3x'' + x' - x = 0$ .

II.  $b^2 - 4ac = 0$

Nesse caso,  $r_-$  e  $r_+$  são raízes reais e iguais a

$$r = -\frac{b}{2a} \quad (2.4)$$

e  $x_1(t) = e^{rt}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é solução de (2.2).<sup>4</sup>

Verificaremos, agora, que  $x_2(t) = te^{rt}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , também satisfaz (2.2). De fato,

$$\begin{aligned} ax_2'' + bx_2' + cx_2 &= a(2re^{rt} + r^2te^{rt}) + b(e^{rt} + rte^{rt}) + cte^{rt} \\ &= e^{rt}(2ar + b) + te^{rt}(ar^2 + br + c) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois (2.4) é raiz da equação  $ar^2 + br + c = 0$ . Por fim, como  $x_1$  e  $x_2$  são LI,<sup>5</sup>

$$x(t) = cte_1 e^{rt} + cte_2 te^{rt}$$

é uma solução geral de (2.2).

### EXEMPLO

Para  $4x'' + 12x' + 9x = 0$ , como  $a = 4$ ,  $b = 12$  e  $c = 9$ ,  $4r^2 + 12r + 9 = 0$ . Portanto, como  $r = -\frac{3}{2}$ ,

$$x(t) = cte_1 e^{-3t/2} + cte_2 te^{-3t/2}$$

é uma solução geral de  $4x'' + 12x' + 9x = 0$ .

III.  $b^2 - 4ac < 0$

Nesse caso, para obter uma solução geral, precisamos de algumas propriedades das *exponenciais complexas*,<sup>6</sup> inclusive da *fórmula de Euler*, dada por

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad (2.5)$$

<sup>4</sup>Cf. p. 19.

<sup>5</sup>Conforme demonstrado na subseção 2.1.2.

<sup>6</sup>Tal assunto é parte importante de um curso de *variáveis complexas* e, para uma rápida revisão do conjunto  $\mathbb{C}$  dos *números complexos*, confira meu livro, *LIÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR*, disponibilizado em [www.ufpr.br/~jrrb](http://www.ufpr.br/~jrrb).

onde o quadrado da *unidade imaginária* é igual ao número real  $-1$ , ou seja,  $i \in \mathbb{C}$  e

$$i^2 = -1 \in \mathbb{R}.$$

Além disso, as raízes da equação característica são dadas por

$$r_{\pm} = \alpha \pm i\beta,$$

onde

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \text{ e } \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a},$$

e, analogamente ao caso I,<sup>7</sup>  $x_{\pm} = e^{r_{\pm}t}$  são soluções LI de (2.2),<sup>8</sup> acarretando que

$$x(t) = cte_1 e^{r_1 t} + cte_2 e^{r_2 t}$$

é uma solução geral de (2.2) em  $\mathbb{C}$ .<sup>9</sup> Assim, pelas propriedades supracitadas e via (2.5), uma solução geral de (2.2) em  $\mathbb{R}$  é dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= cte_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + cte_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= cte_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} + cte_2 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} \\ &= e^{\alpha t} (cte_1 e^{i\beta t} + cte_2 e^{-i\beta t}) \\ &= e^{\alpha t} (cte_1 (\cos \beta t + i \sin \beta t) + cte_2 (\cos \beta t - i \sin \beta t)) \\ &= e^{\alpha t} ((cte_1 + cte_2) \cos \beta t + i (cte_1 - cte_2) \sin \beta t) \\ &= e^{\alpha t} (cte_I \cos \beta t + cte_{II} \sin \beta t), \end{aligned}$$

onde  $cte_I = cte_1 + cte_2$  e  $cte_{II} = i(cte_1 - cte_2)$ , e, como  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , podemos considerar constantes  $cte_I$  e  $cte_{II}$  reais.

#### EXEMPLO

Para  $x'' - 6x' + 13x = 0$ , como  $a = 1$ ,  $b = -6$  e  $c = 13$ ,  $r^2 - 6r + 13 = 0$ . Portanto, como  $r_{\pm} = 3 \pm 2i$ , ou seja,  $\alpha = 3$  e  $\beta = 2$ ,

$$x(t) = e^{3t} (cte_I \cos 2t + cte_{II} \sin 2t)$$

é uma solução geral de  $x'' - 6x' + 13x = 0$ .

#### TEU PARA UMA EDO LINEAR DE II ORDEM

<sup>7</sup>Cf. p. 21.

<sup>8</sup>Cf. p. 19.

<sup>9</sup>Como no caso I supracitado, para simplificar a notação dos índices, denotamos

$$\{-, +\} = \{1, 2\}.$$

Assim como para as equações de I ordem do capítulo 1, existe uma única solução para o seguinte *pvi*:

$$\begin{cases} a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0; \\ x(t_0) = x_0; \\ x'(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Note que, juntamente com (2.2), temos, agora, duas condições iniciais: “posição e velocidade em  $t = t_0$  unidades de tempo”.

### EXEMPLOS

1.

$$\begin{cases} x'' + x' - 6x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

Uma solução geral da *edo*, conforme o caso I da subseção 2.1.3,<sup>10</sup> é dada por

$$x(t) = cte_1 e^{2t} + cte_2 e^{-3t}, t \in \mathbb{R}.$$

Essa solução, juntamente com

$$x'(t) = 2 cte_1 e^{2t} - 3 cte_2 e^{-3t}, t \in \mathbb{R},$$

e as condições iniciais do *pvi*, determinam  $cte_1$  e  $cte_2$ . De fato, de

$$\begin{cases} cte_1 + cte_2 = x(0) = 0, \\ 2 cte_1 - 3 cte_2 = x'(0) = 1, \end{cases}$$

temos  $cte_1 = \frac{1}{5}$  e  $cte_2 = -\frac{1}{5}$ . Portanto, a solução do *pvi* é dada por

$$x(t) = \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{2}{5} e^{-3t}, t \in \mathbb{R}.$$

2. **SISTEMA MASSA-MOLA SEM FORÇAMENTO**<sup>11</sup>

$$\begin{cases} x'' + x = 0; \\ x(0) = 2; \\ x'(0) = 3. \end{cases}$$

Como  $r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i$ , uma solução geral da *edo* é dada por

$$x(t) = cte_I \cos t + cte_{II} \sin t, t \in \mathbb{R}.$$

Essa solução, juntamente com

$$x'(t) = -cte_I \sin t + cte_{II} \cos t, t \in \mathbb{R},$$

e as condições iniciais do *pvi*, determinam  $cte_I$  e  $cte_{II}$ . De fato, como

$$\begin{cases} cte_I = x(0) = 2, \\ cte_{II} = x'(0) = 3, \end{cases}$$

a solução do *pvi* é dada por

$$x(t) = 2 \cos t + 3 \sin t, t \in \mathbb{R}.$$

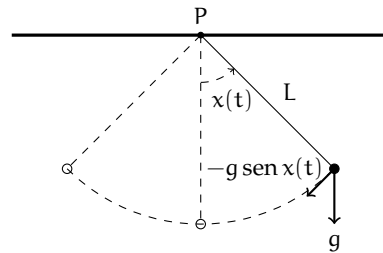
<sup>10</sup>Cf. p. 21.

<sup>11</sup>Na figura 4.4, página 81, está ilustrado um sistema massa-mola com forçamento.



## 3. PÊNDULO SIMPLES

Figura 2.2: Pêndulo simples



Conforme a figura 2.2, considere um pêndulo oscilando livremente, sem sofrer resistência do ar, em torno de um ponto fixo  $P$ , onde não há atrito. O pêndulo é formado por uma haste rígida de massa desprezível, medindo  $L$  unidades de comprimento, conectada a uma massa unitária puntiforme, fixada na extremidade oposta a  $P$ , e oscila sob a ação da aceleração da gravidade  $g$ . Seja  $x(t)$  a *amplitude* do pêndulo, ou seja, o ângulo entre o pêndulo e a sua posição vertical de repouso.<sup>12</sup> Assim, a força atuando sobre a massa supracitada é dada por

$$-g \operatorname{sen} x(t).$$

O *período*  $T$  é o tempo necessário para o pêndulo completar um *ciclo*, isto é, uma oscilação para a esquerda seguida de uma para a direita. Para oscilações “suficientemente pequenas”, temos  $\operatorname{sen} x(t) \approx x(t)$ , ou seja,

$$-g \operatorname{sen} x(t) \approx -gx(t),$$

e

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.<sup>13</sup>$$

Pela *segunda lei de Newton*, como esse movimento oscilatório depende apenas de  $g$  e  $L$ , temos a *edo*

$$Lx'' + g \operatorname{sen} x(t) = 0,$$

que, para oscilações “suficientemente pequenas”, pode ser escrita como

$$Lx'' + gx = 0,$$

ou seja,

$$x'' + \frac{g}{L}x = 0,$$

com solução geral dada por

$$x(t) = \operatorname{cte}_I \cos \left( \left( \sqrt{g/L} \right) t \right) + \operatorname{cte}_{II} \operatorname{sen} \left( \left( \sqrt{g/L} \right) t \right), t \in \mathbb{R}.$$

<sup>12</sup>Caso houvesse atrito e/ou resistência do ar, a amplitude diminuiria com o tempo, até que o movimento oscilatório cessasse na posição de repouso do pêndulo.

<sup>13</sup>Pesquise no *Google!*

Portanto, para condições iniciais  $x_0$  “suficientemente pequenas”, podemos considerar o *pvi*

$$\begin{cases} x'' + \frac{g}{L}x = 0; \\ x(T) = x_0; \\ x'(T) = 0. \end{cases}$$

Utilizando a solução geral supracitada, juntamente com as condições iniciais desse *pvi*, temos

$$\begin{cases} \text{cte}_I \cos(T\sqrt{g/L}) + \text{cte}_{II} \sin(T\sqrt{g/L}) = x_0; \\ \sqrt{g/L}(-\text{cte}_I \sin(T\sqrt{g/L})) + \sqrt{g/L}(\text{cte}_{II} \cos(T\sqrt{g/L})) = 0, \text{ ou seja,} \\ -\text{cte}_I \sin(T\sqrt{g/L}) + \text{cte}_{II} \cos(T\sqrt{g/L}) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Multiplicando a primeira equação, de cima para baixo, de (2.6) por  $\cos(T\sqrt{g/L})$ , a última por  $-\sin(T\sqrt{g/L})$  e somando as equações obtidas dessas multiplicações, obtemos

$$\text{cte}_I = x_0 \cos(T\sqrt{g/L}).$$

Substituindo essa constante na última equação de (2.6), temos

$$-x_0 \sin(T\sqrt{g/L}) + \text{cte}_{II} = 0.$$

Assim, a solução do *pvi* supracitado é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \left( \cos(T\sqrt{g/L}) \cos\left(\left(\sqrt{g/L}\right)t\right) + \sin(T\sqrt{g/L}) \sin\left(\left(\sqrt{g/L}\right)t\right) \right) \\ &= x_0 \cos\left(\left(T-t\right)\sqrt{g/L}\right). \end{aligned}$$

## 2.2 Edo linear de II ordem não homogênea

Essa *edo* é dada por (2.1),<sup>14</sup> agora com  $d \neq 0$ .

### SOLUÇÃO GERAL

Se  $x_h$  é uma solução geral da *edo* homogênea associada à *edo* (2.1), isto é, solução geral de (2.2),<sup>15</sup> e  $x_p$  é uma solução particular de (2.1), então

$$x = x_h + x_p \quad (2.7)$$

é uma solução geral de (2.1).

De fato,

$$\begin{aligned} ax'' + bx' + cx &= a(x_h + x_p)'' + b(x_h + x_p)' + c(x_h + x_p) \\ &= a(x_h'' + x_p'') + b(x_h' + x_p') + c(x_h + x_p) \\ &= ax_h'' + bx_h' + cx_h + ax_p'' + bx_p' + cx_p \\ &= 0 + d \\ &= d. \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Cf. p. 19.

<sup>15</sup>Idem.

SENDO  $a$ ,  $b$  E  $c$  CONSTANTES, COMO OBTER  $x_p$ ?

Considere, por exemplo,  $a = 1$ ,  $b = -3$  e  $c = 2$ , ou seja,

$$x'' - 3x' + 2x = d,$$

e  $d(t)$  dada por uma das seguintes funções:

1.  $e^{3t}$ ;
2.  $2t^2 + 4t + 1$ ;
3.  $\cos t$ ;
4.  $e^{3t} + 2t^2 + 4t + 1 + \cos t$ .

Para cada  $d$ , como

$$\begin{aligned} x'' - 3x' + 2x = 0 &\iff r^2 - 3r + 2 = 0 \\ &\iff r \in \{1, 2\}, \end{aligned}$$

uma solução geral é dada por (2.7), com

$$x_h = cte_1 e^t + cte_2 e^{2t}.$$

Agora, para determinar uma solução particular  $x_p$ , dependendo da  $d$  considerada, usaremos o método seguinte:

### 2.2.1 Método dos coeficientes indeterminados, ou, a serem determinados

Nesse método, testamos “candidatas” para  $x_p$ , conforme o tipo de função  $d$  dada.

1. Para  $d(t) = e^{3t}$ , testaremos  $x_p = Ae^{3t}$ ,<sup>16</sup> onde  $A$  é o coeficiente a ser determinado. Assim, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} x_p'' - 3x_p' + 2x_p = e^{3t} &\implies (Ae^{3t})'' - 3(Ae^{3t})' + 2Ae^{3t} = e^{3t} \\ &\implies 9Ae^{3t} - 3(3Ae^{3t}) + 2Ae^{3t} = e^{3t} \\ &\implies (2A - 1)e^{3t} = 0. \end{aligned}$$

Então,  $2A - 1 = 0$ , ou seja,  $A = \frac{1}{2}$ . Portanto, uma solução geral de  $x'' - 3x' + 2x = e^{3t}$  é dada por

$$x = cte_1 e^t + cte_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}, t \in \mathbb{R}.$$

<sup>16</sup>Por quê?

2. Para  $d(t) = 2t^2 + 4t + 1$ , testaremos  $x_p = At^2 + Bt + C$ ,<sup>17</sup> onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os coeficientes a serem determinados. Assim, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} x_p'' - 3x_p' + 2x_p = 2t^2 + 4t + 1 &\implies (At^2 + Bt + C)'' - 3(At^2 + Bt + C)' \\ &\quad + 2(At^2 + Bt + C) = 2t^2 + 4t + 1 \\ &\implies 2A - 3(2At + B) + 2At^2 + 2Bt + 2C = 2t^2 + 4t + 1 \\ &\implies (2A - 2)t^2 + (-6A + 2B - 4)t \\ &\quad + 2A - 3B + 2C - 1 = 0. \end{aligned}$$

Então,  $2A = 2$ ,  $-6A + 2B = 4$  e  $2A - 3B + 2C = 1$ , ou seja,  $A = 1$ ,  $B = 5$  e  $C = 7$ . Portanto, uma solução geral de  $x'' - 3x' + 2x = 2t^2 + 4t + 1$  é dada por

$$x = cte_1 e^t + cte_2 e^{2t} + t^2 + 5t + 7, t \in \mathbb{R}.$$

3. Para  $d(t) = \cos t$ , testaremos  $x_p = A \cos t + B \sin t$ ,<sup>18</sup> onde  $A$  e  $B$  são os coeficientes a serem determinados. Assim, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} x_p'' - 3x_p' + 2x_p = \cos t &\implies (A \cos t + B \sin t)'' - 3(A \cos t + B \sin t)' \\ &\quad + 2(A \cos t + B \sin t) = \cos t \\ &\implies -A \cos t - B \sin t - 3(-A \sin t + B \cos t) \\ &\quad + 2A \cos t + 2B \sin t = \cos t \\ &\implies (A - 3B - 1) \cos t + (3A + B) \sin t = 0. \end{aligned}$$

Então,  $A - 3B = 1$  e  $3A + B = 0$ , ou seja,  $A = \frac{1}{10}$  e  $B = -\frac{3}{10}$ . Portanto, uma solução geral de  $x'' - 3x' + 2x = \cos t$  é dada por

$$x = cte_1 e^t + cte_2 e^{2t} + \frac{1}{10} \cos t - \frac{3}{10} \sin t, t \in \mathbb{R}.$$

4. Analogamente aos itens 1, 2 e 3 da subseção 2.2.1, para  $d(t) = e^{3t} + 2t^2 + 4t + 1 + \cos t$ , uma "candidata" para solução particular pode ser escrita como

$$x_p = Ae^{3t} + Bt^2 + Ct + D + E \cos t + F \sin t.$$

A resolução do sistema nas variáveis  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$ , fica como exercício.<sup>19</sup>

### EXEMPLO

Considere a *edo*

$$x'' - 6x' + 9x = e^{3t}. \quad (2.8)$$

<sup>17</sup>Idem.

<sup>18</sup>Idem.

<sup>19</sup>Resolvendo o sistema supracitado, obtemos

$$A = \frac{1}{2}, B = 1, C = 5, D = 7, E = \frac{1}{10} \text{ e } F = -\frac{3}{10}.$$

Portanto, uma solução particular do item 4 é a soma das soluções particulares obtidas nos itens 1, 2 e 3 supracitados.

Assim, como

$$\begin{aligned}x'' - 6x' + 9x = 0 &\iff r^2 - 6r + 9 = 0 \\ &\iff r = 3,\end{aligned}$$

uma solução geral da equação homogênea associada a (2.8) é dada por

$$x_h = \text{cte}_1 e^{3t} + \text{cte}_2 t e^{3t}.$$

Agora, escolhendo  $x_p = Ae^{3t}$  como “candidata” a uma solução particular de (2.8), temos, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}x_p'' - 6x_p' + 9x_p = e^{3t} &\implies 9Ae^{3t} - 6(3Ae^{3t}) + 9Ae^{3t} = e^{3t} \\ &\implies (9 - 18 + 9 - 1)e^{3t} = 0 \\ &\implies e^{3t} = 0,\end{aligned}$$

que é uma igualdade inválida. Tentaremos, então,

$$x_p(t) = y(t)e^{3t},$$

onde  $y$  é uma função a ser determinada. Logo, para cada  $t$  admissível,

$$\begin{aligned}x_p'' - 6x_p' + 9x_p = e^{3t} &\implies (y'' + 6y' + 9y)e^{3t} - 6(y' + 3y)e^{3t} + 9ye^{3t} = e^{3t} \\ &\implies (y'' - 1)e^{3t} = 0 \\ &\implies y'' = 1 \\ &\implies y'(t) = t + \text{cte}_3 \\ &\implies y(t) = \frac{t^2}{2} + \text{cte}_3 t + \text{cte}_4.\end{aligned}$$

Para uma solução particular, considere  $\text{cte}_i = 0$ ,  $i = 3, 4$ . Portanto, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$x_p(t) = \frac{t^2}{2} e^{3t}. \quad (2.9)$$

Agora, estudaremos outro método para obter uma solução particular, que também funciona caso  $d(t)$  admita termos que não sejam exponenciais, polinomiais ou trigonométricos.

### 2.2.2 Método de variação de parâmetros

#### WRONSKIANO DE $x_1(t)$ E $x_2(t)$

É definido como o determinante

$$W(t) := \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix},$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , com  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  diferenciáveis.

**EXEMPLO**

Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , se  $x_1(t) = e^{3t}$  e  $x_2(t) = te^{3t}$ , então

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t} + 3te^{3t} \end{vmatrix} \\ &= e^{3t}(e^{3t} + te^{3t}) - te^{3t}e^{3t} \\ &= e^{6t}. \end{aligned}$$

**FÓRMULA DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS**

Se  $x_1$  e  $x_2$  são soluções li da equação homogênea (2.2) e  $W(t)$  é o wronskiano dessas funções, pode ser demonstrado que

$$x_p(t) = x_1(t) \left( \int \frac{x_2(t)(-d(t))}{a(t)W(t)} dt \right) + x_2(t) \left( \int \frac{x_1(t)d(t)}{a(t)W(t)} dt \right)$$

é uma solução particular de (2.1).<sup>20</sup>

**EXEMPLOS**

1. Para a *edo* (2.8),<sup>21</sup>

$$x(t) = cte_1 e^{3t} + cte_2 te^{3t} + x_p(t)$$

é solução geral e  $x_p$  é uma de suas soluções particulares. Como  $a(t) = 1$  e, pelo exemplo supracitado,  $W(t) = e^{6t}$ , temos

$$\begin{aligned} x_p(t) &= e^{3t} \left( \int \frac{te^{3t}(-e^{3t})}{e^{6t}} dt \right) + te^{3t} \left( \int \frac{e^{3t}e^{3t}}{e^{6t}} dt \right) \\ &= e^{3t} \left( - \int t dt \right) + te^{3t} \left( \int 1 dt \right) \\ &= e^{3t} \left( -\frac{t^2}{2} \right) + te^{3t}t \\ &= \frac{t^2}{2} e^{3t}, \end{aligned}$$

coincidindo com (2.9).<sup>22</sup>

2. Para a *edo*

$$x'' + x = \sec t,$$

como  $r^2 + 1 = 0$ , isto é,  $r = \pm i$ , ou seja,  $r = 0 \pm 1 \cdot i$ ,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{0 \cdot t} (cte_I \cos(1 \cdot t) + cte_{II} \sen(1 \cdot t)) + x_p(t) \\ &= cte_I \cos t + cte_{II} \sen t + x_p(t) \end{aligned}$$

<sup>20</sup>Cf. p. 19.

<sup>21</sup>Cf. p. 28.

<sup>22</sup>Cf. p. 29.

é solução geral e  $x_p$  é uma de suas soluções particulares. Como  $a(t) = 1$  e  $W(t) = 1$ ,<sup>23</sup> temos

$$\begin{aligned}x_p(t) &= \cos t \left( \int \sin t (-\sec t) dt \right) + \sin t \left( \int \cos t \sec t dt \right) \\ &= \cos t \left( \int (-\tan t) dt \right) + \sin t \left( \int 1 dt \right) \\ &= \cos t \ln |\cos t| + t \sin t.\end{aligned}$$

Na segunda igualdade, utilizamos  $\sec t = \frac{1}{\cos t}$ . Na última, de cima para baixo, utilizamos

$$\begin{aligned}\int (-\tan t) dt &= \int \frac{(-\sin t)}{\cos t} dt \quad (u = \cos t \implies du = -\sin t dt) \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln |u| + cte \\ &= \ln |\cos t| + cte.\end{aligned}$$

Para uma solução particular, considere  $cte = 0$ .

---

<sup>23</sup>Verifique!





# Capítulo 3

## Teoria de II ordem - séries de Taylor

### 3.1 Séries numéricas

Seja  $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$  uma sequência numérica. A expressão

$$a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (3.1)$$

é uma *série* associada à sequência supracitada. Nesse caso,

$$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

é a *n-ésima soma parcial* dessa série.

#### EXEMPLO

Para a *progressão geométrica* (pg)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad (3.2)$$

temos as seguintes somas parciais:

$$s_1 = \frac{1}{2} = 0,5, \quad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,75, \quad s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0,875, \quad \dots$$

#### OBSERVAÇÃO

O primeiro índice de uma série pode ser algum inteiro não-negativo  $n_0 \neq 1$ . Nesse caso, podemos representá-la por

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

#### EXEMPLO

Acrescentando o número 1 a (3.2), temos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Retirando o número 1/2 de (3.2), temos

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

### 3.1.1 Convergência ou divergência

Suponha que a sequência

$$(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$$

de somas parciais converge para o número  $s$ , ou seja, existe o limite dessa sequência e esse limite é igual a  $s$ . Nesse caso, dizemos que a série  $a_1 + a_2 + \cdots$  converge (para  $s$ ) e denotamos

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \cdots + a_n) \\ &=: \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Caso o limite  $s$  não exista,  $a_1 + a_2 + \cdots$  é dita *divergente*.

#### EXEMPLO

Considere a pg

$$(a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, aq^n, \dots)$$

com razão  $q \neq 0$  e primeiro termo  $a_1 = a \neq 0$ .<sup>1</sup> Temos, então, os seguintes casos:

#### DIVERGÊNCIA PARA $|q| \geq 1$

Nesse caso, temos os seguintes subcasos:

$$q = 1$$

Aqui, as somas parciais são dadas por

$$s_1 = a_1 = a, \quad s_2 = a_1 + a_2 = 2a, \quad \dots, \quad s_n = a_1 + \cdots + a_n = na, \quad \dots$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots &= \lim_{n \rightarrow \infty} na \\ &= \begin{cases} \infty & \text{se } a > 0; \\ -\infty & \text{se } a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Assim, o  $n$ -ésimo termo é  $a_n = aq^{n-1}$ .

**q = -1**

Aqui, as somas parciais são dadas por

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = a, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = a + (-a) = 0, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 0 + a = a, \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a + (-a) = 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$s_n = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Obviamente, essa sequência diverge.

**|q| > 1**

Por um lado, como

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1},$$

temos

$$qs_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Assim, da diferença  $s_n - qs_n$ , temos

$$(1 - q)s_n = a(1 - q^n).$$

Logo, como  $q \neq 1$ ,

$$s_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a + aq + aq^2 + \cdots &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \end{aligned} \quad (3.3)$$

é divergente. De fato,  $|q^n|$  pode assumir valores tão grandes quanto se queira.**CONVERGÊNCIA PARA  $|q| < 1$** 

Nesse caso, como

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n) &= 1, \\ a + aq + aq^2 + \cdots &= \frac{a}{1 - q}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

por (3.3).

**EXEMPLO**

Para os dois primeiros exemplos desse capítulo, temos, via (3.4),

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1/4}{1 - 1/2} = 1/2.$$

Podemos, ainda, utilizar esse exemplo para ilustrar o seguinte resultado:

**PROPOSIÇÃO 1**

*A convergência/divergência da série (3.1), página 33, não é alterada pela exclusão de um número finito de seus termos e nem pela inclusão de um número finito de outros termos.*

**DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 1**

Seja  $\sigma_k$  a soma de  $k$  termos da série (3.1). Assim, se  $s_{n,k} = s_n - \sigma_k$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , a existência de  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,k}$  é equivalente a existência de  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .

**PROPOSIÇÃO 2**

*Considere  $\alpha$  constante e um número  $s$  tal que  $a_1 + a_2 + \dots = s$ . Assim,*

$$\begin{aligned} \alpha a_1 + \alpha a_2 + \dots &= \alpha s \\ &= \alpha (a_1 + a_2 + \dots). \end{aligned}$$

**EXEMPLO**

Pelo exemplo anterior, temos

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + \dots &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \\ &= 2 \\ &= 2 \cdot 1 \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right). \end{aligned}$$

**DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 2**

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha a_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \alpha \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \right) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ &= \alpha s. \end{aligned}$$

**PROPOSIÇÃO 3**

Sejam  $s$  e  $S$  números tais que  $a_1 + a_2 + \dots = s$  e  $A_1 + A_2 + \dots = S$ . Então,

$$\begin{aligned} a_1 + A_1 + a_2 + A_2 + \dots &= s + S \\ &= (a_1 + a_2 + \dots) + (A_1 + A_2 + \dots). \end{aligned}$$

**EXEMPLO**

Note que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \\ &= 1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right). \end{aligned}$$

**DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 3**

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + A_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (a_i + A_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n A_i \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \\ &= s + S. \end{aligned}$$

**PROPOSIÇÃO 4**

Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Portanto, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

**EXEMPLO**

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots$$

diverge pois

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2n+1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2} \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

#### DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4

Se  $S_1 = 0$  e  $S_n = s_{n-1}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , como  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

é igual a um (único) número  $s$ . Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - S_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= s - s \\ &= 0.\end{aligned}$$

#### PROPOSIÇÃO 5

A recíproca da proposição 4 não é verdadeira, ou seja, é possível que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  seja divergente.

#### EXEMPLO

Embora  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \quad (3.5)$$

diverge. De fato, como

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \quad \text{etc,}$$

(3.5) não pode ser maior que a série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots,$$

que é divergente.

**PROPOSIÇÃO 6**

Considere  $0 \leq a_n \leq A_n$  para cada índice  $n \geq n_0$ . Assim,  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  converge se  $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n$  converge.

**EXEMPLO**

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

converge. De fato, como  $(1/n)^n \leq (1/2)^n$  para cada inteiro  $n > 1$ , temos

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2}.$$

**DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 6**

Como  $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n$  converge, existe um número  $S$  tal que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=n_0}^{\infty} A_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n_0}^n A_i. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Além disso, para cada índice  $n \geq n_0$ , como  $0 \leq a_n \leq A_n$ , temos

$$\begin{aligned} 0 \leq s_n &= a_1 + \dots + a_n \\ &\leq A_1 + \dots + A_n =: S_n \\ &\leq S, \end{aligned}$$

por (3.6) e pela monotonicidade da sequência  $(S_{n_0}, S_{n_0+1}, \dots)$ .<sup>2</sup> Portanto, a sequência crescente  $(s_{n_0}, s_{n_0+1}, \dots)$  também é limitada. Assim, existe um número  $s$  tal que

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \\ &= \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

**PROPOSIÇÃO 7**

Considere  $0 \leq A_n \leq a_n$  para cada índice  $n \geq n_0$ . Assim,  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  diverge se  $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n$  diverge.

<sup>2</sup>Essa sequência é crescente.

**EXEMPLO**

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$  diverge. De fato,  $1/n \leq 1/\sqrt{n}$ , para cada inteiro positivo  $n$ , e a série (3.5) diverge.

**DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 7**

Suponha que  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  converge. Logo, pela proposição 6,  $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n$  converge.

**PROPOSIÇÃO 8: TESTE DA RAZÃO (RESPECTIVAMENTE, RAIZ)**

Sejam  $a_n > 0$  para todo índice  $n \geq n_0$  e  $L$  um número tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad (\text{respectivamente, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L).$$

Então,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{converge se } L < 1; \\ \text{diverge se } L > 1; \\ \text{pode convergir ou divergir se } L = 1. \end{cases}$$

**EXEMPLOS**

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$  converge.<sup>3</sup> De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1/(n+1)!}{1/n!} \\ &= \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{n!}{(n+1)n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

---

<sup>3</sup>De fato, pela proposição 6, basta observar que

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ para } n \geq 1,$$

e a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

converge.



2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots$  diverge.<sup>4</sup> De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} \\ &= \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 2 \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots$  converge. De fato,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} \\ &= \frac{n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$  converge ou diverge?

---

<sup>4</sup>De fato, pela proposição 7, basta observar que

$$\frac{1}{n} < \frac{2^n}{n}, \text{ para } n \geq 1,$$

e a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.

Aqui, o teste da razão é inconclusivo. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \\ &= \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)} \\ &= \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Então, pela proposição 4, a série é divergente.

Outro modo de verificar que a série diverge, é observar que, para cada inteiro positivo  $n$ ,  $a_n = \frac{n}{n+1} < 1$  e

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \\ &= 1 + \frac{1}{n^2 + 2n} \\ &> 1, \end{aligned}$$

isto é,  $a_{n+1} > a_n$ . Assim, como

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots < 1$$

é uma seqüência de termos positivos, estritamente crescente e limitada superiormente por 1, existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in (0, 1].$$

Portanto,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$  diverge, pela proposição 4.

5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$  converge ou diverge?

Aqui, o teste da razão é inconclusivo. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} \\ &= \frac{1}{\frac{n+2}{n}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} \rightarrow 1\end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Por outro lado, como, para cada inteiro positivo  $n$ ,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \\ &= 1,\end{aligned}$$

isto é, a série converge para 1.

#### PROPOSIÇÃO 9: TESTE DE LEIBNIZ

Considerem válidas as seguintes condições:

1.  $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots > 0$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Então, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  converge para um número no intervalo  $(0, a_1]$ , isto é,

$$0 < a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \leq a_1.$$

#### EXEMPLO

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  converge para um número em  $(0, 1]$ . De fato, as duas condições da proposição 9 são satisfeitas para  $a_n = \frac{1}{n}$ .

## 3.2 Séries de funções

Considere uma sequência de funções, digamos  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ , e um conjunto  $I \neq \emptyset$  contido no domínio de todas essas funções.

Note que, para cada  $t \in I$ ,

$$f_1(t) + f_2(t) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

é uma série numérica. Assim, todos os resultados apresentados (para as séries numéricas) permanecem válidos para  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ , para cada  $t \in I$ . Portanto, caso exista um número  $f(t)$ , para cada  $t \in I$ , tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = f(t),$$

diremos que  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge para  $f$  (em  $I$ ) e denotaremos  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ . Nesse caso,  $I$  é dito domínio de convergência de  $f$ .

### 3.2.1 Exemplo fundamental: série geométrica

$$\begin{aligned} 1 + t + t^2 + \dots + t^n + \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} t^m \\ &= \frac{1}{1-t}, \end{aligned}$$

para  $|t| < 1$ , isto é,  $t \in I = (-1, 1)$ .<sup>5</sup> Por outro lado, a série geométrica é divergente para  $|t| \geq 1$ , ou seja,  $t \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .<sup>6</sup>

#### EXEMPLOS

Utilizando a série geométrica, podemos obter representações em série de funções e  $I$  para:

1.  $g(t) = \frac{1}{1+t^3}$ ;
2.  $h(t) = \frac{2t^3}{1+t^3}$ ;
3.  $\varphi(t) = \frac{t}{5-t}$ ;
4.  $\phi(t) = \frac{t^2}{t-5}$ .

De fato:

<sup>5</sup>Na segunda igualdade, utilizamos a mudança de índices  $m = n - 1$ . Na terceira, de cima para baixo, utilizamos (3.4), página 35.

<sup>6</sup>Cf. (3.3), página 35.

1. Se  $u = -t^3$ , então

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{1 - (-t^3)} \\ &= \frac{1}{1 - u} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{3n} \\ &= 1 - t^3 + t^6 - t^9 + \dots, \end{aligned}$$

para  $t \in I = (-1, 1)$ .<sup>7</sup>

2.

$$\begin{aligned} h(t) &= 2t^3 g(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n t^{3(n+1)} \\ &= 2t^3 - 2t^6 + 2t^9 - 2t^{12} + \dots, \end{aligned}$$

para  $t \in I = (-1, 1)$ .<sup>8</sup>

3. Se  $v = \frac{t}{5}$ , temos

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{t}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t}{5}} \\ &= v \cdot \frac{1}{1 - v} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{5}\right)^{n+1} \\ &= \frac{t}{5} + \frac{t^2}{25} + \frac{t^3}{75} + \dots, \end{aligned}$$

---

7

$$\begin{aligned} |t| < 1 &\implies |t|^3 < 1 \\ &\implies |t^3| < 1 \\ &\implies |-1| |t^3| < 1 \\ &\implies |-t^3| < 1 \\ &\implies |u| < 1. \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Por definição, o domínio de convergência de  $h$  é igual ao de  $g$ .

para  $t \in I = (-5, 5)$ .<sup>9</sup>

4.

$$\begin{aligned}\phi(t) &= -t\varphi(t) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+2}}{5^{n+1}} \\ &= -\frac{t^2}{5} - \frac{t^3}{25} - \frac{t^4}{75} + \dots,\end{aligned}$$

para  $t \in I = (-5, 5)$ .<sup>10</sup>

### 3.2.2 Definição de convergência absoluta

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  converge absolutamente (em  $I$ ), isto é,  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$  converge absolutamente, para todo  $t \in I$ , quando  $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$  converge (em  $I$ ).

#### EXEMPLO

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen } nt}{2^n}$  converge absolutamente, para todo  $t \in \mathbb{R}$ . De fato, como, para quaisquer  $t \in \mathbb{R}$  e  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,

$$|\text{sen } nt| \leq 1 \implies \left| \frac{\text{sen } nt}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n},$$

e  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$  converge,

$$\left| \frac{\text{sen } t}{2} \right| + \left| \frac{\text{sen } 2t}{4} \right| + \dots$$

converge, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , pela proposição 6 da seção 3.1.

Pode ser demonstrado que convergência absoluta implica em convergência.<sup>11</sup> Contudo, a recíproca não é verdadeira.

#### EXEMPLO

---

9

$$\begin{aligned}|t| < 5 &\implies \left| \frac{t}{5} \right| < 1 \\ &\implies |v| < 1.\end{aligned}$$

<sup>10</sup>Por definição, o domínio de convergência de  $\phi$  é igual ao de  $\varphi$ .

<sup>11</sup>Assim, a série do exemplo anterior converge.

No último exemplo da seção 3.1, vimos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 1/n$  converge. Contudo, a série harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} 1/n|$  diverge.<sup>12</sup>

### 3.3 Séries de potências

Uma série de funções  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  é uma *série de potências em torno de  $t_0$*  quando

$$f_n(t) = a_n (t - t_0)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

isto é, quando a série é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = a_0 + a_1 (t - t_0) + a_2 (t - t_0)^2 + \dots$$

Nesse caso,  $I$  é chamado de *intervalo de convergência* se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = f(t) \quad \forall t \in I.$$

#### EXEMPLO

Para a série geométrica, página 44, temos  $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$  com  $I = (-1, 1)$ . Aqui,  $f(t) = \frac{1}{1-t}$ ,  $t_0 = 0$  e  $a_n = 1$ , para cada índice inteiro não negativo  $n$ .

#### OBSERVAÇÃO

Demonstra-se que, para  $|t - t_0| < R$ , se

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n \\ &= a_0 + a_1 (t - t_0) + a_2 (t - t_0)^2 + \dots, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t - t_0)^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2 (t - t_0) + 3a_3 (t - t_0)^2 + \dots \end{aligned} \tag{3.7}$$

#### EXEMPLO

<sup>12</sup>Confira (3.5), página 38.

Seja  $x(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1-t} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} (t^n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} \\ &= 1 + 2t + 3t^2 + \dots, \end{aligned}$$

para cada  $t \in (-1, 1)$ .

### TEOREMA DE CONVERGÊNCIA

Se, para todo  $t \in I$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$  converge, então  $I$  é, exatamente, um dos seguintes conjuntos:

1.  $\{t_0\}$ ;
2.  $\mathbb{R}$ ;
3.  $(t_0 - R, t_0 + R)$ ;
4.  $[t_0 - R, t_0 + R)$ ;
5.  $(t_0 - R, t_0 + R]$ ;
6.  $[t_0 - R, t_0 + R]$ .

Nesse caso,  $R$  é dito *raio de convergência* da série de potências e, por abuso de notação,  $R = 0$  e  $R = \infty$  para as condições 1 e 2, respectivamente.

### EXEMPLO

Para a série geométrica, página 44, como  $I = (0 - 1, 0 + 1)$ , temos  $t_0 = 0$  e  $R = 1$ .

### TESTE DA RAZÃO

Considere que:

- $a_n \neq 0$ , para  $n \geq n_0$ ;
- $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (t - t_0)^{n+1}}{a_n (t - t_0)^n} \right| = |t - t_0| \cdot L.$$



Então,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$ :

- converge absolutamente, para  $|t - t_0| < \frac{1}{L}$ ;
- diverge, para  $|t - t_0| > \frac{1}{L}$ ;
- pode convergir ou divergir, se  $|t - t_0| = \frac{1}{L}$ .

Note que, aqui,  $R = \frac{1}{L}$ .

### EXEMPLOS

1. Considere a série  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n$ . Assim, por um lado, como

$$\begin{aligned} \left| \frac{(-1)^{n+2}(n+1)(t-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}n(t-2)^n} \right| &= |-1| \left| \frac{n+1}{n} \right| |t-2| \\ &= |t-2| \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \\ &\rightarrow |t-2| \cdot 1 \end{aligned}$$

se  $n \rightarrow \infty$ , segue que  $L = 1$ ,  $R = 1$  e a série dada converge em  $(2-1, 2+1) = (1, 3)$  e diverge em  $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ . Por outro lado, a série também diverge em  $\{1, 3\}$ . De fato:

- $t = 1$  acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} n \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} n \\ &= -(1 + 2 + 3 + 4 + \dots); \end{aligned}$$

- $t = 3$  acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n \\ &= 1 - 2 + 3 - 4 + \dots \end{aligned}$$

Pela proposição 4, seção 3.1, essas séries numéricas divergem.

Portanto,  $I = (1, 3)$ .

2. Considere a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n}$ . Assim, por um lado, como

$$\begin{aligned} \left| \frac{(t+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{(t+1)^n} \right| &= \left| \frac{t+1}{2} \right| \cdot \left| \frac{n}{n+1} \right| \\ &= \frac{|t+1|}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &\rightarrow |t+1| \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

se  $n \rightarrow \infty$ , segue que  $L = \frac{1}{2}$ ,  $R = 2$  e a série dada converge em  $(-1 - 2, -1 + 2) = (-3, 1)$  e diverge em  $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ . Por outro lado, a série converge para  $t = -3$  e diverge para  $t = 1$ . De fato:

- $t = -3$  acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \end{aligned}$$

que converge, pelo teste de Leibniz;

- $t = 1$  acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

que chamamos de série harmônica e verificamos ser divergente.

Portanto,  $I = [-3, 1)$ .

3. Considere a série  $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)!(t-2)^n$ . Assim, se  $n \rightarrow \infty$ , então

$$\begin{aligned} \left| \frac{(2(n+1))!(t-2)^{n+1}}{(2n)!(t-2)^n} \right| &= |t-2| \cdot \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\ &= |t-2| \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)((2n)!)}{(2n)!} \\ &= |t-2|(2n+2)(2n+1) \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

somente em  $t = 2$ . Portanto,  $I = \{2\}$ .

### 3.4 Séries de Taylor e funções analíticas

Se a função  $f(t)$  pode ser representada por uma série de potências em torno de  $t = t_0$ , isto é, existe  $R > 0$  tal que

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n \\ &= a_0 + a_1 (t-t_0) + a_2 (t-t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

para  $|t-t_0| < R$ , e tem derivadas de todas as ordens num intervalo contendo  $(t_0 - R, t_0 + R)$ , então:

- $f(t_0) = a_0 \implies a_0 = \frac{f^{(0)}(t_0)}{0!};$
- Como, via (3.7),<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t - t_0)^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2 (t - t_0) + 3a_3 (t - t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

para  $|t - t_0| < R$ , temos

$$f'(t_0) = a_1 \implies a_1 = \frac{f^{(1)}(t_0)}{1!};$$

- Como, via (3.7),

$$\begin{aligned} f''(t) &= (f')'(t) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (t - t_0)^{n-2} \\ &= 2a_2 + 6a_3 (t - t_0) + 12(t - t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

para  $|t - t_0| < R$ , temos

$$f''(t_0) = 2a_2 \implies a_2 = \frac{f^{(2)}(t_0)}{2!};$$

- Como, via (3.7),

$$\begin{aligned} f'''(t) &= (f'')'(t) \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (t - t_0)^{n-3} \\ &= 6a_3 + 24(t - t_0) + 60(t - t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

para  $|t - t_0| < R$ , temos

$$f'''(t_0) = 6a_3 \implies a_3 = \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!};$$

- Repetindo esse procedimento para a  $n$ -ésima derivada de  $f$ , demonstra-se, por *indução finita*, que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n \\ &= \frac{f(t_0)}{0!} + \frac{f'(t_0)}{1!} (t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!} (t - t_0)^2 + \dots \end{aligned} \tag{3.8}$$

<sup>13</sup>Cf. p. 47.

é a série de Taylor de  $f$  em torno de  $t = t_0$  ou, especificamente, em  $I = (t_0 - R, t_0 + R)$ ,<sup>14</sup> e  $f(t)$  é dita analítica em  $I$ .

### EXEMPLOS

- Para a série geométrica,<sup>15</sup>  $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ , para  $|t| < 1$ . Podemos confirmar esse resultado, verificando que  $f(t) = \frac{1}{1-t}$  é analítica em  $I = (-1, 1)$ ,<sup>16</sup> via:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{1-0} = 1 = a_0; \\ f'(0) &= \frac{1}{(1-0)^2} = 1 = a_1; \\ \frac{f''(0)}{2} &= \frac{\frac{2}{(1-0)^3}}{2} = 1 = a_2; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que, utilizamos  $f'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ ,  $f''(t) = \frac{2}{(1-t)^3}$ , etc.

- $f(t) = e^t$  é analítica em  $I = \mathbb{R}$ ,<sup>17</sup> com

$$\begin{aligned} e^t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0 = 1 = a_0; \\ f'(0) &= e^0 = 1 = a_1; \\ \frac{f''(0)}{2} &= \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} = a_2; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que, utilizamos  $f^{(n)}(t) = e^t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

- $f(t) = \ln(1+t)$  é analítica em  $I = (-1, 1)$ ,<sup>18</sup> com

$$\begin{aligned} \ln(1+t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} \\ &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} f(0) &= \ln(1+0) = 0 = a_0; \\ f'(0) &= \frac{1}{1+0} = 1 = a_1; \\ \frac{f''(0)}{2} &= \frac{-\frac{1}{(1+0)^2}}{2} = -\frac{1}{2} = a_2; \\ \frac{f'''(0)}{3!} &= \frac{\frac{2}{(1+0)^3}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} = a_3; \\ &\vdots \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Se  $t = 0$ , (3.8) é a série de Maclaurin de  $f$ .

<sup>15</sup>Cf. p. 44.

<sup>16</sup>Aqui,  $t_0 = 0$  e  $R = 1$ .

<sup>17</sup>Aqui,  $t_0 = 0$  e  $R = \infty$ .

<sup>18</sup>Aqui,  $t_0 = 0$  e  $R = 1$ .

Note que, utilizamos  $f'(t) = \frac{1}{1+t}$ ,  $f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$ ,  $f'''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$ , etc.

**EXERCÍCIO**

Verifique que as funções seno e cosseno são analíticas em  $I = \mathbb{R}$ , com

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} t &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{cos} t &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots\end{aligned}$$

**OBSERVAÇÃO**

A analiticidade, em  $I = \mathbb{R}$ , das funções seno, cosseno e exponencial, pode ser utilizada para demonstrar a *fórmula de Euler*,

$$e^{it} = \operatorname{cos} t + i \operatorname{sen} t,^{19}$$

observando que

$$\begin{array}{cccc}i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = -i, \\ i^4 = 1, & i^5 = i, & i^6 = -1, & i^7 = -i, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{array}$$

**3.4.1 Séries de potências e edo****OBSERVAÇÕES**

- O índice de uma série é invariante por permutação de letras, ou seja,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f_n &= \sum_{m=0}^{\infty} f_m \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f_i \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j \\ &= \dots\end{aligned}$$

<sup>19</sup>Cf. página 22.

- A igualdade de duas séries de Taylor em torno de  $t_0 = 0$  implica na igualdade dos seus coeficientes de mesmos índices,<sup>20</sup> ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t - t_0)^n = 0 \implies a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = 0 \implies a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

- Seja

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 \quad (3.10)$$

como na página 19, com  $a$ ,  $b$  e  $c$  analíticas em  $I = (t_0 - R, t_0 + R)$ . Demonstra-se que suas soluções também são analíticas em  $I$ . Portanto, para obter uma solução geral de (3.10), via séries de Taylor em torno de  $t_0 = 0$ , considere as seguintes etapas:

- Assuma que  $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  é solução de (3.10).
- Substitua  $x$ ,  $x' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$  e  $x'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n a_n t^{n-2}$  em (3.10).
- Caso seja necessário, reindexe alguma série.<sup>21</sup>
- Determine  $a_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , utilizando (3.9).

### EXEMPLOS

<sup>20</sup>De fato, para cada índice  $n$ , após ter obtido  $a_n = b_n$  via  $t = t_0$ , calcule a derivada de ordem  $n + 1$  das duas séries e repita o processo.

### <sup>21</sup>EXEMPLOS

- Para  $m = n - 2$ ,

$$x'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2)a_{m+2}t^m.$$

- Para  $m = n + 1$ ,

$$\begin{aligned} tx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} t^m. \end{aligned}$$

1.  $x'' + x = 0$ .

$$\begin{aligned}
 x'' + x = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\
 &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\
 &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n] t^n = 0 \\
 &\implies (n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\
 &\implies a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

onde, na segunda implicação, de cima para baixo, reindexamos  $n$  (via  $m = n - 2$ , na primeira série) e, depois, trocamos  $m$  por  $n$ . Então, para  $a_0$  e  $a_1$  constantes, temos:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -\frac{a_0}{1 \cdot 2}; \\
 a_3 &= -\frac{a_1}{2 \cdot 3}; \\
 a_4 &= -\frac{a_2}{3 \cdot 4} = \frac{a_0}{4!}; \\
 a_5 &= -\frac{a_3}{4 \cdot 5} = -\frac{a_1}{5!}; \\
 a_6 &= -\frac{a_4}{5 \cdot 6} = -\frac{a_0}{6!}; \\
 a_7 &= -\frac{a_5}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{7!}; \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Assim, para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , temos

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{(2n)!} \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)!}.$$

Portanto, a solução de  $x'' + x = 0$  é dada por

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} t^{2n+1} \\
 &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= a_0 \cos t + a_1 \sin t.
 \end{aligned}$$

$$2. \quad x'' - tx = 0.$$

$$\begin{aligned} x'' - tx = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n = 0 \\ &\implies (1)(2)a_2 t^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n = 0 \\ &\implies 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_{n-1}] t^n = 0 \\ &\implies a_2 = 0, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

onde, na segunda implicação, de cima para baixo, reindexamos  $n$  (via  $m = n - 2$ , na primeira série, e  $i = n + 1$ , na segunda) e, depois, trocamos  $m$  e  $i$  por  $n$ . Logo, como  $a_2 = 0$ , se  $a_0$  e  $a_1$  são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_0}{(2)(3)}; \\ a_4 &= \frac{a_1}{(3)(4)}; \\ a_5 &= \frac{a_2}{(4)(5)} = 0; \\ a_6 &= \frac{a_3}{(5)(6)} = \frac{a_0}{(2)(3)(5)(6)}; \\ a_7 &= \frac{a_4}{(6)(7)} = \frac{a_1}{(3)(4)(6)(7)}; \\ a_8 &= \frac{a_5}{(7)(8)} = 0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Então, para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , temos

$$a_{3n} = \frac{a_0}{(2)(3)(5)(6) \cdots (3n-1)(3n)} \quad \text{e} \quad a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3)(4)(6)(7) \cdots (3n)(3n+1)},$$

enquanto que, para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , temos

$$a_{3n+2} = 0.$$

Portanto, a solução de  $x'' - tx = 0$  é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n} t^{3n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n+1} t^{3n+1} \\ &= a_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n}}{(2)(3)(5)(6) \cdots (3n-1)(3n)} \right] \\ &\quad + a_1 \left[ t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n+1}}{(3)(4)(6)(7) \cdots (3n)(3n+1)} \right]. \end{aligned}$$



$$3. x'' - t^2x = 0.$$

$$\begin{aligned} x'' - t^2x = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2} = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 0 \\ &\implies (1)(2)a_2 t^0 + (2)(3)a_3 t^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 0 \\ &\implies 2a_2 + 6a_3 t + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_{n-2}] t^n = 0 \\ &\implies a_2 = a_3 = 0, a_{n+2} = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}, n = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

onde, na segunda implicação, de cima para baixo, reindexamos  $n$  (via  $m = n - 2$ , na primeira série, e  $i = n + 2$ , na segunda) e, depois, trocamos  $m$  e  $i$  por  $n$ . Logo, como  $a_2 = a_3 = 0$ , se  $a_0$  e  $a_1$  são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{a_0}{(3)(4)}; \\ a_5 &= \frac{a_1}{(4)(5)}; \\ a_6 &= \frac{a_2}{(5)(6)} = 0; \\ a_7 &= \frac{a_3}{(6)(7)} = 0; \\ a_8 &= \frac{a_4}{(7)(8)} = \frac{a_0}{(3)(4)(7)(8)}; \\ a_9 &= \frac{a_5}{(8)(9)} = \frac{a_1}{(4)(5)(8)(9)}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Então, para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , temos

$$a_{4n} = \frac{a_0}{(3)(4)(7)(8) \cdots (4n-1)(4n)} \quad \text{e} \quad a_{4n+1} = \frac{a_1}{(4)(5)(8)(9) \cdots (4n)(4n+1)},$$

enquanto que, para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , temos

$$a_{4n+2} = a_{4n+3} = 0.$$

Portanto, a solução de  $x'' - t^2x = 0$  é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_{4n} t^{4n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{4n+1} t^{4n+1} \\ &= a_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n}}{(3)(4)(7)(8) \cdots (4n-1)(4n)} \right] \\ &\quad + a_1 \left[ t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n+1}}{(4)(5)(8)(9) \cdots (4n)(4n+1)} \right]. \end{aligned}$$

$$4. (t^2 + 1)x'' - 4tx' + 6x = 0.$$

$$\begin{aligned} t^2x'' + x'' - 4tx' + 6x = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} 4na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} 4na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n-1)na_n + (n+1)(n+2)a_{n+2} - 4na_n + 6a_n] t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n^2 - 5n + 6) a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2} \right] t^n = 0 \\ &\implies a_{n+2} = -\frac{(n-2)(n-3)a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Portanto, se  $a_0$  e  $a_1$  são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= -3a_0; \\ a_3 &= -\frac{a_1}{3}; \\ a_4 &= -\frac{0 \cdot a_2}{12} = 0; \\ a_5 &= -\frac{0 \cdot a_3}{20} = 0; \\ a_6 &= -\frac{2 \cdot a_4}{30} = 0; \\ a_7 &= -\frac{6 \cdot a_5}{42} = 0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, a solução de  $(t^2 + 1)x'' - 4tx' + 6x = 0$  é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ &= a_0 (1 - 3t^2) + a_1 \left( t - \frac{1}{3} t^3 \right). \end{aligned}$$

$$5. \begin{cases} (t^2 + 1)x'' + tx' - x = 0 \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t^2x'' + x'' + tx' - x = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} na_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} na_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n-1)na_n + (n+1)(n+2)a_{n+2} + na_n - a_n] t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n^2 - 1)a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2}] t^n = 0 \\ &\implies a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, se  $a_0$  e  $a_1$  são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}a_0; \\ a_3 &= 0; \\ a_4 &= -\frac{1}{4}a_2 = -\frac{1}{2 \cdot 4}a_0; \\ a_5 &= -\frac{2}{5}a_3 = 0; \\ a_6 &= -\frac{3}{6}a_4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}a_0; \\ a_7 &= -\frac{4}{7}a_5 = 0; \\ a_8 &= -\frac{5}{8}a_6 = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}a_0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)} a_0, \quad n = 2, 3, \dots, \\ a_{2n+1} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

e, assim, a solução de  $(t^2 + 1)x'' + tx' - x = 0$  é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} t^{2n} \\ &= a_0 \left( 1 + \frac{t^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)} t^{2n} \right) + a_1 t. \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $a_0 = x(0) = 0$  e  $a_1 = x'(0) = 1$ , a solução do PVI é apenas  $x(t) = t$ .

$$6. \begin{cases} x'' - 2tx' + x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x'' - 2tx' + x = 0 &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - (2n-1)a_n] t^n = 0 \\ &\Rightarrow a_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, se  $a_0$  e  $a_1$  são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{(1)(2)} a_0; \\ a_3 &= \frac{1}{(2)(3)} a_1; \\ a_4 &= \frac{3}{(3)(4)} a_2 = -\frac{3}{4!} a_0; \\ a_5 &= \frac{5}{(4)(5)} a_3 = \frac{1 \cdot 5}{5!} a_1; \\ a_6 &= \frac{7}{(5)(6)} a_4 = -\frac{3 \cdot 7}{6!} a_0; \\ a_7 &= \frac{9}{(6)(7)} a_5 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} a_1; \\ a_8 &= \frac{11}{(7)(8)} a_6 = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} a_0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_{2n} &= -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-5)}{(2n)!} a_0, \quad n = 2, 3, \dots, \\ a_{2n+1} &= \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{(2n+1)!} a_1, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

e, assim, a solução de  $(t^2 + 1)x'' - 2tx' + x = 0$  é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} t^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} t^{2n+1} \\ &= a_0 \left\{ 1 - \frac{t^2}{2!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-5)] t^{2n}}{(2n)!} \right\} + a_1 \left\{ t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)] t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\} \\ &= a_0 x_1(t) + a_1 x_2(t). \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $a_0 = x(0) = 0$  e  $a_1 = x'(0) = 1$ , a solução do *pvi* é apenas  $x(t) = x_2(t)$ .

#### OBSERVAÇÃO

Esse método de resolução, via séries, também é válido para toda *edo* de primeira ordem

com coeficientes analíticos. De fato, basta considerar  $a = 0$  em (3.10)

### EXEMPLOS

1.  $x' - x = 0$ .

$$\begin{aligned} x' - x = 0 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - a_n] t^n = 0 \\ &\implies a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, para  $a_0$  constante, temos:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0}{1} = \frac{a_0}{1!}; \\ a_2 &= \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2!}; \\ a_3 &= \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!}; \\ a_4 &= \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{4!}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, esses coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{a_0}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e a solução de  $x' - x = 0$  pode ser representada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= a_0 e^t. \end{aligned}$$

2.  $x' = t^2 x$ .

$$\begin{aligned} x' - t^2 x = 0 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2} = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 0 \\ &\implies a_1 + 2a_2 t + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 0 \\ &\implies a_1 + 2a_2 t + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - a_{n-2}] t^n = 0 \\ &\implies a_1 = a_2 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_{n-2}}{n+1}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Assim, para  $a_0$  constante, temos:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_0}{3} = \frac{a_0}{3^1(1!)}; \\ a_4 &= \frac{a_1}{4} = 0; \\ a_5 &= \frac{a_2}{5} = 0; \\ a_6 &= \frac{a_3}{6} = \frac{a_0}{3^2(2!)}; \\ a_7 &= \frac{a_4}{7} = 0; \\ a_8 &= \frac{a_5}{8} = 0; \\ a_9 &= \frac{a_6}{9} = \frac{a_0}{3^3(3!)}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto, esses coeficientes são dados por

$$a_{3n} = \frac{a_0}{3^n(n!)} \quad \text{e} \quad a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e a solução de  $x' - t^2x = 0$  pode ser representada por

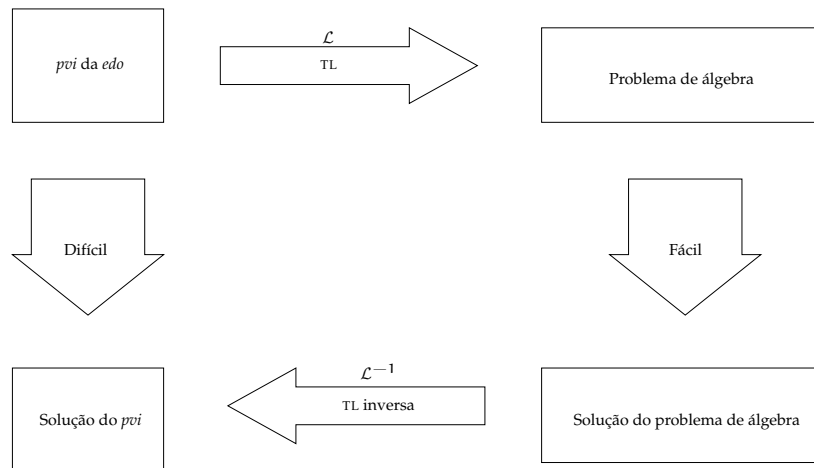
$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n} t^{3n} \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n}}{3^n(n!)} \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^3/3)^n}{n!} \\ &= a_0 e^{t^3/3}. \end{aligned}$$

# Capítulo 4

## Transformada de Laplace (TL) e edo

### 4.1 TL

Figura 4.1: Problema a ser resolvido



A figura 4.1 ilustra a passagem, via TL, do *pvi* de uma *edo*, para um problema algébrico. Resolvido esse problema, aplicamos a TL inversa em sua solução, para obtermos a a solução do *pvi* original.

#### DEFINIÇÃO

A TL de uma função  $f(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , é uma função  $F(s)$  calculada pelo operador  $\mathcal{L}$  tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt \\ &= F(s). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Nesse caso,  $f(t)$  é a TLI de  $F(s)$  e denotamos

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t).$$

Além disso, o domínio de  $F$ , por (4.1), é formado por todo número  $s$  tal que  $e^{-st}f(t)$  é integrável em  $[0, \infty)$ .

### EXEMPLOS

1. Para  $s_0$  fixo, se  $s > s_0$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{s_0 t}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{s_0 t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{t=0}^{t=L} e^{-(s-s_0)t} dt \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)} \right]_{t=0}^{t=L} \\ &= -\frac{1}{s-s_0} \lim_{L \rightarrow \infty} (e^{-(s-s_0)L} - 1) \\ &= \frac{1}{s-s_0}.\end{aligned}$$

Na quarta igualdade, de cima para baixo, utilizamos a integral

$$\int_a^b e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \Big|_a^b, \quad (4.2)$$

que pode ser tanto real quanto complexa.

Assim, para  $s > s_0$ ,

$$\mathcal{L}\{e^{s_0 t}\} = \frac{1}{s-s_0} \iff \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-s_0}\right\} = e^{s_0 t}. \quad (4.3)$$

2. Se  $s > 0$ , temos, por (4.3),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\} &= \mathcal{L}\{e^{0 \cdot t}\} \\ &= \frac{1}{s-0} \\ &= \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

Assim, para  $s > 0$ ,

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \iff \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1. \quad (4.4)$$



3. Se  $s > 0$ , temos, via integração por partes,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} t dt \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{t=0}^{t=L} t e^{-st} dt \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left( t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{t=L} - \int_{t=0}^{t=L} \frac{e^{-st}}{-s} dt \right) \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{Le^{-sL}}{s} + \frac{1}{s} \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{t=L} \right\} \\
 &= \frac{1}{s^2},
 \end{aligned}$$

onde aplicamos L'hôpital em  $Le^{-sL} = \frac{L}{e^{sL}}$ . Logo, se  $s > 0$ ,

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \iff \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = t.$$

4. Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $s > 0$ . Assim, via integração por partes,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt \\
 &= \left[ -t^n \cdot \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} n t^{n-1} \frac{e^{-st}}{-s} dt \\
 &= \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}.
 \end{aligned}$$

Portanto, como  $\mathcal{L}\{t^1\} = \frac{1}{s^2}$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^2\} &= \frac{2}{s} \mathcal{L}\{t^1\} \\
 &= \frac{2!}{s^3}.
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^3\} &= \frac{3}{s} \mathcal{L}\{t^2\} \\
 &= \frac{3!}{s^4}.
 \end{aligned}$$

Logo, supondo que

$$\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{(n-1)!}{s^n},$$

prova-se, por indução, que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \tag{4.5}$$

para cada inteiro positivo  $n$ .<sup>1</sup>

### ADMISSIBILIDADE

Em relação a (4.1),  $f(t)$  é dita *admissível* quando existe sua TL  $F(s)$ .<sup>2</sup>

### LINEARIDADE

Para  $cte_1$  e  $cte_2$  constantes, se  $f(t)$  e  $g(t)$  são admissíveis com transformadas  $F(s)$  e  $G(s)$ , respectivamente, então:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{cte_1 f(t) + cte_2 g(t)\} &= cte_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + cte_2 \mathcal{L}\{g(t)\} \\ &= cte_1 F(s) + cte_2 G(s)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{cte_1 F(s) + cte_2 G(s)\} &= cte_1 \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + cte_2 \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \\ &= cte_1 f(t) + cte_2 g(t).\end{aligned}$$

### EXEMPLOS

1. Seja  $p(t) = -t^4 + 2t^3 + t - 7$ . Portanto, para  $s > 0$ ,

$$\begin{aligned}P(s) &= \mathcal{L}\{p(t)\} \\ &= -\mathcal{L}\{t^4\} + 2\mathcal{L}\{t^3\} + \mathcal{L}\{t\} - 7\mathcal{L}\{1\} \\ &= -\frac{4!}{s^5} + \frac{2(3!)}{s^4} + \frac{1}{s^2} - \frac{7}{s} \\ &= \frac{-24 + 12s + s^3 - 7s^4}{s^5},\end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade, de baixo para cima, utilizamos a equação (4.5).

2. Por um lado, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{it}\} &= \mathcal{L}\{\cos t + i \sin t\} \\ &= \mathcal{L}\{\cos t\} + i\mathcal{L}\{\sin t\},\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Na verdade, essa fórmula também é válida para  $n = 0$ . De fato, por (4.4),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^0\} &= \mathcal{L}\{1\} \\ &= \frac{1}{s} \\ &= \frac{0!}{s^{0+1}}.\end{aligned}$$

<sup>2</sup>Embora não sejam apresentadas, nesse texto, condições suficientes para a existência de uma  $F(s)$  associada à uma  $f(t)$  arbitrária, em cada exemplo, para  $f(t)$  ser admissível, basta que o domínio da  $F(s)$  associada seja não vazio.

por linearidade. Por outro, por definição, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{it}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{it} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(i-s)t} dt \\ &= \frac{e^{(i-s)t}}{i-s} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s-i} \\ &= \frac{s}{s^2+1} + i \frac{1}{s^2+1},\end{aligned}$$

caso  $s$  seja positivo. De fato, na terceira, quarta e quinta igualdades, de cima para baixo, utilizamos, respectivamente, a equação (4.2),

$$\begin{aligned}e^{(i-s)t} &= e^{-st} e^{it} \\ &= e^{-st} (\cos t + i \sin t) \\ &\rightarrow 0,\end{aligned}$$

para  $t \rightarrow \infty$ ,<sup>3</sup> e que

$$\frac{s}{s^2+1} + i \frac{1}{s^2+1}$$

é o inverso multiplicativo de  $s - i$ .<sup>4</sup> Então, para  $s > 0$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos t\} &= \frac{s}{s^2+1} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1} \\ &\Updownarrow \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} &= \cos t \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t.\end{aligned}$$

3. Seja  $s > \omega$ , onde  $\omega$  é uma constante positiva.<sup>5</sup> Como  $\frac{\omega}{s^2-\omega^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega} \right)$ ,<sup>6</sup> temos, por linearidade e pela equação (4.3),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2-\omega^2}\right\} &= \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\omega}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\omega}\right\} \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \\ &= \sinh(\omega t).\end{aligned}$$

<sup>3</sup> $\cos t$  e  $\sin t$  são limitadas e  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ .

<sup>4</sup>De fato, se  $i^2 = -1$  e  $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ , então

$$(a + ib) \left( \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \right) = 1.$$

<sup>5</sup>Assim, também,  $s > -\omega$ .

<sup>6</sup>Utilizamos, aqui, a *técnica das frações parciais*, estudada no *cálculo de funções reais de uma variável real*.

Analogamente, para  $s > \omega > 0$ , temos

$$\mathcal{L}\{\cosh(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 - \omega^2}.$$

4. Para  $s > 1$ ,<sup>7</sup> como

$$\frac{s+3}{s(s-1)(s+2)} = -\frac{3}{2s} + \frac{4}{3(s-1)} + \frac{1}{6(s+2)},$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s-1)(s+2)}\right\} &= -\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{4}{3}e^t + \frac{1}{6}e^{-2t}, \end{aligned}$$

por (4.3), página 64.

5. Se  $s > 2$ ,<sup>8</sup> então

$$\begin{aligned} \frac{s-1}{s^2+2s-8} &= \frac{s-1}{(s+4)(s-2)} \\ &= \frac{1}{6(s-2)} + \frac{5}{6(s+4)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+2s-8}\right\} = \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{5}{6}e^{-4t},$$

por (4.3).

### MUDANÇA DE VARIÁVEL

Para qualquer constante cte positiva, se  $f(t)$  é admissível, temos

$$\mathcal{L}\{f(\text{cte } t)\} = \frac{1}{\text{cte}}F\left(\frac{s}{\text{cte}}\right).$$

De fato, como  $f(\text{cte } t)$  é função de  $t$ , temos, por definição,<sup>9</sup>

$$\mathcal{L}\{f(\text{cte } t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f(\text{cte } t)dt.$$

Agora, se  $\tau = \text{cte } t$ , essa integral é igual a

$$\frac{1}{\text{cte}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{\text{cte}}\tau}f(\tau)d\tau = \frac{1}{\text{cte}}F\left(\frac{s}{\text{cte}}\right).$$

<sup>7</sup>Assim,  $s > -2$ .

<sup>8</sup>Portanto,  $s > -4$ .

<sup>9</sup>Cf. página 63.

**EXEMPLO**

Utilizando as transformadas do seno e do cosseno e a mudança de variável supracitada, sendo  $\omega$  uma constante positiva e  $s > 0$ , temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} &= \frac{1}{\omega} \frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{\frac{s}{\omega^2}}{\frac{s^2 + \omega^2}{\omega^2}} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (4.6)$$

**DESLOCAMENTO-I**

Sendo  $cte$  constante e  $f(t)$  admissível,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{cte t} f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{cte t} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-cte)t} f(t) dt \\ &= F(s - cte),\end{aligned}$$

para  $s > cte$ .<sup>10</sup>

**EXEMPLOS**

1. Por (4.5), temos

$$f(t) = t^n \iff F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ para } s > 0 \text{ e } n = 0, 1, 2, \dots$$

Portanto, para  $s > cte$ ,

$$\mathcal{L}\{t^n e^{cte t}\} = \frac{n!}{(s - cte)^{n+1}}$$

e, assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s - cte)^{n+1}}\right\} = t^n e^{cte t}.$$

2. Seja  $s > -3$ . Assim, como

$$\frac{s^2}{(s+3)^3} = \frac{1}{s+3} - \frac{6}{(s+3)^2} + \frac{9}{(s+3)^3},$$

<sup>10</sup>Cf. o caso para  $f(t) = 1$ , página 64.

temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s+3)^3}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 6\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} + 9\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s+3)^3}\right\} \\ &= e^{-3t} - 6te^{-3t} + \frac{9}{2}t^2e^{-3t}.\end{aligned}$$

3. Sejam  $s$  e  $\omega$  positivos. Como, por (4.6),

$$f(t) = \text{sen}(\omega t) \iff F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

temos, para  $s > \text{cte}$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{\text{cte}t} \text{sen}(\omega t)\} &= F(s - \text{cte}) \\ &= \frac{\omega}{(s - \text{cte})^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\mathcal{L}\{e^{\text{cte}t} \cos(\omega t)\} = \frac{s - \text{cte}}{(s - \text{cte})^2 + \omega^2}.$$

4. Como podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{3s+7}{s^2-2s+5} &= \frac{3s+7}{s^2-2s+1+4} \\ &= \frac{3s+7}{(s-1)^2+4} \\ &= \frac{3s-3+3+7}{(s-1)^2+4} \\ &= \frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2+4},\end{aligned}$$

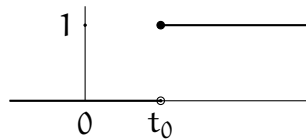
temos, para  $s > 1$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s+5}\right\} &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+4}\right\} \\ &= 3e^t \cos(2t) + 5e^t \text{sen}(2t).\end{aligned}$$

#### FUNÇÃO DE HEAVISIDE DE PASSO UNITÁRIO

Para  $t_0 \geq 0$ , define-se

$$H(t - t_0) := \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0, \\ 1 & \text{se } t \geq t_0, \end{cases}$$

Figura 4.2: Gráfico de  $H(t - t_0)$ 

cujo gráfico está ilustrado na figura 4.2. Nesse caso, note que, se  $s > 0$ , então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(t - t_0)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} H(t - t_0) dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t_0}^{\infty} \\ &= \frac{e^{-t_0 s}}{s}. \end{aligned}$$

Essa transformada pode ser generalizada pela seguinte propriedade:

#### DESLOCAMENTO-II

Se  $s > 0$  e  $f(t)$  é admissível, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(t - t_0)f(t - t_0)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} H(t - t_0)f(t - t_0) dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t - t_0) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s(u+t_0)} f(u) du \\ &= e^{-t_0 s} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \\ &= e^{-t_0 s} F(s). \end{aligned}$$

Na terceira igualdade, de cima para baixo, utilizamos a mudança de variável  $u = t - t_0$ .<sup>11</sup>

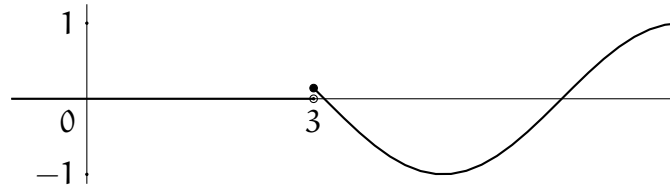
#### EXEMPLOS

1. Determine a TL da função seno “acionada” em  $t = 3$ , conforme a figura 4.3.

Essa função é dada por

$$S(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 3; \\ \text{sen } t & \text{se } t \geq 3. \end{cases}$$

<sup>11</sup>Note que, a função de Heaviside “aciona” outras funções, a partir de  $t = t_0$ .

Figura 4.3: Gráfico de  $S(t)$ 

Como  $S(t) = H(t-3) \operatorname{sen} t$  e

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t-3+3) = \operatorname{sen}(t-3) \cos 3 + \operatorname{sen} 3 \cos(t-3),$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{S(t)\} &= \cos 3 \mathcal{L}\{H(t-3) \operatorname{sen}(t-3)\} + \operatorname{sen} 3 \mathcal{L}\{H(t-3) \cos(t-3)\} \\ &= \cos 3 e^{-3s} \frac{1}{s^2+1} + \operatorname{sen} 3 e^{-3s} \frac{s}{s^2+1}, \end{aligned}$$

caso  $s$  seja positivo.

2. Considere  $s > 3$ . Logo, como

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-3)^3} \right\} = \frac{1}{2} t^2 e^{3t},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-7s}}{(s-3)^3} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-7s} \frac{1}{(s-3)^3} \right\} \\ &= \frac{1}{2} H(t-7) (t-7)^2 e^{3(t-7)}. \end{aligned}$$

### TL E DERIVADAS DE $f(t)$

Para  $s > 0$  e cada inteiro não-negativo  $n$  tais que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f^{(n)}(t) = 0,$$

temos

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f^{(0)}(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).^{12}$$

De fato:

- $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ;

<sup>12</sup>Aqui,  $f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}(f(t))$ .



- $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ , pois, via integração por partes,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \\ &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) (-se^{-st}) dt \\ &= s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \\ &= sF(s) - f(0);\end{aligned}$$

- $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ , pois

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \mathcal{L}\{(f')'(t)\} \\ &= s \mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0);\end{aligned}$$

Podemos aplicar, agora, indução finita sobre  $n$ .

#### EXEMPLOS

1. É possível reobter a TL de  $\cos(\omega t)$ , utilizando a fórmula (4.6).<sup>13</sup> De fato, basta observar que

$$\begin{aligned}\omega (\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}) &= \mathcal{L}\{\omega \cos(\omega t)\} \\ &= \mathcal{L}\{\text{sen}'(\omega t)\} \\ &= s \mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\} - \text{sen } 0 \\ &= s \left( \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= \omega \left( \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right).\end{aligned}$$

$$2. \mathcal{L}\{\text{sen}^2 t\} = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$

De fato, seja  $f(t) = \text{sen}^2 t$ . Então,  $f(0) = 0$  e

$$\begin{aligned}f'(t) &= 2 \text{sen } t \cos t \\ &= \text{sen } 2t.\end{aligned}$$

Por sua vez, a TL dessa derivada é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \mathcal{L}\{\text{sen } 2t\} \\ &= \frac{2}{s^2 + 4}.\end{aligned}$$

Agora, basta utilizar a fórmula

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

<sup>13</sup>Cf. página 69.

TLI E DERIVADAS DE  $F(s)$

Para cada inteiro  $n$  não-negativo onde exista a  $n$ -ésima derivada em relação a  $s$ , temos

$$\mathcal{L}^{-1} \{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t), \quad (4.7)$$

ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = f(t); \quad \mathcal{L}^{-1} \{F'(s)\} = -tf(t); \quad \mathcal{L}^{-1} \{F''(s)\} = t^2f(t); \quad \text{etc.}$$

A fórmula (4.7) é (trivialmente) válida para  $n = 0$  e, como

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \left( \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} (e^{-st}) f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} (-te^{-st}) f(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt \\ &= -\mathcal{L} \{t f(t)\}, \end{aligned}$$

também é válida para  $n = 1$ . Além disso, caso (4.7) seja válida para o inteiro não negativo  $n = \ell$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{t^{\ell+1} f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\ell+1} f(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} (-te^{-st}) t^{\ell} f(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} (e^{-st}) t^{\ell} f(t) dt \\ &= - \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\ell} f(t) dt \\ &= - \frac{d}{ds} \left( \mathcal{L} \{t^{\ell} f(t)\} \right) \\ &= (-1) \frac{d}{ds} \left( (-1)^{\ell} \frac{d^{\ell}}{ds^{\ell}} F(s) \right) \\ &= (-1)^{\ell+1} \frac{d^{\ell+1}}{ds^{\ell+1}} F(s), \end{aligned}$$

ou seja, (4.7) também é válida para  $n = \ell + 1$ . Portanto, por indução finita, (4.7) é válida para todo inteiro  $n$  não negativo.

EXEMPLOS

1. É fácil ver que, se  $s > 0$ , então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t \cos t\} &= -\frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s^2 + 1} \right) \\ &= -\frac{1 \cdot (s^2 + 1) - s \cdot 2s}{(s^2 + 1)^2} \\ &= \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}.\end{aligned}$$

2. Note que,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2 \cos(3t)\} &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{s}{s^2 + 9} \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left( \frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s^2 + 9} \right) \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left( \frac{9 - s^2}{(9 + s^2)^2} \right),\end{aligned}$$

cuja resolução fica como exercício.

### CONVOLUÇÃO

Se  $f(t)$  e  $g(t)$  são admissíveis, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &:= f(t) * g(t) \\ &= g(t) * f(t).\end{aligned}$$

De fato, considere os domínios de integração

$$D_{uv} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, v > 0\} \quad \text{e} \quad D_{t\tau} = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid t > \tau > 0\}$$

e a mudança de variáveis

$$\begin{cases} t = u + v, \\ \tau = u. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-su}f(u)du \int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv \\ &= \iint_{D_{uv}} e^{-s(u+v)}f(u)g(v)dudv \\ &= \iint_{D_{t\tau}} e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left[ \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] dt \\ &= \mathcal{L}\{f(t) * g(t)\}.\end{aligned}$$

## EXEMPLOS

1. Qual é a TLI de  $H(s) = \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$ ?

Primeiramente, note que,

$$F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \implies f(t) = g(t) = \frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t).$$

Assim, por convolução, temos:

$$\begin{aligned} h(t) &= (f * g)(t) \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t \text{sen}(\omega(t - \tau)) \text{sen}(\omega\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t \text{sen}(\omega t - \omega\tau) \text{sen}(\omega\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t (\text{sen}(\omega t) \cos(\omega\tau) \text{sen}(\omega\tau) - \text{sen}(\omega\tau) \cos(\omega t) \text{sen}(\omega\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega^2} \left( \text{sen}(\omega t) \int_0^t \text{sen}(\omega\tau) \cos(\omega\tau) d\tau - \cos(\omega t) \int_0^t \text{sen}^2(\omega\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\omega^3} \left( \text{sen}(\omega t) \int_0^{\omega t} \text{sen } u \cos u \, du - \cos(\omega t) \int_0^{\omega t} \text{sen}^2 u \, du \right) \\ &= \frac{1}{2\omega^3} (\text{sen}(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)). \end{aligned}$$

## 2. TL DA FUNÇÃO ERRO

Seja  $\text{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx$ . Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}(s-1)} \right\} = e^t \cdot \text{erf}(\sqrt{t}).$$

De fato, para  $F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$  e  $G(s) = \frac{1}{s-1}$ , temos  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$  e  $g(t) = e^t$ , se  $\tau = x^2$ , então

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{t-\tau} d\tau \\ &= \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau \\ &= \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{e^{-x^2}}{x} 2x dx \\ &= e^t \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Veamos, agora, como  $f(t)$  foi calculada:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u^2} \cdot \frac{\sqrt{s}}{u} \cdot \frac{2u}{s} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{s}},\end{aligned}$$

onde, na segunda e quarta igualdades, de cima para baixo, efetuamos, respectivamente, a mudança de variáveis  $st = u^2$  e os cálculos seguintes:

Para  $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ ,  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , temos

$$\begin{aligned}a \rightarrow \infty \implies I &= \iint_{D_{xy}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint_{D_{r\theta}} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[ \int_0^a e^{-r^2} r dr \right] d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^a e^{-r^2} (-2)r dr \right] \\ &= -\frac{\pi}{4} \int_0^{-a^2} e^u du \\ &= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2}) \\ &\rightarrow \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Por outro lado, para  $\alpha$  qualquer, temos

$$\begin{aligned}\alpha \rightarrow \infty \implies I_\alpha &= \int_0^\alpha \int_0^\alpha e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \left( \int_0^\alpha e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^\alpha e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left( \int_0^\alpha e^{-x^2} dx \right)^2 \\ &\rightarrow \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2.\end{aligned}$$

Seja, então,  $\alpha \in \{a, a/\sqrt{2}\}$ . Como  $I_{a/\sqrt{2}} < I < I_a$ ,<sup>14</sup> temos

$$a \rightarrow \infty \implies I \rightarrow \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2.$$

<sup>14</sup>No primeiro quadrante, o quarto da circunferência de centro  $(0,0)$  e raio  $a$ , está inscrito num quadrado de lado  $a$  e circunscrito num de lado  $a/\sqrt{2}$ .

Portanto, pela unicidade do limite,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Para concluir a seção 4.1, seguem mais duas propriedades e uma tabela onde estão elencadas algumas transformadas calculadas nesse capítulo. Nessa tabela, figuram, por exemplo, as transformadas das funções  $\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t)$  e  $\delta(t)$ , dita *delta de Dirac* e estudada na seção 4.2. Além disso, a apresentação das três últimas linhas da tabela objetiva estabelecer que *existem inúmeras outras transformadas que podem ser obtidas utilizando os resultados desse capítulo.*

#### VALORES INICIAIS E FINAIS

Se  $f'(t)$  é admissível, ou seja,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

então

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s), \quad (4.8)$$

caso esses limites existam.

#### EXEMPLO

Seja  $X(s) = \frac{1}{s(s+2)}$ . Então, por um lado,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-2t}) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

#### TL DE FUNÇÃO T-PERIÓDICA

Se  $f(t+T) = f(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , com  $f$  admissível e contínua por partes num período  $T$ , então

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

#### EXEMPLO

Seja  $f(t) = \text{sen } \omega t$ ,  $\omega > 0$ . Logo,  $f$  tem período  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-st} \text{sen}(\omega t) dt \\ &= \frac{\left[ -\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-st} \cos(\omega t) - \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{-st} \text{sen}(\omega t) \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \\ &= \frac{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left( 1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}} \right)}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

#### TABELA DE TRANSFORMADAS

Pode ser conveniente alocar os resultados das transformadas em algum tipo de tabela ou planilha, para utilização posterior. Na verdade, existem muitos livros dedicados apenas a essas tabelas. Segue, agora, uma delas, onde coletamos, no lado esquerdo, algumas funções admissíveis estudadas nesse livro, enquanto que, no lado direito, suas respectivas transformadas.<sup>15</sup> Além disso, o significado das três últimas linhas da tabela é o seguinte: existe um número infinito de transformadas e, muitas delas, podem ser obtidas com as apresentadas nesse capítulo.

<sup>15</sup>Nas duas linhas da tabela relacionadas ao limite (finito)  $\ell$ , a segunda coluna decorre da primeira, como consequência da proposição “Se ..., então ...” da página 78.

$f(t)$	$F(s)$
$t^n e^{cte t}, n = 0, 1, 2, \dots$	$n! / (s - cte)^{n+1}$ para $s > cte$
$e^{cte t} \text{sen}(\omega t)$	$\omega / ((s - cte)^2 + \omega^2)$ para $s$ e $\omega$ positivos e $s > cte$
$e^{cte t} \text{cos}(\omega t)$	$(s - cte) / ((s - cte)^2 + \omega^2)$ para $s$ e $\omega$ positivos e $s > cte$
$\text{senh}(\omega t)$	$\omega / (s^2 - \omega^2)$ para $s > \omega > 0$
$\text{cosh}(\omega t)$	$s / (s^2 - \omega^2)$ para $s > \omega > 0$
$\delta(t - cte)$	$e^{-cte s}$
$\text{erf}(cte t)$	$\frac{e^{s^2/4cte^2}}{s} \cdot \text{erfc}(s/2cte)$
$\text{erf}(\sqrt{cte t})$	$\frac{\sqrt{cte}}{s\sqrt{s+cte}}$
$\text{erfc}(cte/2\sqrt{t})$	$e^{-cte\sqrt{s}}/s$
$\frac{cte}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-cte^2/4t}$	$e^{-cte\sqrt{s}}$
$f(cte t)$	$\frac{1}{cte} F\left(\frac{s}{cte}\right)$ para $cte > 0$
$e^{cte t} f(t)$	$F(s - cte)$ para $s > cte$
$H(t - t_0) f(t - t_0)$	$e^{-st_0} F(s)$
$f(t) * g(t) := \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$
$f'(t)$ com $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \ell$	$sF(s) - f(0)$ com $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \ell$
$f'(t)$ com $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \ell$	$sF(s) - f(0)$ com $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \ell$
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
$f(t + T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-cte^2/4t} - cte \cdot \text{erfc}(cte/2\sqrt{t})$	$\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-cte\sqrt{s}}$
$\vdots$	$\vdots$



## 4.2 Edo e TL

Para resolver um *pvi* via TL, siga, em sequência, os passos seguintes:

1. Aplique a TL em ambos os membros da *edo* a ser resolvida;
2. Resolva o problema de álgebra resultante do passo 1;
3. Aplique a TLI em ambos os lados da solução obtida no passo 2.

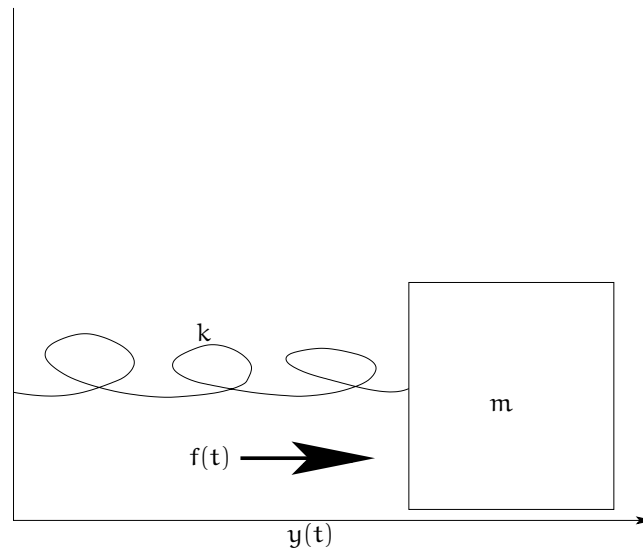
### EXEMPLO: SISTEMA MASSA-MOLA COM FORÇAMENTO

Sejam  $m$  e  $k$  a massa e a constante de Hooke, respectivamente, de um corpo sob a ação de uma força  $f(t)$  horizontal.<sup>16</sup> Considere, agora, o seguinte *pvi*:

$$\begin{cases} my''(t) + ky(t) = f(t); \\ y(0) = y_0; \\ y'(0) = y'_0. \end{cases}$$

Para uma ilustração desse sistema mecânico, confira a figura 4.4.

Figura 4.4: Sistema massa-mola com forçamento



Logo, seguindo os passos supracitados, temos:

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{my''(t) + ky(t)\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \implies m\mathcal{L}\{y''(t)\} + k\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \\ &\implies ms^2Y(s) - msy_0 - my'_0 + kY(s) = F(s); \end{aligned}$$

2.

$$Y(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + k} + \frac{msy_0}{ms^2 + k} + \frac{my'_0}{ms^2 + k};$$

<sup>16</sup>O uso de "horizontal" com  $y(t)$  e não  $x(t)$  é proposital!

3.

$$y(t) = \frac{1}{m} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s^2 + k/m} \right\} + y_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + k/m} \right\} + y'_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + k/m} \right\}.$$

Agora, se  $\omega = \sqrt{k/m}$ , como

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{\text{sen } \omega t}{\omega} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} = \cos \omega t,$$

então

$$y(t) = \frac{1}{m} \mathcal{L}^{-1} \left\{ F(s) \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} + y_0 \cos \omega t + \frac{y'_0}{\omega} \text{sen } \omega t.$$

Portanto, via convolução, temos:

$$y(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t f(\tau) \text{sen}(\omega(t - \tau)) d\tau + y_0 \cos \omega t + \frac{y'_0}{\omega} \text{sen } \omega t.$$

Por exemplo, seja  $f(t) = \text{sen } \omega t$ . Assim, procedendo como no primeiro exemplo dado após a definição de convolução,<sup>17</sup> temos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2m\omega^2} (\text{sen}(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)) + y_0 \cos(\omega t) + \frac{y'_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) \\ &= \left( \frac{2my'_0\omega + 1}{2m\omega^2} \right) \text{sen}(\omega t) + \left( \frac{2my_0\omega^2 - \omega t}{2m\omega^2} \right) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

### EXEMPLO

Considere o seguinte *pvi*:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 15y = 2 \text{sen } 3t; \\ y(0) = -1; \\ y'(0) = -4. \end{cases}$$

Aplicando  $\mathcal{L}$  na *edo* desse sistema, temos:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6(sY(s) - y(0)) + 15Y(s) = 2 \cdot \frac{3}{s^2 + 3^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) + s + 4 - 6sY(s) - 6 + 15Y(s) &= \frac{6}{s^2 + 9} \implies (s^2 - 6s + 15) Y(s) = \frac{6}{s^2 + 9} - s + 2 \\ \implies Y(s) &= \frac{-s^3 + 2s^2 - 9s + 24}{(s^2 + 9)(s^2 - 6s + 15)}. \end{aligned}$$

Via frações parciais, como

$$\begin{aligned} \frac{-s^3 + 2s^2 - 9s + 24}{(s^2 + 9)(s^2 - 6s + 15)} &= \frac{As + B}{s^2 + 9} + \frac{Cs + D}{s^2 - 6s + 15} \\ &= \frac{(A + C)s^3 + (-6A + B + D)s^2 + (15A - 6B + 9C)s + 15B + 9D}{(s^2 + 9)(s^2 - 6s + 15)}, \end{aligned}$$

<sup>17</sup>Cf. seção 4.1.

obtemos  $A = B = \frac{1}{10}$ ,  $C = -\frac{11}{10}$  e  $D = \frac{25}{10}$ . Logo

$$Y(s) = \frac{1}{10} \left( \frac{s+1}{s^2+9} + \frac{-11s+25}{s^2-6s+15} \right).$$

Para a primeira parcela da soma entre parênteses, como

$$\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s^2+9} = \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{s^2+9},$$

sua TLI é dada por

$$\cos 3t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3t.$$

Para a segunda, como

$$\begin{aligned} \frac{-11s+25}{s^2-6s+15} &= \frac{-11s+25}{s^2-6s+9+6} \\ &= \frac{-11s+25}{(s-3)^2+6} \\ &= \frac{-11(s-3)-8}{(s-3)^2+6} \\ &= -11 \cdot \frac{s-3}{(s-3)^2+6} - \frac{8}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{6}}{(s-3)^2+6}, \end{aligned}$$

sua TLI é dada por

$$-11e^{3t} \cos \sqrt{6}t - \frac{8}{\sqrt{6}} e^{3t} \operatorname{sen} \sqrt{6}t.$$

Portanto,

$$y(t) = \frac{1}{10} \left( \cos 3t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3t - 11e^{3t} \cos \sqrt{6}t - \frac{8}{\sqrt{6}} e^{3t} \operatorname{sen} \sqrt{6}t \right)$$

é a solução do *pvi* supracitado.

### EXEMPLO

Considere o seguinte *pvi*:

$$\begin{cases} y'' + 3ty' - 6y = 2; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Assim, como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty'\} &= -\frac{d}{ds} (\mathcal{L}\{y'\}) \\ &= -\frac{d}{ds} (sY(s) - y(0)) \\ &= -sY'(s) - Y(s), \end{aligned}$$

a aplicação de  $\mathcal{L}$  (a ambos os membros da *edo* do *pvi*) resulta em

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(-sY'(s) - Y(s)) - 6Y(s) = \frac{2}{s},$$

para  $s > 0$ , conforme a tabela de transformadas apresentada no final da seção 4.1. Portanto,

$$-3sY'(s) + (s^2 - 9)Y(s) = \frac{2}{s},$$

ou seja,

$$Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right)Y(s) = -\frac{2}{3s^2}, \quad (4.9)$$

cujos fator integrante é dado por

$$\begin{aligned} \mu(s) &= e^{\int \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right) ds} \\ &= e^{\ln(s^3) - \frac{s^2}{6}} \\ &= s^3 e^{-\frac{s^2}{6}}, \end{aligned}$$

conforme visto no capítulo 1. Então, multiplicando os dois membros de (4.9) por  $\mu(s)$  e integrando, temos:

$$\begin{aligned} s^3 e^{-\frac{s^2}{6}} Y(s) &= 2 \int e^{-\frac{s^2}{6}} \left(-\frac{s}{3}\right) ds \\ &= 2e^{-\frac{s^2}{6}} + \text{cte}. \end{aligned}$$

Logo,

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{\text{cte} e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3}.$$

Por outro lado, como  $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0$ , temos  $\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = 0$ , por (4.8).<sup>18</sup> Contudo,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{s^2} + \frac{\text{cte} e^{\frac{s^2}{6}}}{s^2} \right) = 0$$

apenas para  $\text{cte} = 0$ . Assim,

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} \implies y(t) = t^2.$$

### 4.2.1 Função delta de Dirac ( $\delta(t)$ )

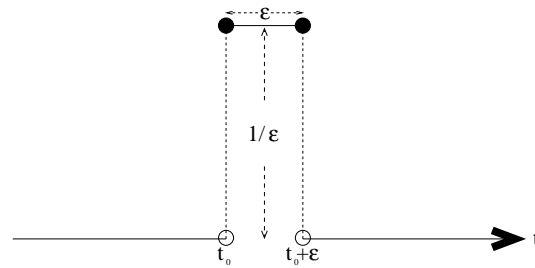
O *impulso*  $I$  de uma força  $f(t)$ , num intervalo de tempo  $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ , é definido como

$$I = \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} f(t) dt,$$

caso essa força seja integrável nesse intervalo de tempo. Caso o impulso seja intenso mas de curta duração, no lugar de  $f(t)$ , consideramos a força

$$f_\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & \text{para } t \in [t_0, t_0 + \varepsilon], \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

<sup>18</sup>Cf. página 78.

Figura 4.5: Força  $f_\varepsilon(t - t_0)$ 

conforme a figura 4.5. Assim, para  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,<sup>19</sup> o *impulso instantâneo* é definido (e calculado) da forma seguinte:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_0^\infty f_\varepsilon(t - t_0) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [t]_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \\ &= 1 \text{ u.i. (unidades de impulso)} \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$f_\varepsilon(t - t_0) = \frac{1}{\varepsilon} [H(t - t_0) - H(t - (t_0 + \varepsilon))],$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_\varepsilon(t - t_0)\} &= \frac{1}{\varepsilon s} (e^{-t_0 s} - e^{-(t_0 + \varepsilon)s}) \\ &= e^{-t_0 s} \cdot \frac{1 - e^{\varepsilon s}}{\varepsilon s}. \end{aligned}$$

#### DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DE $\delta(t)$

A função  $\delta(t)$  modela pulsos de curtíssima duração, como na figura 4.5, caso  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ou seja,

$$\delta(t - t_0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t - t_0).$$

Demonstra-se que:

- $\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & \text{para } t = t_0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Para  $t \neq t_0$ , considere  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, tal que  $t \notin [t_0, t_0 + \varepsilon]$ ;

- $\int_0^\infty \delta(t - t_0) dt = 1$ ;<sup>20</sup>

<sup>19</sup>Isto é,  $\varepsilon$  é um número positivo, arbitrariamente pequeno.

<sup>20</sup>De fato,  $\varepsilon \rightarrow 0 \implies I_\varepsilon \rightarrow 1$ .

- Se  $t_0 \in [t_1, t_2]$  está contido no domínio de  $f(t)$ , com  $f(t)$  contínua em  $t_0$ , então

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta(t - t_0) dt &= \int_{t_1}^{t_2} f(t_0) \delta(t - t_0) dt \\ &= f(t_0); \end{aligned}$$

- $\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-t_0 s}$ . De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{f_\varepsilon(t - t_0)\} &= e^{-t_0 s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} \\ &= e^{-t_0 s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s e^{-\varepsilon s}}{s} \\ &= e^{-t_0 s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\varepsilon s}. \end{aligned}$$

Note que, utilizamos L'hôpital na segunda igualdade, de cima para baixo.

#### EXEMPLO

Para o sistema massa-mola da página 81, considere  $m = 1$ ,  $k = 2$ ,  $f(t) = \delta(t - 1)$  e  $y_0 = y'_0 = 0$ . Além disso, ao primeiro membro de sua *edo*, adicione o triplo da derivada de sua função incógnita. Em suma, considere

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t - 1); \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Ao aplicarmos  $\mathcal{L}$  aos dois membros da *edo* desse sistema, temos

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) &= e^{-s} \implies s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = e^{-s} \\ \implies Y(s) &= e^{-s} F(s), \end{aligned}$$

onde, via frações parciais,

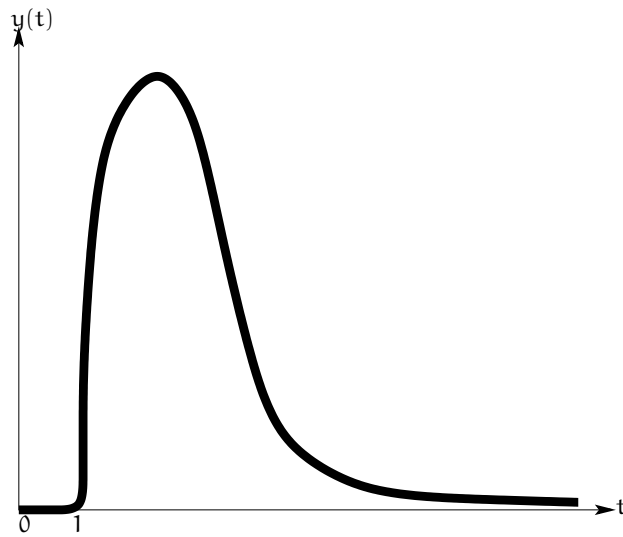
$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \\ &= \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}. \end{aligned}$$

Portanto, como

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \\ &= e^{-t} - e^{-2t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{e^{-s} F(s)\} \\ &= f(t - 1)H(t - 1) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < 1; \\ e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}, & \text{se } t \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

A figura 4.6 é uma representação qualitativa da solução desse sistema mecânico.

Figura 4.6: Representação qualitativa da solução  $y(t)$ 

### 4.2.2 TL e sistemas

Nos dois exemplos seguintes, vamos obter as soluções  $x(t)$  e  $y(t)$  de cada sistema dado.

1.

$$\begin{cases} x' = 2x + y; & x(0) = 1; \\ y' = 3x + 4y; & y(0) = 0. \end{cases}$$

Aplicando  $\mathcal{L}$  em cada *edo* desse sistema, temos:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 2X(s) + Y(s); \\ sY(s) - y(0) = 3X(s) + 4Y(s). \end{cases}$$

A substituição das condições iniciais dadas em cada equação algébrica desse sistema, resulta em:

$$\begin{cases} sX(s) - 1 = 2X(s) + Y(s); \\ sY(s) = 3X(s) + 4Y(s). \end{cases}$$

Manipulando algebricamente esse sistema, temos:

$$\begin{cases} (s-2)X(s) - Y(s) = 1; \\ -3X(s) + (s-4)Y(s) = 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$X(s) = \frac{s-4}{(s-1)(s-5)} \quad \text{e} \quad Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s-5)}.$$

Então, via frações parciais,

$$X(s) = \frac{3/4}{s-1} + \frac{1/4}{s-5} \quad \text{e} \quad Y(s) = \frac{-3/4}{s-1} + \frac{3/4}{s-5}.$$

Assim, aplicando  $\mathcal{L}^{-1}$  em cada uma das duas equações anteriores,

$$x(t) = \frac{3}{4} \cdot e^t + \frac{1}{4} \cdot e^{5t} \quad \text{e} \quad y(t) = -\frac{3}{4} \cdot e^t + \frac{3}{4} \cdot e^{5t}.$$

2.

$$\begin{cases} x' = 3x - 3y + 2; & x(0) = 1; \\ y' = -6x - t; & y(0) = -1. \end{cases} \quad (4.10)$$

Aplicando  $\mathcal{L}$  em cada *edo* de (4.10), temos:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 3X(s) - 3Y(s) + \frac{2}{s}; \\ sY(s) - y(0) = -6X(s) - \frac{1}{s^2}. \end{cases}$$

Substituindo as condições iniciais em cada equação algébrica desse sistema, resulta em:

$$\begin{cases} (s-3)X(s) + 3Y(s) = \frac{2+s}{s}; \\ 6X(s) + sY(s) = -\frac{s^2+1}{s^2}. \end{cases}$$

Agora, multiplique a equação de cima, desse sistema linear, por  $s$ , a de baixo por  $-3$  e adicione as equações resultantes, desses produtos, para obter:

$$(s^2 - 3s - 18)X(s) = 2 + s + \frac{3s^2 + 3}{s^2}.$$

Assim, via frações parciais,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s^3 + 5s^2 + 3}{s^2(s+3)(s-6)} \\ &= \frac{1}{108} \left( \frac{133}{s-6} - \frac{28}{s+3} + \frac{3}{s} - \frac{18}{s^2} \right). \end{aligned}$$

Aplicando  $\mathcal{L}^{-1}$  em ambos os membros dessa equação, temos:

$$x(t) = \frac{1}{108} \left( 133e^{6t} - 28e^{-3t} + 3 - 18t \right).$$

Por outro lado, a equação de baixo do sistema (4.10) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} y &= \int (-6x - t) dt \\ &= -\frac{1}{18} \int \left( 133e^{6t} - 28e^{-3t} + 3 \right) dt \\ &= -\frac{1}{108} \left( 133e^{6t} + 56e^{-3t} + 18t \right) + \text{cte}. \end{aligned}$$

Substituindo a condição inicial, associada à equação supracitada, nessa última, temos:

$$-1 = -\frac{1}{108}(133 + 56) + \text{cte} \implies \text{cte} = \frac{3}{4}.$$

Portanto,

$$y(t) = -\frac{1}{108} \left( 133e^{6t} + 56e^{-3t} + 18t - 81 \right).$$



# Capítulo 5

## Exercícios para os capítulos anteriores

Aqui, cada exercício desacompanhado de resposta/solução está resolvido como exemplo, no capítulo relativo a esse exercício. Sugiro que o leitor tente resolver cada um desses exercícios, sem consultar seu exemplo associado e, somente após um esforço genuíno, caso não consiga resolvê-lo, que tal exemplo seja revisado.

1. Nos itens seguintes, obtenha a solução geral de cada *edo* e a solução particular de cada *pvi*. Além disso, quando possível, determine o domínio I de cada solução obtida.

(a) LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

- i.  $\begin{cases} x' = \cos t; \\ x(0) = 0. \end{cases}$
- ii.  $\begin{cases} x' = \frac{1}{t}; \\ x(1) = 0. \end{cases}$
- iii.  $x' = \frac{t}{1+t^2}x.$
- iv.  $\begin{cases} x' = 2tx; \\ x(0) = 1. \end{cases}$
- v.  $\begin{cases} tx' = -x + t^2; \\ x(1) = x_0. \end{cases}$

(b) NÃO-LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

- i. SEPARÁVEIS
  - A.  $\begin{cases} x' = 1 + x^2; \\ x(0) = 0. \end{cases}$
  - B.  $x' = \frac{t^2}{x^2}.$
  - C.  $xx' = -t, x > 0.$
- ii. EXATAS<sup>1</sup>
  - A.  $(2tx - 3t^2) + (t^2 - 2x)\frac{dx}{dt} = 0.$
  - B.  $\begin{cases} (\cos t - t \operatorname{sen} t + x^2) + (2tx)\frac{dx}{dt} = 0; \\ x(\pi) = 1. \end{cases}$
- iii. BERNOULLI
  - A.  $\begin{cases} x' + \frac{4}{t}x = t^3x^2; \\ x(2) = -1. \end{cases}$

---

<sup>1</sup>Primeiramente, utilize a condição necessária para ser exata.

$$B. \begin{cases} x' = 5x + e^{-2t}x^{-2}; \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

iv. HOMOGÊNEA

$$A. \begin{cases} txx' + 4t^2 + x^2 = 0; \\ x(2) = -7. \end{cases}$$

(c) LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

$$i. \begin{cases} x'' + x' - 6x = 0; \\ x(0) = 1; \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

$$ii. 3x'' + x' - x = 0.$$

$$iii. 4x'' + 12x' + 9x = 0.$$

$$iv. x'' - 6x' + 13x = 0.$$

$$v. \begin{cases} x'' + x = 0; \\ x(0) = 2; \\ x'(0) = 3. \end{cases}$$

vi. Podemos modelar oscilações “suficientemente pequenas” para um pêndulo simples, rígido, de massa desprezível e comprimento  $L$  u.c. (unidades de comprimento), oscilando livremente, sem atrito em torno de um ponto fixo  $P$ , sem sofrer resistência do ar, conectado a uma massa unitária puntiforme na extremidade oposta à  $P$ , sob a ação da aceleração da gravidade  $g$ , pelo *pvi*.<sup>2</sup>

$$\begin{cases} x'' + \frac{g}{L}x = 0; \\ x(T) = x_0; \\ x'(T) = 0. \end{cases}$$

vii.  $x'' - 3x' + 2x = d(t)$ , para:

$$A. d(t) = e^{3t};$$

$$B. d(t) = 2t^2 + 4t + 1;$$

$$C. d(t) = \cos t;$$

$$D. d(t) = e^{3t} + 2t^2 + 4t + 1 + \cos t.$$

viii.  $x'' - 6x' + 9x = e^{3t}$ .ix.  $x'' + x = \sec t$ .

2. Para cada item abaixo, obtenha a solução de cada *edo/pvi* e, caso seja possível, seu respectivo domínio  $I$ .<sup>3</sup>

$$(a) \begin{cases} x' + 3t^2x = t^2; \\ x(1) = \frac{1}{3e}. \end{cases} \quad \text{SOLUÇÃO: } x = \frac{1}{3} + \frac{1-e}{e^{t^3}}; I = \mathbb{R}.$$

$$(b) \begin{cases} x' - \frac{1}{t}x = \frac{1}{t} \operatorname{sen} \frac{1}{t}; \\ x\left(\frac{-1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}. \end{cases} \quad \text{SOLUÇÃO: } x = t \cos \frac{1}{t}; I = (-\infty, 0).$$

$$(c) \begin{cases} x' + x = t; \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad \text{SOLUÇÃO: } x = t - 1 + \frac{2}{e^t}; I = \mathbb{R}.$$

$$(d) \begin{cases} x' = 6x^2t; \\ x(1) = \frac{1}{25}. \end{cases} \quad \text{SOLUÇÃO: } x = \frac{1}{28-3t^2}; I = \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}, \sqrt{\frac{28}{3}}\right).$$

<sup>2</sup>Aqui,  $T$  representa o período do pêndulo.

<sup>3</sup>Lembre-se:  $I = \mathbb{R}$  para cada *edo* linear homogênea de segunda ordem com coeficientes contantes.

(e)  $3t^2 - x^3 + (2x - 3tx^2) x' = 0.$

SOLUÇÃO:  $t^3 - tx^3 + x^2 = cte.$

(f)  $2tx - 3t^2 + (t^2 - 2x) x' = 0.$

SOLUÇÃO:  $t^2x - t^3 - x^2 = cte.$

(g)  $x' = 5x - 5tx^3.$

SOLUÇÕES:  $x = \pm \frac{\sqrt{10}e^{5t}}{\sqrt{cte + e^{10t}(10t-1)}}.$

(h)  $6x' - 2x = tx^4.$

SOLUÇÃO:  $x = -\frac{2^{1/3}e^{t/3}}{(cte + e^t(t-1))^{1/3}}.$

(i)  $x' = 1 + \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2.$

SOLUÇÃO:  $x = t \tan(\ln|t| + cte).$

(j)  $4x'' + x' = 0.$

SOLUÇÃO:  $x = cte_1 + cte_2 e^{-t/4}.$

(k)  $x'' + 4x = 8t^2 - 20t + 8 + 5 \operatorname{sen} 3t - 5 \operatorname{cos} 3t + 24e^{-2t} + 8 \operatorname{cos} 2t.$  SOLUÇÃO:  $x = cte_1 \operatorname{cos} 2t + cte_2 \operatorname{sen} 2t + 2t^2 - 5t + 1 + \operatorname{cos} 3t - \operatorname{sen} 3t + 3e^{-2t} + 2t \operatorname{sen} 2t + \frac{\operatorname{cos} 2t}{2}.$

(l)  $x'' + 2x' = 6e^{-2t} + 12t^2.$  SOLUÇÃO:  $x = cte_1 e^{-2t} + cte_2 - 3te^{-2t} + 2t^3 - 3t^2 + 3t.$

(m)  $x'' - 6x' - 7x = 13 \operatorname{cos} 2t + 34 \operatorname{sen} 2t + 8e^{-t} - 7t - 6.$

SOLUÇÃO:  $x = cte_1 e^{-t} + cte_2 e^{7t} + \operatorname{cos} 2t - 2 \operatorname{sen} 2t + t - te^{-t}.$

(n) 
$$\begin{cases} x'' - 4x' + 4x = 2e^{2t} - 12 \operatorname{cos} 3t - 5 \operatorname{sen} 3t; \\ x(0) = -2; \\ x'(0) = 4. \end{cases}$$

SOLUÇÃO:  $x = -2e^{2t} + 5te^{2t} + t^2 e^{2t} + \operatorname{sen} 3t.$

**RESOLUÇÃO DO ITEM (k)**

Por (2.7), página 26, basta obter  $x = x_h + x_p$ , onde  $x_h$  é a solução geral de  $x'' + 4x = 0$  e  $x_p$  é uma solução particular da *edo*

$$\begin{aligned} x'' + 4x &= d \\ &= d_1 + d_2 + d_3 + d_4; \\ d_1(t) &= 8t^2 - 20t + 8, \\ d_2(t) &= 5 \operatorname{sen} 3t - 5 \operatorname{cos} 3t, \\ d_3(t) &= 24e^{-2t}, \\ d_4(t) &= 8 \operatorname{cos} 2t. \end{aligned}$$

Por um lado,  $r^2 + 4 = 0$  acarreta  $r_{\pm} = 0 \pm 2i$ , onde  $i^2 = -1$ . Assim,

$$\begin{aligned} x_h &= e^{0 \cdot t} (cte_I \operatorname{cos} 2t + cte_{II} \operatorname{sen} 2t) \\ &= cte_I \operatorname{cos} 2t + cte_{II} \operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

Por outro, determinando um solução particular  $x_{p_i}$  de  $x'' + 4x = d_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , temos uma solução particular

$$x_p = x_{p_1} + x_{p_2} + x_{p_3} + x_{p_4}$$

de  $x'' + 4x = d$ .<sup>4</sup> Portanto:

---

<sup>4</sup>Verifique!

**i = 1**

Para A e B constantes,

$$\begin{aligned}x_{p_1}(t) = At^2 + Bt + C &\implies x'_{p_1}(t) = 2At + B \\ &\implies x''_{p_1}(t) = 2A\end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{aligned}x''_{p_1} + 4x_{p_1} = d_1 &\implies 4At^2 + 4Bt + 4C + 2A = 8t^2 - 20t + 8 \\ &\implies A = 2, B = -5 \text{ e } C = 1.\end{aligned}$$

Assim,

$$x_{p_1}(t) = 2t^2 - 5t + 1;$$

**i = 2**

Para D e E constantes,

$$\begin{aligned}x_{p_2}(t) = D \cos 3t + E \sin 3t &\implies x'_{p_2}(t) = -3D \sin 3t + 3E \cos 3t \\ &\implies x''_{p_2}(t) = -9D \cos 3t - 9E \sin 3t\end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{aligned}x''_{p_2} + 4x_{p_2} = d_2 &\implies -5D \cos 3t - 5E \sin 3t = -5 \cos 3t + 5 \sin 3t \\ &\implies D = 1 \text{ e } E = -1.\end{aligned}$$

Assim,

$$x_{p_2}(t) = \cos 3t - \sin 3t.$$

**i = 3**

Para F constante,

$$\begin{aligned}x_{p_3}(t) = Fe^{-2t} &\implies x'_{p_3}(t) = -2Fe^{-2t} \\ &\implies x''_{p_3}(t) = 4Fe^{-2t}\end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{aligned}x''_{p_3} + 4x_{p_3} = d_1 &\implies 8e^{-2t} = 24e^{-2t} \\ &\implies F = 3.\end{aligned}$$

Assim,

$$x_{p_3}(t) = 3e^{-2t}.$$

**i = 4**

Para G e H constantes,

$$\begin{aligned}x_{p_4}(t) = G \cos 2t + H \sin 2t &\implies x'_{p_4}(t) = -2G \sin 2t + 2H \cos 2t \\ &\implies x''_{p_4}(t) = -4G \cos 2t - 4H \sin 2t\end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{aligned}x''_{p_4} + 4x_{p_4} &= 0 \\ &\neq d_4.\end{aligned}$$

Logo, como G e H não podem ser constantes, podemos considerar

$$x_{p_4}(t) = g(t) \cos 2t + h(t) \operatorname{sen} 2t,$$

onde g e h são funções a serem determinadas. Contudo, utilizaremos outro procedimento para obter  $x_{p_4}$ : a fórmula da variação de parâmetros da subseção 2.2.2. Assim, como

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ -2 \operatorname{sen} 2t & 2 \cos 2t \end{vmatrix} \\ &= 2(\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 2t) \\ &= 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{p_4}(t) &= \cos 2t \int \frac{\operatorname{sen} 2t(-8 \cos 2t)}{1 \cdot 2} dt + \operatorname{sen} 2t \int \frac{\cos 2t(8 \cos 2t)}{1 \cdot 2} dt \\ &= -4 \cos 2t \int \operatorname{sen} 2t \cos 2t dt + 4 \operatorname{sen} 2t \int \cos^2 2t dt. \end{aligned}$$

Então, para  $u = 2t$ ,<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} x_{p_4}(t) &= -2 \cos 2t \int \operatorname{sen} u \cos u du + 2 \operatorname{sen} 2t \int \cos^2 u du \\ &= -\cos 2t \int \operatorname{sen} 2u du + 2 \operatorname{sen} 2t \int \cos^2 u du \\ &= \cos 2t \left( \frac{\cos 2u}{2} \right) + 2 \operatorname{sen} 2t \left( \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4} \right) \\ &= \frac{\cos 2t \cos 4t}{2} + \operatorname{sen} 2t \left( 2t + \frac{\operatorname{sen} 4t}{2} \right) \\ &= 2t \operatorname{sen} 2t + \frac{\cos 4t \cos 2t + \operatorname{sen} 4t \operatorname{sen} 2t}{2} \\ &= 2t \operatorname{sen} 2t + \frac{\cos 2t}{2}. \end{aligned}$$

Note que, na segunda (respectivamente, última) igualdade, de cima para baixo, utilizamos a fórmula do “seno da soma” (respectivamente, “cosseno da diferença”). Além disso, como

$$\begin{aligned} x'_{p_4}(t) &= 2 \operatorname{sen} 2t + 4t \cos 2t - \operatorname{sen} 2t \\ &= \operatorname{sen} 2t + 4t \cos 2t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x''_{p_4}(t) &= 2 \cos 2t + 4 \cos 2t - 8t \operatorname{sen} 2t \\ &= 6 \cos 2t - 8t \operatorname{sen} 2t \end{aligned}$$

e, portanto,

$$x''_{p_4} + 4x_{p_4} = d_4.$$

---

<sup>5</sup>Logo,  $dt = \frac{1}{2} du$ .

3. Quais das seguintes séries convergem/divergem? Justifique suas respostas e apresente os domínios e raios de convergência para as séries de potências convergentes.

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n};$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n};$

(c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n};$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}};$

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3+3n}{7n^3-2n^2+n};$

RESPOSTA: A série diverge.

(f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$

(g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n};$

(h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}};$

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!};$

(j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n};$

(k)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;$

(l)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1};$

(m)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)};$

(n)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n};$

(o)  $\sum_{n=0}^{\infty} t^n;$

(p)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nt}{2^n};$

(q)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n;$

(r)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n}.$

(s)  $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)!(t-2)^n.$

4. Utilizando a série geométrica, obtenha representações em série de funções e I para:

(a)  $g(t) = \frac{1}{1+t^3}$ ;

(b)  $h(t) = \frac{2t^3}{1+t^3}$ ;

(c)  $\varphi(t) = \frac{t}{5-t}$ ;

(d)  $\phi(t) = \frac{t^2}{t-5}$ ;

(e)  $x(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ ;

(f)  $y(t) = \frac{2}{(1-t)^3}$ .<sup>6</sup> RESPOSTA:  $y(t) = 2 + 6t + 12t^2 + \dots$  para cada  $t \in I = (-1, 1)$ .

5. Verifique a analiticidade de  $f(t)$  em  $I = (-R, R)$  escrevendo a série de Maclaurin de  $f$  em  $I$  se:

(a)  $f(t) = \frac{1}{1-t}$ ,  $R = 1$ ;

(b)  $f(t) = e^t$ ,  $R = \infty$ ;

(c)  $f(t) = \ln(1+t)$ ,  $R = 1$ ;

(d)  $f(t) = \text{sen } t$ ,  $R = \infty$ ;

(e)  $f(t) = \text{cos } t$ ,  $R = \infty$ .

6. Resolva as *edos* seguintes via séries de Taylor em torno de zero.

(a)  $x' - x = 0$ .

(b)  $x' = t^2x$ .

(c)  $x'' + x = 0$ .

(d)  $x'' - tx = 0$ .

(e)  $x'' - t^2x = 0$ .

(f)  $(t^2 + 1)x'' - 4tx' + 6x = 0$ .

(g)  $\begin{cases} (t^2 + 1)x'' + tx' - x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$

(h)  $\begin{cases} x'' - 2tx' + x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$

7. Nos itens seguintes, dada uma função na variável  $t$ , obtenha a sua TL na variável  $s$  e, reciprocamente, dada uma função na variável  $s$ , determine a sua TLI na variável  $t$ .

(a)  $p(t) = -t^4 + 2t^3 + t - 7$ .

(b)  $F(s) = \frac{s+3}{s(s-1)(s+2)}$ .

(c)  $G(s) = \frac{s-1}{s^2+2s-8}$ .

(d)  $X(s) = \frac{s^2}{(s+3)^3}$ .

---

<sup>6</sup>Note que  $\frac{dx}{dt} = y$ .

(e)  $Y(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s+5}$ .

(f)  $S(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 3; \\ \text{sen } t, & \text{se } t \geq 3. \end{cases}$

(g)  $A(s) = \frac{e^{-7s}}{(s-3)^3}$ .

(h)  $x(t) = \text{sen}^2 t$ .

(i)  $g(t) = t \cos t$ .

(j)  $h(t) = t^2 \cos(3t)$ .

(k)  $H(s) = \frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$ .

8. Resolva, usando uma tabela de transformadas de Laplace, os sistemas seguintes:

(a) Sistema massa-mola com forçamento horizontal  $f(t)$ , massa  $m$  e constante de Hooke  $k$ :

$$\begin{cases} my''(t) + ky(t) = f(t); \\ y(0) = y_0; \\ y'(0) = y'_0. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y'' - 6y' + 15y = 2 \text{sen } 3t; \\ y(0) = -1; \\ y'(0) = -4. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y'' + 3ty' - 6y = 2; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t-1); \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x' = 2x + y; & x(0) = 1; \\ y' = 3x + 4y; & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x' = 3x - 3y + 2; & x(0) = 1; \\ y' = -6x - t; & y(0) = -1. \end{cases}$$



# Capítulo 6

## Matemática e clima

Nesse capítulo, começaremos a relacionar as *edos* com a *modelagem climática*.<sup>1</sup>

### 6.1 Climatologia

É o ramo das *ciências atmosféricas* que lida com padrões de tempo (*weather*), as mudanças desses padrões ao longo do tempo (*time*) e os efeitos dessas mudanças no nosso planeta.<sup>2</sup> Esse ramo científico é fundamental para o entendimento dos fatores que influenciam o clima terrestre, tais como: a rotação do nosso planeta, a quantidade de radiação solar que atinge a Terra, a distribuição de terra e água, etc. Atualmente, a climatologia é imprescindível na previsão de mudanças climáticas e nos potenciais impactos dessas mudanças e, para melhor entendê-las, algumas disciplinas científicas aplicadas são essenciais, tais como:

- *Ciências atmosféricas*. Especialistas nessa área estudam a composição, a química e a física da atmosfera, que são reguladores críticos da temperatura terrestre, para modelar a concentração dos gases do *efeito estufa* e os padrões da circulação atmosférica e, assim, obterem projeções de como a atmosfera poderá reagir às mudanças climáticas;
- *Oceanografia*. Nossos oceanos desempenham um papel importante na absorção de calor e dióxido de carbono. Os oceanógrafos estudam os padrões das correntes oceânicas, dos níveis de salinidade e do estado dos ecossistemas marinhos para entenderem como os oceanos estão reagindo às mudanças climáticas;
- *Glaciologia*. Os glaciologistas estudam as geleiras, as placas de gelo oceânicas, os icebergs, etc., fundamentais na análise dos dados relativos ao clima terrestre no passado remoto. Analizando longos tubos de gelo, eles conseguem reconstruir variações de temperatura que cobrem um período de milhares de anos;

---

<sup>1</sup>Seguiremos (de pertíssimo) o excelente livro, publicado pela SIAM em 2013,

Mathematics and Climate,

(\*)

de autoria dos matemáticos Hans Kaper e Hans Engler.

<sup>2</sup>A propósito, doravante, os “tempos” supracitados estarão acompanhados das letras *w* e *t*, dependendo de suas traduções na língua inglesa. Além disso, o tempo (*w*) pode ser definido como o estado das condições meteorológicas/atmosféricas locais de curta duração, ou seja, num período de alguns dias ou algumas semanas. Por outro lado, o *clima* pode ser definido como a média temporal (*t*) de longa duração (meses, semestres, anos, décadas, séculos, milênios, etc.) do clima, para grandes regiões da Terra.

- *Modelagem climática.* Modelos climáticos são simulações computacionais/numéricas que mimetizam o sistema climático terrestre. Esses modelos são utilizados como possíveis/prováveis projeções das mudanças climáticas futuras sob diferentes cenários.

Portanto, métodos quantitativos e qualitativos das ciências básicas (química, física, computação, estatística e matemática) podem ser utilizados no estudo do clima, pois elas representam o “idioma” no qual as disciplinas aplicadas supracitadas são escritas.

### OBSERVAÇÕES

- A principal característica do *sistema climático terrestre (sct)* é a sua altíssima complexidade. De fato, esse sistema é particionado e fortemente influenciado por essas partes, tais como:
  - Hidrosfera;<sup>3</sup>
  - Criosfera;<sup>4</sup>
  - Litosfera;<sup>5</sup>
  - Biosfera;<sup>6</sup>
  - Atmosfera;<sup>7</sup>
  - Radiação solar;<sup>8</sup>
  - Forçamentos (*forcings*);<sup>9</sup>
  - Retroalimentação sistêmica;<sup>10</sup>
  - Interdependência das partes supracitadas.
- Usaremos modelos qualitativos conceituais que reduzem consideravelmente a complexidade supracitada e, mesmo assim, ilustram aspectos importantes do *sct*. Além disso, apresentaremos algumas técnicas matemáticas na análise desses modelos.
- O único modo de estudarmos o *sct* é via modelos matemáticos, experimentos numéricos e análise de dados. Experimentos físicos controlados (e sem riscos para o planeta), na escala temporal (*t*) adequada para a eficácia do modelo, estão fora de questão.
- Um modelo matemático, por mais complexo que ele seja, sempre é uma aproximação grosseira da realidade. O importante é que o modelo produza informações úteis para o entendimento do fenômeno modelado.

<sup>3</sup>Parte da Terra relacionada com a água.

<sup>4</sup>Parte da Terra relacionada com a água em estado de congelamento.

<sup>5</sup>Parte da Terra relacionada com a terra.

<sup>6</sup>Relacionada com os animais e vegetais do planeta.

<sup>7</sup>Região entre a superfície do planeta e o vácuo espacial.

<sup>8</sup>Energia eletromagnética irradiada pelo Sol.

<sup>9</sup>Fatores externos naturais (como as variações cíclicas da órbita da Terra em torno do Sol, erupções vulcânicas, variações na atividade solar, etc.) e antropogênicos, ou seja, induzidos pelo homem (como a composição atmosférica, uso da terra, etc.).

<sup>10</sup>Causada pelos efeitos da variabilidade do próprio sistema.

**EXEMPLO**

No modelo do pêndulo simples,<sup>11</sup> ainda que não tenhamos considerado o atrito no pivô da haste (ponto onde a haste está pendurada), a resistência do ar e a massa do pêndulo (haste + corpo esférico na extremidade da haste), pudemos calcular o período, fundamental para os relógios mecânicos.

## 6.2 Modelo de equilíbrio/balanço energético terrestre (*meet*)

O *meet* será representado por uma *edo* de primeira ordem

$$F\left(t, T, \frac{dT}{dt}\right),$$

onde  $F$  é uma relação funcional entre o tempo ( $t$ ), a temperatura média global da superfície terrestre ( $T$ ) e a sua derivada temporal ( $dT/dt$ ). Como veremos,  $dT/dt$  será proporcional à diferença energética  $E_{in} - E_{out}$ , onde  $E_{in}$  é proporcional à  $S_0$ , que é a radiação solar média, incidente na Terra, por metro quadrado ( $m^2$ ), por unidade de tempo ( $t$ ), sendo aproximadamente  $1368 \text{ W/m}^2$  (*watts* por  $m^2$ ), e  $E_{out}$  representa a energia térmica (*calor*) média(o), emitida(o) pela Terra, por  $m^2$ , por unidade de tempo, conforme ilustramos nas figuras 6.1 e 6.2.

Figura 6.1: Energia eletromagnética incidente na Terra ( $E_{in}$ )

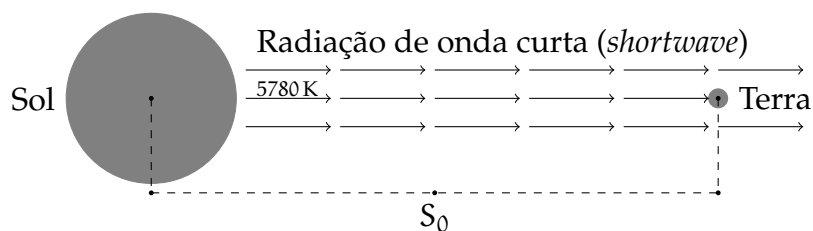
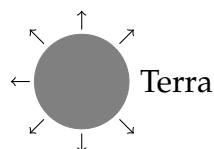


Figura 6.2: Energia térmica emitida pela Terra ( $E_{out}$ )

Radiação de onda longa (*longwave*)



Nesse modelo, conforme veremos,  $T$  aumenta quando  $E_{in} > E_{out}$ , diminui quando  $E_{in} < E_{out}$  e, como não poderia ser diferente, está em equilíbrio energético quando  $E_{in} - E_{out} = 0$ . Além disso, faremos algumas aproximações razoáveis, outras grosseiras, ao considerarmos as “hipóteses” seguintes:

<sup>11</sup>Cf. p. 25.

- A temperatura na superfície do Sol é de aproximadamente  $5780^0\text{K}$  (*graus Kelvin*);
- Para podermos relacionar  $E_{in}$  e  $S_0$ , a órbita da Terra ao redor do Sol, nesse modelo, é aproximadamente circular;<sup>12</sup>
- No *meet*, a Terra é aproximadamente esférica e sólida, com área aproximada dada por  $A_{esf} = 4\pi R^2$ , onde  $R$  é o seu raio aproximado;
- Devido à distância orbital (de aproximadamente 149,6 milhões de quilômetros) e aos seus tamanhos relativos, a radiação solar atinge à Terra, perpendicularmente, como se ela fosse um disco de área  $A_{dis} = \pi R^2$ ;
- Diferenças na composição atmosférica terrestre serão ignoradas;
- Diferenças topográficas, oceânicas, continentais, locais, de insolação,<sup>13</sup> etc., serão ignoradas;
- A energia necessária, medida em watt – ano/ $\text{m}^2\text{K}$ ,<sup>14</sup> para aumentar  $T$  em  $1^0\text{K}$ , é constante e igual à  $C$ , o seu valor médio. Essa energia é conhecida como *capacidade de calor* (*heat capacity*) do sistema.

Assim, como  $\Delta T = T(t + \Delta t) - T(t)$ , a capacidade de calor para que a temperatura média da Terra atinja o valor  $T(t + \Delta t)$  é dada por

$$A_{esf}C\Delta T.$$

Portanto, como o Sol é a única fonte de energia nesse modelo,

$$A_{esf}C\Delta T = A_{esf} (E_{in} - E_{out}) \Delta t.$$

Consequentemente, para  $\Delta t$  arbitrariamente próximo de zero, podemos considerar

$$C \frac{dT}{dt} = E_{in} - E_{out}. \quad (6.1)$$

### OBSERVAÇÕES

- Caso exista forçamento, (6.1) é uma *edo não autônoma*, isto é, dependente do tempo ( $t$ ), pois  $E_{in} = E_{in}(t)$  e  $E_{out} = E_{out}(t)$ . Por outro lado, sem forçamento, essa dependência existe mas é indireta, pois, claramente,  $T(t)$  depende de  $E_{in}$  e  $E_{out}$ .
- A dinâmica do *meet* depende das especificidades de  $E_{in}$  e  $E_{out}$ .

<sup>12</sup>A órbita supracitada é, de fato, aproximadamente elíptica não circular!

<sup>13</sup>É o fluxo de energia eletromagnética por unidade de área e varia com a latitude, hora do dia, estação do ano e nebulosidade, tendendo à zero durante a noite e sendo igual à  $S_0$  quando a Terra está numa distância média do Sol.

<sup>14</sup>Por conveniência, nesse livro, o uso da notação de grau é facultativo.

### 6.2.1 meet básico

Caso  $Q = \frac{S_0}{4}$  e  $\alpha$  seja o *albedo* (médio) da Terra,<sup>15</sup> considere

$$\begin{aligned} E_{\text{in}} &= \frac{(1 - \alpha)A_{\text{dis}}S_0}{A_{\text{esf}}} \\ &= \frac{(1 - \alpha)(\pi R^2)S_0}{4\pi R^2} \\ &= (1 - \alpha)Q. \end{aligned}$$

Além disso, pela *lei de Stefan-Boltzmann* para a *radiação do corpo negro*, considere

$$E_{\text{out}}(T) = \sigma T^4,$$

onde  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{W/m}^2\text{K}^4$ .<sup>16</sup> Logo, para obtermos a temperatura  $T = T^*$  no equilíbrio energético, como

$$C \frac{dT}{dt} = (1 - \alpha)Q - \sigma T^4, \quad (6.2)$$

temos

$$(1 - \alpha)Q = \sigma T^4,$$

ou seja,

$$T^* = \left[ \frac{(1 - \alpha)Q}{\sigma} \right]^{1/4}.$$

Como  $S_0 \approx 1368 \text{W/m}^2$ , isto é,  $Q \approx 342 \text{W/m}^2$ , e  $\alpha \approx 0,30$ ,<sup>18</sup> obtemos

$$T^* \approx 254,9^0\text{K} \approx -18,3^0\text{C}.$$
<sup>19</sup>

Contudo, o valor médio para a temperatura da superfície da Terra é, aproximadamente,

$$288^0\text{K} \approx 14,5^0\text{C}.$$
<sup>20</sup>

Para tentarmos corrigir essa discrepância térmica, vamos ajustar a energia  $E_{\text{out}}$  do *meet* básico.

<sup>15</sup>Ou seja, a fração da energia eletromagnética não interceptada pela Terra, via reflexão, devido às nuvens, à composição atmosférica (aerossóis, por exemplo), ao gelo ou neve, etc.

<sup>16</sup>Esse tipo de radiação depende apenas da temperatura do objeto que a está emitindo, após ter absorvido toda a radiação solar nele incidindo. Embora isso seja uma idealização, podemos considerar alguns objetos que emitem radiação numa frequência próxima a de um “corpo negro”. Por exemplo, numa lareira, quando a madeira queimada, após um tempo, já passou até do estado de brasa, mas ainda está emitindo calor, essa emissão é semelhante à da radiação supracitada. A propósito, a radiação emitida por aparelhos de micro-ondas também é do tipo supracitado.

<sup>17</sup>Cf. (6.1).

<sup>18</sup>Cf. <https://earthobservatory.nasa.gov/images/84499/measuring-earths-albedo>.

<sup>19</sup>Graus Celcius.

<sup>20</sup>Cf. <https://science.nasa.gov/solar-system/temperatures-across-our-solar-system>.

### 6.2.2 *meet* com efeito estufa

Denotemos por  $\lambda$  o comprimento de onda do espectro eletromagnético da energia irradiada. Aproximadamente, 9 por cento de  $E_{in}$  é irradiada na baixíssima frequência da luz ultravioleta, com  $\lambda < 0,4 \mu\text{m}$  (micrometros), 38 por cento na baixa frequência da “luz visível”, com  $0,4 \mu\text{m} \leq \lambda < 0,7 \mu\text{m}$ , e 53 por cento próximo da frequência da luz infravermelha, com  $0,7 \mu\text{m} \leq \lambda < 4 \mu\text{m}$ . Por outro lado,  $E_{out}$  é irradiada na alta frequência da luz infravermelha, com  $\lambda > 5 \mu\text{m}$ .

Devido as suas propriedades químicas, os gases do efeito estufa (dióxido de carbono, vapor d’água, metano e aerossóis) deixam a atmosfera mais opaca para  $E_{out}$ , mas não para  $E_{in}$ , e, para tentarmos mater o equilíbrio energético, vamos parametrizar  $E_{out}$  com um percentual  $0 < \varepsilon < 1$ , ou seja,

$$E_{out} = \varepsilon \sigma T. \quad (6.4)$$

Consequentemente, no equilíbrio energético,

$$(1 - \alpha)Q = \varepsilon \sigma T,$$

isto é,

$$T^* = \left[ \frac{(1 - \alpha)Q}{\varepsilon \sigma} \right]^{1/4}.$$

Assim, para  $\varepsilon = 0,614$  e os valores de  $\alpha$ ,  $Q$  e  $\sigma$  dados na subseção 6.2.1, temos

$$T^* \approx 288 \text{ K}.$$

### 6.2.3 *meet* com múltiplos pontos de equilíbrio

Em geral, o albedo terrestre depende da temperatura, ou seja,  $\alpha = \alpha(T)$ . De fato, caso  $T$  seja suficientemente baixa, uma grande parte de  $E_{in}$  é refletida pela Terra, devido à uma espessa cobertura de gelo e neve, e, portanto,  $\alpha = 0,3$  fixo (como nos modelos 6.2.1 e 6.2.2) não é adequado. Por exemplo, caso a temperatura média global fique abaixo de 250 K,<sup>21</sup> que é muito abaixo da temperatura média atual de 288 K,<sup>22</sup> aproximadamente, a Terra estaria num processo de congelamento, tendendo à um mundo conhecido como *snowball earth*, onde:

- A maior parte dos oceanos congelaria, possivelmente, até muitos quilômetros abaixo do nível do mar, com implicações catastróficas para a vida marinha e os padrões de tempo (*w*);
- As geleiras e as calotas polares sofreriam uma grande expansão, que cobriria grandes regiões da Terra, como a América do Norte e a Eurásia;
- A atmosfera seria reduzida a uma fina camada, pois muitos gases, principalmente o vapor d’água, condensariam e congelariam. Isso reduziria o efeito estufa e esfriaria o planeta.

Assim, vamos incluir nos modelos supracitados a possibilidade desse esfriamento terrestre ocorrer via

$$\alpha(T) \approx \begin{cases} 0,7 & \text{se } T < 250 \text{ K,} \\ 0,3 & \text{se } T > 280 \text{ K.} \end{cases}$$

<sup>21</sup>Ou seja, abaixo de  $-23^\circ\text{C} \approx -11^\circ\text{F}$ .

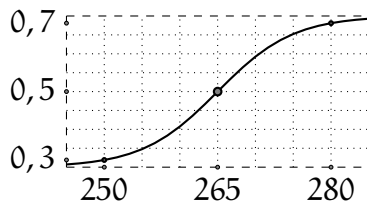
<sup>22</sup>Ou seja,  $15^\circ\text{C} \approx 59^\circ\text{F}$ .

Além disso, caso

$$E_{in} = (1 - \alpha(T))Q \quad (6.5)$$

tenha um crescimento suave (diferenciável) e um comportamento assintótico em altíssimas ou baixíssimas temperaturas,<sup>23</sup> podemos considerar um modelo em que  $E_{in}$  represente uma dinâmica similar a da figura 6.3.<sup>24</sup> O modelo supracitado é obtido via, por exemplo,<sup>25</sup>

Figura 6.3:  $T \times 1 - \alpha(T)$ ,  $T$  em graus Kelvin



$$\alpha(T) = 0,5 - 0,2 \tanh\left(\frac{T - 265}{10}\right).^{26}$$

Consequentemente, substituindo (6.4) e (6.5) em (6.1),<sup>27</sup> o equilíbrio é atingido para  $T$  satisfazendo a equação

$$(1 - \alpha(T))Q = \varepsilon\sigma T^4,$$

que não tem solução analítica. Contudo, para  $\varepsilon = 0,6$  e os valores de  $Q$  e  $\sigma$  dados na subseção 6.2.1, as soluções numéricas da equação supracitada são dadas pelas temperaturas

$$T_1^* \approx 288 \text{ K}, T_2^* \approx 265 \text{ K (o ponto de inflexão supracitado)} \text{ e } T_3^* \approx 233 \text{ K},$$

obtidas pelas interseções dos gráficos de  $E_{in}(T)$  e  $E_{out}(T)$  conforme a figura 6.4.

### Ponto de equilíbrio estável/instável

Vimos que a temperatura média da Terra, por milênios, tem se mantido próxima de  $T_1^*$ .<sup>28</sup> Portanto,  $T_1^*$  é um *ponto de equilíbrio estável*. Analisaremos (matematicamente) o tipo de *estabilidade* do ponto  $T_i^*$ , onde  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,<sup>29</sup> pelo sinal do segundo membro de (6.1),<sup>30</sup> para

<sup>23</sup>Nosso sistema solar tem mantido uma dinâmica estruturalmente estável por bilhões de anos. Estudos indicam que, em alguns bilhões de anos, na etapa final do seu processo evolutivo, o Sol será uma *anã branca*. Antes de atingir essa etapa, o raio do Sol aumentará, ultrapassando a distância solar da Terra. Pela estabilidade estrutural supracitada, ainda temos alguns bilhões de anos antes da Terra ser carbonizada. Até lá, tudo indica que aumentos de temperatura serão assintóticos. Analogamente, qualquer eventual esfriamento também será assintótico.

<sup>24</sup>Note o ponto de inflexão no centro dessa figura.

<sup>25</sup>Poderíamos ter utilizado a função arctan, convenientemente transladada, rotacionada e submetida a uma mudança de coordenadas que otimize a comparação entre as escalas dos eixos.

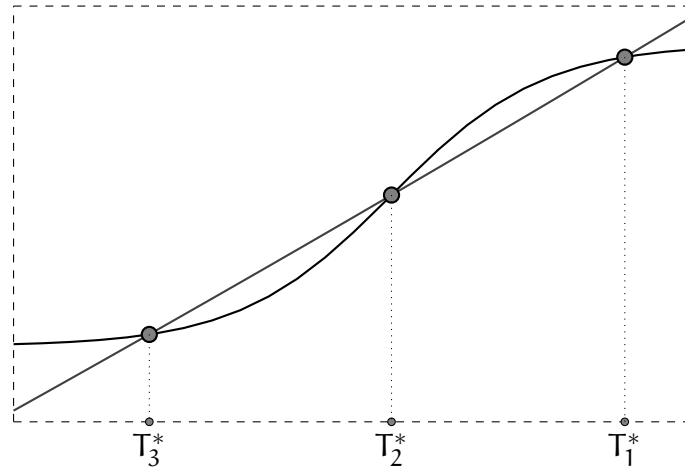
<sup>26</sup>A divisão por 10 permite uma melhor comparação entre as escalas dos eixos!

<sup>27</sup>Cf. pp. 100, 102 e 103.

<sup>28</sup>Cf. (6.3), p. 101.

<sup>29</sup>Esse conceito de estabilidade será definido formalmente num contexto mais geral.

<sup>30</sup>Cf. p. 100

Figura 6.4:  $E_{in}(T)$ ,  $E_{out}(T)$  (em cinza) e temperaturas de equilíbrio

pontos  $T$  suficientemente próximos de  $T_i^*$ , ou seja, onde  $|T - T_i^*|$  seja suficientemente pequeno. Note que, para os pontos supracitados, se  $i \in \{1, 3\}$  e  $T < T_i^*$  (respectivamente,  $T > T_i^*$ ), então o segundo membro supracitado é positivo (respectivamente, negativo), ou seja,  $dT/dt$  é positiva (respectivamente, negativa). Assim, como  $T$  é crescente (respectivamente, decrescente) até  $T_i^*$ , dizemos que  $T_i^*$  é *assintoticamente estável*. Por outro lado, para  $T$  próximo de  $T_2^*$  tal que  $T < T_2^*$  (respectivamente,  $T > T_2^*$ ), o segundo membro supracitado é negativo (respectivamente, positivo), isto é,  $dT/dt$  é negativa (respectivamente, positiva). Assim, como  $T$  é decrescente (respectivamente, crescente) a partir de  $T_i^*$ , dizemos que  $T_i^*$  é *instável*.

Antes de continuarmos a análise desses pontos, consideraremos um modelo mais preciso e próximo da realidade, que descreve a mesma dinâmica do modelo dessa subseção, via uma aproximação linear de  $E_{out}$ .

#### 6.2.4 *meet de Budiko*

Essa subseção e a subseção 6.2.3 diferem apenas na energia térmica liberada pela Terra. Aqui,

$$E_{out} = A + BT,$$

onde  $A$  e  $B$  são obtidos por *regressão linear* sobre dados de satélites. O melhor ajustamento para o clima atual foi obtido no final da década de 70, com valores dados por

$$A \approx 203,3 \text{ W/m}^2 \text{ e } B \approx 2,092 \text{ W/m}^2\text{grau(Celcius)},^{31}$$

que na equação

$$(1 - \alpha(T))Q = A + BT$$

acarretam um gráfico e três pontos de equilíbrio aproximadamente iguais aos da figura 6.4 (no enquadramento dado).

Em relação as temperaturas de equilíbrio,  $T_1^* - T_3^*$  é (aproximadamente) menor que  $-50 \text{ K}$ ,

<sup>31</sup>À guisa de comparação, caso aproximemos linearmente  $E_{out}$  da subseção 6.2.3,  $A$  e  $B$  ficam distantes dos valores supracitados. (Cf. (\*), p. 97.)



$T_1^*$  representa a temperatura “atual” (da Terra), ou seja, bem acima da temperatura de congelamento da água,<sup>32</sup> e  $T_3^*$  representa a temperatura da *snowball earth*, ou seja, muito abaixo da temperatura de congelamento dos oceanos, conforme destacamos no início da subseção 6.2.3.<sup>33</sup> Consequentemente, tendo ocorrido a *snowball earth*, cabem três perguntas:

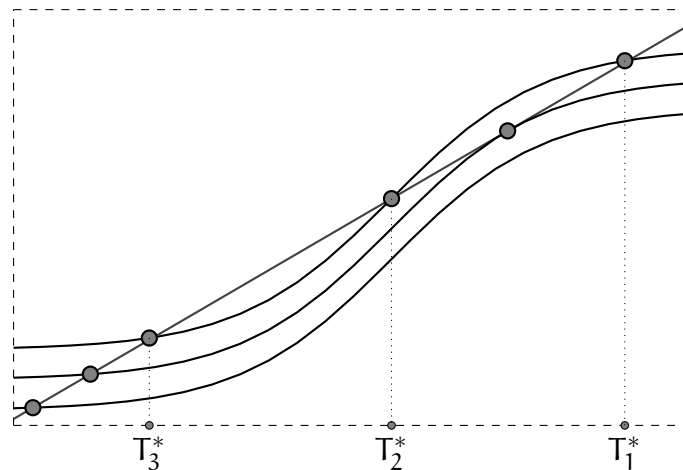
1. O que causou a transição para esse estado (de congelamento)?
2. O que causou a saída desse estado?
3. Na dinâmica de  $T_3^*$  para  $T_1^*$ ,  $T_2^*$  foi atingida?

Respostas razoáveis para as essas perguntas são dadas na seção 2.7 da referência (\*).<sup>34</sup> Em particular, caso o nosso modelo mimetize a evolução temporal ( $t$ ) do clima terrestre, a resposta matemática (pela *teoria das bifurcações*) para a pergunta 3 é a seguinte: o ponto instável ( $T_2^*$ ) não foi atingido!

### 6.2.5 Introduzindo bifurcações

O que ocorre com  $T_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ , quando o parâmetro  $Q = S_0/4$  varia?<sup>35</sup>

Figura 6.5:  $E_{in}$  e  $T_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ , variando



Caso  $S_0$  seja decrescente,  $T_2^*$  e  $T_1^*$  se aproximam, se sobrepõem e, então, desaparecem, sobrando apenas  $T_3^*$ , conforme a figura 6.5. Analogamente, caso  $S_0$  seja crescente,  $T_3^*$  e  $T_2^*$  se aproximam, se sobrepõem e, então, desaparecem, sobrando apenas  $T_1^*$ . Consequentemente, a variação de  $S_0$  acarreta uma mudança qualitativa na dinâmica do sistema, pois, de três pontos de equilíbrio, o sistema passa a ter dois e, imediatamente depois, apenas um. Como definiremos posteriormente, quando uma pequena variação num parâmetro altera a dinâmica de um sistema, diremos que uma *bifurcação* ocorre.

<sup>32</sup>Como a escala de  $t$  engloba milhões de anos, todas as recentes “eras do gelo” (períodos glaciais), ocorreram para  $T$  próxima de  $T_1^*$ . (Cf. (\*), p. 97.)

<sup>33</sup>Existem fortes evidências que  $T$  esteve próxima de  $T_3^*$  durante a era *neoproterozóica*, entre 750 e 580 milhões de anos atrás. (Cf. (\*), p. 97.)

<sup>34</sup>Cf. p. 97.

<sup>35</sup>No início da seção 6.2, o valor de  $S_0$  está fixado. Nessa subseção, considere  $S_0$  variável.

## 6.3 Oceanos e clima

Os oceanos mantêm o equilíbrio energético terrestre e auxiliam no ciclo de carbono,<sup>36</sup> transportando energia ao redor da Terra via circulação oceânica (correntes marinhas), em consequência de diferenças de densidade acarretadas por variações de salinidade e temperatura (*circulação termohalina/termosalina (cth)* ou *cinto de transmissão oceânico (oceanic conveyor belt)*),<sup>37</sup> numa escala de tempo (t) de décadas.

### 6.3.1 2-box model (modelo de duas caixas) para a *cth* do Atlântico Norte

O Atlântico Norte representa a parte do (oceano) Atlântico delimitada pela Linha do Equador e pelo Ártico.<sup>38</sup> A hipótese principal, embora grosseira, do modelo (supracitado) é que o Atlântico Norte é um grande reservatório de água salgada circulando, devido às diferenças da densidade

$$\rho = \rho(T, S)$$

em função da temperatura e da salinidade

$$T = T(t) \text{ e } S = S(t),$$

ambas em função do tempo (t), conforme a figura 6.6. As outras hipóteses (grosseiras) que assumiremos são as seguintes:

- Seja H uma compensação (ad hoc) salina, devido à evaporação nos trópicos e à precipitação nos polos;<sup>39</sup>
- Temperaturas e a salinidades das fronteiras do Atlântico Norte (outros oceanos, atmosfera e continentes) são denotadas por  $T_i^*$  e  $S_i^*$ ,  $i = 1, 2$ , e consideradas constantes,<sup>40</sup>

<sup>36</sup>Cf. <https://www.noaa.gov/education/resource-collections/climate/carbon-cycle>.

<sup>37</sup>A *cth* funciona da seguinte maneira:

- Água salgada aquecida dos trópicos flui para o norte, ao longo da camada superficial do Atlântico Norte;
- Essa massa de água esfria, no percurso para o Ártico, tornando-se mais densa, em consequência de temperaturas mais baixas e salinidade crescente, devido à formação de gelo marinho (pelo congelamento da água do mar na superfície oceânica);
- A massa de água mais densa afunda, gerando uma corrente no fundo do oceano que flui para o sul;
- A massa de água do fundo oceânico, ao passar pelo oceano Antártico, é misturada com águas mornas e retorna para a camada superficial do oceano;
- A massa de água superficial retorna para os trópicos, completando uma volta da *cth*.

(A propósito, em relação à profundidade oceânica, grosso modo, existem três camadas: uma pequena camada superficial (*mixed layer*), com temperatura aproximadamente constante, uma camada intermediária um pouco maior (*thermocline*), com temperatura variável e diminuindo em função da profundidade, e uma enorme camada final (*deep cold water*), com temperatura aproximadamente constante.)

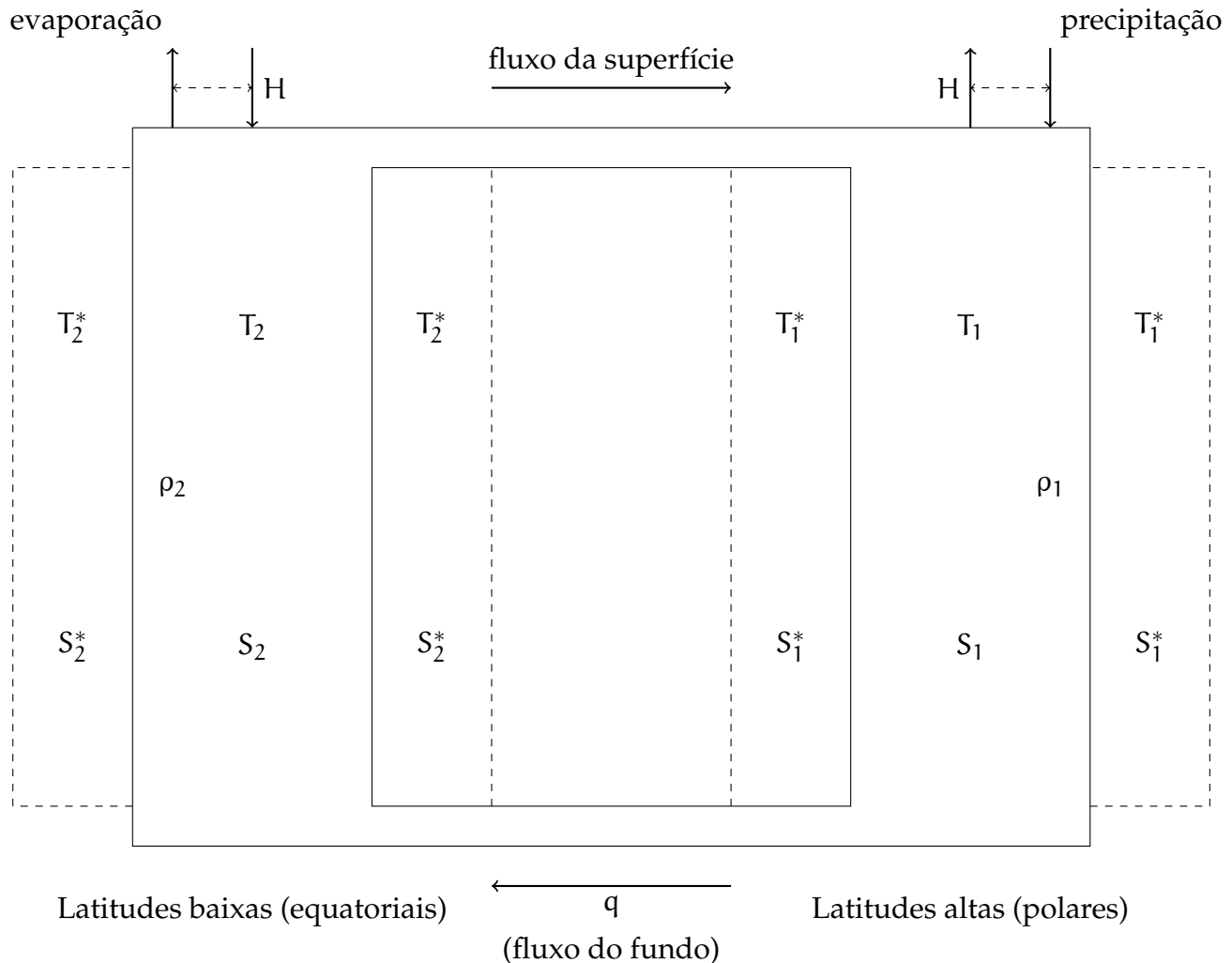
Com o aquecimento global e o derretimento das calotas polares, a concentração de sal diminui. Isso pode interromper a *cth*. Existem fortes evidências paleoclimáticas de que variações ou colapsos da *cth* coincidiram com grandes variações climáticas. (Cf. (\*), p. 97.)

<sup>38</sup>Em um estudo recente, publicado pela revista *Nature*, intitulado *North Atlantic-Pacific salinity contrast enhanced by wind and ocean warming* (<https://www.nature.com/articles/s41558-024-02033-y>), consta uma estimativa de 6 por cento de aumento na salinidade do Atlântico em relação ao Pacífico.

<sup>39</sup>Inicialmente, queremos um sistema isolado, para aplicarmos as *leis de conservação de massa e energia*, no caso, térmica.

<sup>40</sup>Idem!

Figura 6.6: 2-box model



- A *cth* é mantida apenas pela variação de  $\rho$ , em consequência de diferenças de pressão no fundo, criando um *fluxo de arrasto* (de uma caixa para a outra) de intensidade  $q$ ;<sup>41</sup>
- Como  $q$  é proporcional à diferença das densidades, temos

$$q = \kappa \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_0}, \quad (6.6)$$

onde  $\rho_0 = \rho(T_0, S_0)$ , para valores médios  $T_0$  e  $S_0$ , e  $\kappa$  é uma parametrização de várias condições do fluxo,<sup>42</sup> denominada *constante hidráulica* e com valor típico

$$\kappa \approx 1,5 \times 10^{-6} / \text{s}.^{43}$$

- Por convenção,  $q > 0$ , como consequência de densidades mais altas em latitudes mais altas!

<sup>41</sup>Outros efeitos, tais como, ventos, *coriolis*, etc., são desconsiderados.

<sup>42</sup>Atrito no fundo, mistura na superfície devido à turbulência causada por ventanias, etc.

<sup>43</sup>Note que  $q$  e  $\kappa$  têm mesma dimensão, pois  $\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_0}$  é adimensional.

- Podemos considerar a seguinte *aproximação de Taylor de primeira ordem* para  $\rho(T, S)$  em torno dos valores médios  $T_0$  e  $S_0$ .<sup>44</sup>

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0) + \beta (S - S_0)), \quad (6.7)$$

onde  $\alpha$  é o *coeficiente de contração térmica* e  $\beta$  é o *coeficiente de expansão salina*, com valores típicos dados por

$$\alpha \approx 1,5 \times 10^{-4} / \text{grau} \text{ e } \beta \approx 8 \times 10^{-4} / \text{psu}.^{45}$$

Portanto, ao substituírmos (6.7) em (6.8), temos

$$q = \kappa (\alpha (T_2 - T_1) - \beta (S_2 - S_1)).^{46} \quad (6.8)$$

Pelas *leis de conservação de massa e energia para sistemas isolados*,<sup>47</sup> o modelo dessa subseção (6.3.1) é dado pelo seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= c (T_1^* - T_1) + |q| (T_2 - T_1), \\ \frac{dT_2}{dt} &= c (T_2^* - T_2) + |q| (T_1 - T_2), \\ \frac{dS_1}{dt} &= -H + d (S_1^* - S_1) + |q| (S_2 - S_1), \\ \frac{dS_2}{dt} &= H + d (S_2^* - S_2) + |q| (S_1 - S_2), \end{aligned} \quad (6.9)$$

onde  $c$  e  $d$  são constantes características para a escala de tempo ( $t$ ) considerada e  $q$  é dada por (6.8).<sup>48</sup>

### Em busca das soluções de equilíbrio

Caso  $T_0$  e  $S_0$  sejam as médias das temperaturas e salinidades nas caixas 1 e 2, isto é,

$$T_0 = \frac{1}{2} (T_1 + T_2) \text{ e } S_0 = \frac{1}{2} (S_1 + S_2),$$

temos o sistema

$$\begin{aligned} \frac{dT_0}{dt} &= \frac{1}{2} \left( \frac{dT_1}{dt} + \frac{dT_2}{dt} \right) \\ &= c (T_0^* - T_0), \\ \frac{dS_0}{dt} &= \frac{1}{2} \left( \frac{dS_1}{dt} + \frac{dS_2}{dt} \right) \\ &= d (S_0^* - S_0), \end{aligned} \quad (6.10)$$

<sup>44</sup>Confira o meu livro *LIÇÕES DE CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS*, disponibilizado *online*, gratuitamente, na página de acesso livre da editora da UFPR.

<sup>45</sup> $\alpha$  (resp.,  $\beta$ ) é precedido pelo sinal  $-$  (resp.,  $+$ ), pois, quando  $T$  (resp.,  $S$ ) aumenta (resp., diminui), a água expande e fica menos (resp., mais) densa, ou seja,  $\rho$  diminui (resp., aumenta).

<sup>46</sup>O sinal  $-$  entre a variação térmica e a variação salina é indicativo de que  $T$  e  $S$  têm efeitos opostos na *cth*.

<sup>47</sup>Cf. (\*), p. 97.

<sup>48</sup>Cada *edo* de (6.9) é não linear, pelas multiplicações por  $|q|$ .

por (6.9). Consequentemente, como

$$T_0 = e^{-ct} \text{ e } S_0 = e^{-dt}$$

são soluções das equações homogêneas

$$\frac{dT_0}{dt} = -cT_0 \text{ e } \frac{dS_0}{dt} = -dS_0,$$

respectivamente, e

$$T_0 = T_0^* \text{ e } S_0 = S_0^*$$

são soluções particulares das equações não homogêneas do sistema (6.10), respectivamente, temos duas soluções para as equações de (6.10) dadas por

$$T_0 = e^{-ct} + T_0^* \text{ e } S_0 = e^{-dt} + S_0^*,$$

respectivamente.<sup>49</sup> Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_0 = T_0^* \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} S_0 = S_0^*. \quad (6.11)$$

Em outras palavras, quando  $t \rightarrow \infty$ , as médias entre as temperaturas (resp., salinidades) das caixas (que representam o oceano no modelo supracitado) convergem para as médias entre as temperaturas (resp., salinidades) de suas fronteiras. Portanto, como  $T_0^*$  e  $S_0^*$  são valores de referência (no modelo supracitado), podemos denotar

$$\bar{T}_i := T_i - T_0^* \text{ e } \bar{S}_i := S_i - S_0^*, \quad (6.12)$$

ditas *anomalias* de temperatura e salinidade, que acarretam as seguintes expressões:

$$A_1. T_2 - T_1 = \bar{T}_2 - \bar{T}_1 \text{ e } S_2 - S_1 = \bar{S}_2 - \bar{S}_1;$$

$$A_2. T_1^* - T_1 = -\frac{1}{2} (T_2^* - T_1^*) - \bar{T}_1 \text{ e } T_2^* - T_2 = \frac{1}{2} (T_2^* - T_1^*) - \bar{T}_2;^{50}$$

$$A_3. S_1^* - S_1 = -\frac{1}{2} (S_2^* - S_1^*) - \bar{S}_1 \text{ e } S_2^* - S_2 = \frac{1}{2} (S_2^* - S_1^*) - \bar{S}_2.^{51}$$

Note que, pelas notações

$$\Delta T := T_2 - T_1, \Delta S := S_2 - S_1, T^* := \frac{1}{2} (T_2^* - T_1^*) \text{ e } S^* := \frac{1}{2} (S_2^* - S_1^*),$$

podemos reescrever as expressões supracitadas pelas seguintes:

$$A_{1'}. \Delta T = \Delta \bar{T} \text{ e } \Delta S = \Delta \bar{S};$$

$$A_{2'}. T_1^* - T_1 = -T^* - \bar{T}_1 \text{ e } T_2^* - T_2 = T^* - \bar{T}_2;$$

$$A_{3'}. S_1^* - S_1 = -S^* - \bar{S}_1 \text{ e } S_2^* - S_2 = S^* - \bar{S}_2.$$

<sup>49</sup>Cf. seção 1.1.

<sup>50</sup>De fato, via (6.12), temos

$$-\frac{1}{2} (T_2^* - T_1^*) - (T_1 - T_0^*) = -\frac{1}{2} (T_2^* - T_1^*) - T_1 + \frac{1}{2} (T_1^* + T_2^*).$$

A outra igualdade é demonstrada de modo análogo.

<sup>51</sup>Faça como na última nota de rodapé.

Finalmente, o sistema (6.9) pode ser reescrito de modo mais simplificado (em função das anomalias supracitadas) e com um número menor de constantes, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{T}_1}{dt} &= c(-T^* - \bar{T}_1) + |q|\Delta\bar{T}, \\ \frac{d\bar{T}_2}{dt} &= c(T^* - \bar{T}_2) + |q|\Delta\bar{T}, \\ \frac{d\bar{S}_1}{dt} &= -H + d(-S^* - \bar{S}_1) + |q|\Delta\bar{S}, \\ \frac{d\bar{S}_2}{dt} &= H + d(S^* - \bar{S}_2) - |q|\Delta\bar{S},\end{aligned}\tag{6.13}$$

com

$$q = \kappa(\alpha\Delta T - \beta\Delta S).\tag{6.14}^{52}$$

Por abuso de notação, o sistema (6.13) é representado sem as “barras”, ou seja, na forma

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dt} &= c(-T^* - T_1) + |q|\Delta T, \\ \frac{dT_2}{dt} &= c(T^* - T_2) + |q|\Delta T, \\ \frac{dS_1}{dt} &= -H + d(-S^* - S_1) + |q|\Delta S, \\ \frac{dS_2}{dt} &= H + d(S^* - S_2) - |q|\Delta S,\end{aligned}\tag{6.15}$$

tendo o cuidado de lembrar que as variáveis são as anomalias supracitadas.

Note que a técnica utilizada na subseção 4.2.2, para resolvermos sistemas lineares via TL, é insuficiente para resolvermos o sistema não linear (6.15). Estudaremos, na próxima seção, métodos qualitativos que permitem analisar sistemas como o supracitado. Contudo, agora, via uma série de simplificações, reduziremos (6.15) à uma *edo* escalar e analisaremos as suas soluções de equilíbrio.

### Hipóteses para tornarmos o sistema (6.15) unidimensional

Para diminuirmos a dimensão do sistema supracitado, podemos supor que, ao longo do tempo, a *cth* é submetida às seguintes condições:

- C<sub>1</sub>. A temperatura (resp., salinidade) de cada caixa permanece inalterada e  $\Delta T$  (resp.,  $\Delta S$ ) permanece próxima de zero;<sup>53</sup>
- C<sub>2</sub>. A diferença entre a salinidade (resp., temperatura) de cada caixa e de sua respectiva fronteira é desprezível.<sup>54</sup>

Por exemplo, para cada instante  $t$ , admissível em (6.14), considere as condições seguintes:

<sup>52</sup>Cf. (6.8), p. 108, e  $A_1'$ .

<sup>53</sup>Nesse caso, para temperaturas (resp., salinidades) adequadas, as duas primeiras (resp., últimas) equações de (6.15) são eliminadas.

<sup>54</sup>Nesse caso, como os múltiplos dessas diferenças nas duas últimas (resp., primeiras) equações são eliminados, podemos supor  $d = 0$  (resp.,  $c = 0$ ).

$C_1'$ .  $\Delta T$  é arbitrariamente pequena,

$$T_2(t) = T^* \text{ e } T_1(t) = -T^*,^{55}$$

$C_2'$ .  $S_i^* - S_i$ ,  $i = 1, 2$ , é desprezível em (6.9).<sup>56</sup>

Consequentemente, (6.15) fica reduzido ao sistema

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= -H + |q|\Delta S, \\ \frac{dS_2}{dt} &= H - |q|\Delta S, \end{aligned} \quad (6.16)$$

com

$$q = \kappa (2\alpha T^* - \beta \Delta S).^{57} \quad (6.17)$$

Contudo, esse sistema permanece não linear e também não pode ser resolvido pela método estudado na subseção 4.2.2. Para reduzi-lo a uma *edo*, note que, como  $S_1 + S_2 = \text{cte}$ ,<sup>58</sup> pois estamos supondo que a *cth* é um sistema isolado, a sua única variável de interesse é  $\Delta S$ . Assim, ao subtrairmos a primeira equação de (6.16) da segunda, temos

$$\frac{d}{dt}(\Delta S) = 2(H - \kappa|2\alpha T^* - \beta \Delta S|\Delta S). \quad (6.18)$$

Agora, para simplificarmos a notação de (6.18) e, concomitantemente, diminuirmos o número de suas constantes para um, consideremos a variável dada por

$$x := \frac{\beta \Delta S}{2\alpha T^*},$$

a parametrização temporal dada por

$$\tau := 4\alpha\kappa|T^*|t$$

e a constante dada por

$$\lambda := \frac{\beta H}{4\alpha^2\kappa T^*|T^*|},$$

---

<sup>55</sup>Para que essa condição seja válida, é necessário que as temperaturas das caixas se equilibrem com as de suas respectivas fronteiras quase que imediatamente. De fato, como

$$\begin{aligned} \bar{T}_0 &= \frac{\bar{T}_1 + \bar{T}_2}{2} \\ &= \frac{T_1 - T_0^* + T_2 - T_0^*}{2} \quad (\text{via (6.12), p. 109}) \\ &= T_0 - T_0^*, \end{aligned}$$

temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{T}_0 = 0,$$

por (6.11), p. 109. Note que, se  $\bar{T}_2 = T^*$  e  $\bar{T}_1 = -T^*$ , então  $\bar{T}_0 = 0$  para todo  $t$  admissível.

<sup>56</sup>Portanto, podemos supor  $d = 0$ . (Cf. p. 108.)

<sup>57</sup>Cf. (6.14) e  $C_1'$ .

<sup>58</sup>Assim, teremos uma solução exponencial para a salinidade média!

observando-se que

$$\begin{aligned} |T^*| &= \left| \frac{\Delta T}{2} \right| \\ &= \frac{\Delta T}{2} \\ &= T^*, \end{aligned}$$

pois  $T_2 - T_1 > 0$ , ou seja, a temperatura equatorial é maior que a polar. Portanto, podemos reescrever (6.18) como

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{\frac{\beta}{2\alpha T^*}}{4\alpha\kappa T^*} \frac{d}{dt}(\Delta S) \\ &= \frac{\beta}{8\alpha^2\kappa (T^*)^2} \cdot 2(H - \kappa|2\alpha T^* - \beta\Delta S| \Delta S) \\ &= \frac{\beta H}{4\alpha^2\kappa (T^*)^2} - \frac{\beta}{4\alpha^2 (T^*)^2} |2\alpha T^* - \beta\Delta S| \Delta S \\ &= \frac{\beta H}{4\alpha^2\kappa (T^*)^2} - \left| \frac{1}{2\alpha T^*} (2\alpha T^* - \beta\Delta S) \right| \left( \frac{\beta}{2\alpha T^*} \right) \Delta S \\ &= \lambda - \left| 1 - \frac{\beta\Delta S}{2\alpha T^*} \right| \frac{\beta\Delta S}{2\alpha T^*} \\ &= \lambda - |1 - x|x, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{dx}{d\tau} = \lambda - |1 - x|x. \quad (6.19)$$

### Pontos críticos (estados/soluções de equilíbrio) de (6.19)

Quando um sistema (resp., uma equação) não tem solução analítica e depende de parâmetros, como o  $\lambda$  de (6.19), procura-se as suas soluções de equilíbrio e, encontrando-as, o tipo de estabilidade dessas soluções, dependendo dos parâmetros supracitados, como fizemos para os modelos da subseção 6.2.3. Assim, diferentemente do capítulo 1, onde, dada uma *edo*, buscava-se determinar a sua solução analítica, utilizaremos uma abordagem “indireta” para estudarmos a *edo* (6.19), linearizando em torno de suas soluções de equilíbrio, conforme descreveremos.

Como as soluções de equilíbrio são constantes, ou seja, têm derivada nula, elas são pontos críticos e, nesse caso,

$$\frac{dx}{d\tau} = 0 \implies |1 - x|x = \lambda. \quad (6.20)$$

Note que, como  $\lambda$  é positivo, qualquer solução de equilíbrio  $x^*$  satisfazendo (6.19) é positiva, por (6.20). Além disso, pelo módulo em (6.20), temos dois casos:

I. Se  $1 - x < 0$ , isto é,  $x > 1$ , então

$$\begin{aligned} (x - 1)x &= \lambda \implies x^2 - x - \lambda = 0 \\ \implies x_1^* &= \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda} \right) \\ \implies x_1^* &= \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + 4\lambda} \right), \end{aligned}$$



por ser positiva, existindo para cada  $\lambda \in (0, +\infty)$ .

II. Se  $1 - x > 0$ , isto é,  $x < 1$ , então

$$\begin{aligned}(1-x)x = \lambda &\implies x^2 - x + \lambda = 0 \\ &\implies x_{2,3}^* = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda} \right),\end{aligned}$$

que existem (e são positivas) para cada  $\lambda \in (0, \frac{1}{4}]$ .

Agora, para determinarmos a estabilidade/instabilidade dessas soluções de equilíbrio, linearizaremos (6.19) em torno de  $x^* \in \{x_1^*, x_2^*, x_3^*\}$ , considerando

$$x = x^* + y, \quad (6.21)$$

para  $y$  suficientemente pequeno. Assim, como, para  $x < 1$  (caso II),

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \lambda - (1-x)x \\ &= \lambda - x + x^2,\end{aligned}$$

por (6.19), temos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} (x - x^*) \\ &= \frac{dx}{d\tau} \\ &= \lambda - (x^* + y) + (x^* + y)^2 \\ &= \lambda - x^* - y + (x^*)^2 + 2x^*y + y^2 \\ &= \lambda - (1 - x^*)x^* + (2x^* - 1)y + y^2 \\ &= 0 + (2x^* - 1)y + y^2,\end{aligned}$$

ou seja, para  $x < 1$  e  $y$  suficientemente pequeno,

$$\frac{dy}{d\tau} = (2x^* - 1)y.$$

Analogamente, para  $x > 1$  (caso I) e  $y$  suficientemente pequeno,

$$\frac{dy}{d\tau} = -(2x^* - 1)y.$$

Consequentemente:

·  $x^* = x_1^*$  é (assintoticamente) estável, pois, como

$$-(2x_1^* - 1) = -\sqrt{1 + 4\lambda} < 0,$$

temos

$$\begin{aligned}\tau \rightarrow \infty &\implies y = e^{-(2x_1^* - 1)\tau} \rightarrow 0 \\ &\implies x \rightarrow x^*,\end{aligned}$$

por (6.21);

·  $x^* = x_2^*$  é instável, pois, como

$$2x_2^* - 1 = \sqrt{1 - 4\lambda} > 0,$$

temos

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow \infty &\implies y = e^{(2x_2^* - 1)\tau} \rightarrow \infty \\ &\implies |x - x^*| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

por (6.21);

·  $x^* = x_3^*$  é estável, pois, como

$$2x_3^* - 1 = -\sqrt{1 - 4\lambda} < 0,$$

temos

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow \infty &\implies y = e^{(2x_3^* - 1)\tau} \rightarrow 0 \\ &\implies x \rightarrow x^*, \end{aligned}$$

por (6.21).

### Interpretando os resultados num diagrama de bifurcações

Como vimos,  $x_1^*$  e  $x_3^*$  são estáveis. Contudo, eles têm estabilidades distintas. De fato, como, por (6.17),<sup>59</sup>

$$\begin{aligned} q &= 2k\alpha T^* \left( 1 - \frac{\beta \Delta s}{2\alpha T^*} \right) \\ &= 2k\alpha T^* (1 - x), \end{aligned} \tag{6.22}$$

temos  $q$  e  $1 - x$  com o mesmo sinal. Logo, como  $x_1^* > 1$ , temos  $q < 0$  e, nesse caso, por (6.22), dizemos que a dinâmica da *cth* (regida pela equação (6.19) e convergindo para a solução de equilíbrio  $x_1^*$ ) está no *modo S*.<sup>60</sup> Analogamente, como  $x_3^* < 1$ , temos  $q > 0$ , e, por (6.22), dizemos que a dinâmica da *cth* (regida pela equação (6.19) e convergindo para a solução de equilíbrio  $x_3^*$ ) está no *modo T*.<sup>61</sup> Além disso, no diagrama seguinte, onde  $x_1^*(\lambda)$  é representado pela linha contínua superior,  $x_2^*(\lambda)$  é representado pela linha tracejada e  $x_3^*(\lambda)$  é representado pela linha contínua inferior, note que,  $x_1^*$  existe para cada  $\lambda > 0$  e nenhuma mudança em  $\lambda$  acarreta uma mudança de estado (*modo S*). Por outro lado,  $x_3^*$  existe para cada  $\lambda \in [0, 1/4)$  e qualquer mudança  $\lambda = \frac{1}{4} + \varepsilon$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, acarreta uma mudança do *modo T* para o *S*.

<sup>59</sup>Cf. p. 111.

<sup>60</sup>*S-mode*, em inglês.

<sup>61</sup>*T-mode*, em inglês.

# Capítulo 7

## Teoria qualitativa

Nesse capítulo, de modo formal, iniciaremos o estudo da *teoria qualitativa das edos* e da *teoria das bifurcações*, para podermos analisar o comportamento das soluções em torno das soluções de equilíbrio, não apenas para *edos* escalares,<sup>1</sup> mas também para sistemas como o (6.15).<sup>2</sup> Além disso, alguns conceitos e resultados dos capítulos anteriores serão generalizados.

### 7.1 Sistemas dinâmicos

Como veremos, os sistemas supracitados estão relacionados aos métodos qualitativos que tratam das soluções (inclusive as de equilíbrio) das *edos vetoriais autônomas de primeira ordem* que modelam sistemas como o *meet* e o *cth*, estudados no capítulo 6.

#### 7.1.1 Edo (vetorial) autônoma de primeira ordem

Nesse tipo de *edo*, o “forçamento”  $f$  não depende explicitamente do tempo  $t$  e escrevemos

$$\frac{dX}{dt} = f(X), \quad (7.1)$$

onde

$$\begin{aligned} X &= X(t) \\ &= (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)) \end{aligned}$$

representa uma *curva parametrizada em  $\mathbb{R}^n$* ,<sup>3</sup> ou seja, uma função real de  $n$  variáveis reais, também representada por

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix}.$$

Note que, para  $n = 1$ , a *edo* supracitada é escalar.

---

<sup>1</sup>Como fizemos no capítulo 6.

<sup>2</sup>Cf. p. 110.

<sup>3</sup>Estudada no *cálculo 2* (UFPR).

**Exemplo**

Para a *cth* modelada por (6.15), temos

$$X_1 = T_1, X_2 = T_2, X_3 = S_1, X_4 = S_2$$

e

$$f(X) = \begin{bmatrix} c(-T^* - T_1) + |q|\Delta T \\ c(T^* - T_2) - |q|\Delta T \\ -H + d(-S^* - S_1) + |q|\Delta S \\ H + d(S^* - S_2) - |q|\Delta S \end{bmatrix}.$$

**Edo escalar autônoma de ordem  $n$** 

Esse tipo de *edo*, quando denotada por

$$\frac{d^n x}{dx^n} = g\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right),$$

pode ser escrita na forma (7.1), caso consideremos

$$X_i := \frac{d^{i-1}x}{dt^{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \left( \frac{dX_1}{dt}, \frac{dX_2}{dt}, \dots, \frac{dX_{n-1}}{dt}, \frac{dX_n}{dt} \right) \\ &= \left( \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, \frac{d^n x}{dt^n} \right) \\ &= (X_2, X_3, \dots, X_n, g(X_1, X_2, \dots, X_n)) \\ &= f(X). \end{aligned}$$

**Exemplo****Equação planar do pêndulo<sup>4</sup>**

$\frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0$  pode ser escrita como

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = X_2, \\ \frac{dX_2}{dt} = -\sin X_1. \end{cases}$$

Note que, aqui,

$$f(X) = (X_2, -\sin X_1).$$

<sup>4</sup>Cf. p. 25.