

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MANUAL TÉCNICO-DIDÁTICO

CÁLCULO IV - CM044
VARIÁVEIS COMPLEXAS - CM068
MÉTODOS II - CM105
TEORIA RESUMIDA E EXERCÍCIOS

Autor:

Professor José Renato Ramos Barbosa

Chefe do Departamento:

Professor Alexandre Kirilov

1a. versão: 2013

Última versão: 2024

Homepage Acadêmica: www.ufpr.br/~jrrb

Conteúdo

1	Introdução	5
2	Parte I : Variáveis complexas	7
2.1	Preliminares	7
2.2	Funções holomorfas	7
2.2.1	O Logaritmo complexo	10
2.2.2	Funções não holomorfas	13
2.3	Integração complexa	13
2.4	Séries de números complexos	27
2.5	Cálculo de integrais reais pelo teorema dos resíduos	47
2.5.1	Integrais de tipo $I = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$, onde $F(\cos \theta, \sin \theta)$ é uma função real, racional (em $\cos \theta$ e $\sin \theta$) e finita em $[0, 2\pi]$	47
2.5.2	Integrais reais impróprias de funções $f(x)$ racionais	49
2.6	Exercícios e algumas resoluções/sugestões	53
2.6.1	Operações elementares dos números complexos	53
2.6.2	Derivadas	58
2.6.3	Integrais	61
2.6.4	Séries de Taylor, séries de Laurent e resíduos	65
3	Parte II - Séries e transformadas de Fourier	73
3.1	Série(s) de Fourier (SF)	73
3.2	Transformada de Fourier (TF)	82
3.3	Exercícios	97

Capítulo 1

Introdução

- A parte 1 (desse manual) cobre o programa da disciplina CM068 (*variáveis complexas*) para os cursos de Matemática e Matemática Industrial, além de (aproximadamente) metade do programa da disciplina CM044 (*cálculo IV*) para os cursos de Física e Engenharia Ambiental da UFPR. A outra metade da CM044, além de grande parte do programa da CM105 (*métodos de matemática aplicada II*), é contemplada na parte 2.
- Para os cursos de Matemática supracitados, em relação às demonstrações dos resultados citados nesse manual, é recomendável uma complementação em livros de *análise complexa* e *séries e transformada de Fourier*.
- Como a matéria, aqui, é dada de forma bastante resumida e sumarizada, é dever do leitor buscar outras fontes. Por exemplo:
 - MATEMÁTICA SUPERIOR PARA ENGENHARIA, Erwin Kryeszic, LTC, 2009, ISBN 978-85-216-1643-6, 9a. edição;
 - INICIAÇÃO À FÍSICA MATEMÁTICA, Juan López Gondar e Rolci Cipolatti, IMPA, 2009, ISBN 978-85-244-0287-6, 1a. edição;
 - FÍSICA MATEMÁTICA, George B. Arfken e Hans J. Weber, Elsevier, 2007, ISBN 978-85-352-2050-6, 1a. edição;
 - CURSO INTRODUTÓRIO À ANÁLISE COMPLEXA COM APLICAÇÕES, Dennis G. Zill e Patrick D. Shanahan, LTC, 2011, ISBN 978-85-216-1809-6, 2a. edição.
- Como iniciaremos nosso estudo por *funções holomorfas*, nas fontes supracitadas podem ser encontradas as propriedades operatórias dos *números complexos*, além da interpretação *vetorial* da adição e da multiplicação desses números, e o estudo de *limites e continuidade das funções complexas*.
- Para revisar *curvas planas parametrizadas*, *conjuntos abertos*, *derivadas parciais*, etc., confira meu livro de *cálculo de várias variáveis reais*, no endereço eletrônico que se encontra na capa desse manual.
- Estudaremos uma parte básica de *edp*, grosso modo, que tem relação com *séries e transformada de Fourier*.
- Agradeço ao colega Professor Raul Prado Raya. Ele, gentilmente, cedeu o que já havia preparado de exercícios para as turmas dele (baseado no excelente livro de *análise complexa* do Steven Krantz). Agradeço, ainda, por discussões produtivas sobre o conteúdo desse manual, ao colega Professor Pedro Anizete Damázio.

- Apreciaria sugestões que possam melhorar a redação ou que corrijam eventuais descuidos (erros de mérito ou de português).

Capítulo 2

Parte I : Variáveis complexas

2.1 Preliminares

- Para uma introdução/revisão resumida da estrutura algébrica do conjunto \mathbb{C} dos números complexos, confira a seção 5.1.1 do meu livro de *álgebra linear* na minha página acadêmica institucional.¹
- Caso $z \in \mathbb{C}$, ou seja, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, denotamos $\Re(z) = x$ e $\Im(z) = y$.
- Uma *função complexa* $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função cujo domínio D e cuja imagem $f(D)$ são subconjuntos de \mathbb{C} .

Exemplos

- Se $f(z) = z_0$, onde z_0 é uma constante complexa, para cada $z \in \mathbb{C}$, então $D = \mathbb{C}$ e $f(D) = \{z_0\}$;
- Se $f(z) = z$ para cada $z \in \mathbb{C}$, então $D = f(D) = \mathbb{C}$;
- Se $f(z) = \bar{z}$ para cada $z \in \mathbb{C}$, então $D = f(D) = \mathbb{C}$;
- Se $f(z) = z^{-1}$ para cada $z \in \mathbb{C}$ com $z \neq 0$, então $D = f(D) = \mathbb{C} - \{0\}$;
- Se $f(z) = |z|$ para cada $z \in \mathbb{C}$, então $D = \mathbb{C}$ e $f(D) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

2.2 Funções holomorfas

Dentre as funções estudadas na *análise complexa*, destacam-se as *holomorfas*, isto é, aquelas que são *diferenciáveis* (como funções complexas) e definidas em conjuntos *abertos* em \mathbb{C} .² Diferenciabilidade complexa tem implicações mais fortes que diferenciabilidade real. Por exemplo, pode ser demonstrado que toda função holomorfa pode ser representada como uma *série de potências* em todo *disco* aberto do seu domínio, ou seja, é *analítica*. Em particular, funções holomorfas são *infinitamente diferenciáveis*, que é uma propriedade não satisfeita

¹Cf. endereço eletrônico na capa desse manual.

²Cada elemento z de um conjunto *aberto* $A \subset \mathbb{C}$ é caracterizado pela seguinte propriedade:

Caso $h \in \mathbb{C}$ seja arbitrário e tenha módulo suficientemente pequeno, $z + h \in A$.

para as funções diferenciáveis reais.³ Como veremos, a maioria das funções *elementares* (tais como, as polinomiais, as trigonométricas, as exponenciais e as logarítmicas) são holomorfas.

Observações (em outras palavras, notações, definições e resultados) iniciais

Doravante, consideraremos que D é um aberto em \mathbb{C} , $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$ pertencem ao conjunto D , com z arbitrário e z_0 fixo, f representa uma função complexa definida (em D) por

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y), \quad (2.1)$$

sendo P e Q funções reais nas variáveis reais x e y .⁴

Exemplo

Seja $f(z) = z^2$. Logo,

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi. \end{aligned}$$

Assim,

$$P(x, y) = x^2 - y^2 \text{ e } Q(x, y) = 2xy.$$

Observação 1 (Holomorfismo e as condições de Cauchy-Riemann) *Caso a variável $z - z_0 = h$ seja suficientemente pequena e exista o limite*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

ele é chamado derivada de $f(z)$ em z_0 , denotado por $f'(z_0)$, f é dita holomorfa em z_0 e as condições de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (2.2)$$

em z_0 são obtidas ao derivarmos ao longo da reta $y = y_0$, via

$$f'(z_0) = P_x(x_0, y_0) + iQ_x(x_0, y_0), \quad (2.3)$$

e ao longo da reta $x = x_0$, via

$$f'(z_0) = Q_y(x_0, y_0) - iP_y(x_0, y_0). \quad (2.4)$$

f é holomorfa (em D) caso seja holomorfa em cada $z \in D$.

Exemplo

³Seja

$$f(t) = \begin{cases} t^2/2 & \text{se } t \geq 0; \\ -t^2/2 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Assim, $f'(t) = |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Contudo, f' não é diferenciável em $t = 0$.

⁴ P e Q representam funções do cálculo 2.

⁵Caso $f(z)$ seja uma função complexa arbitrária, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell$ se, e somente se, independentemente do número real ε que consideremos, é possível obtermos um número real δ , dependente de ε , tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - \ell| < \varepsilon.$$

Note que $f'(z_0)$ pode ser calculada por (2.3) ou (2.4) (caso f seja holomorfa em z_0).

Exemplo Seja $f(z) = z^2$ (como no exemplo supracitado). Consequentemente, f é holomorfa em \mathbb{C} , pois existe

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z + z_0)(z - z_0)}{z - z_0} \\ &= 2z_0 \end{aligned}$$

(para cada $z_0 \in \mathbb{C}$). Por outro lado, $P_x = 2x = Q_y$, $P_y = -2y = -Q_x$ e

$$\begin{aligned} f'(z) &= P_x + iQ_x \\ &= 2x + 2yi \\ &= 2z. \end{aligned}$$

Observação 2 (Recíproca da observação 1) Se P_x , P_y , Q_x e Q_y existem em cada ponto suficientemente próximo de z_0 , são contínuas em z_0 e satisfazem (2.2) em z_0 , então f é holomorfa em z_0 .

Exemplo A função exponencial

$$z = x + iy \mapsto f(z) = e^z := e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad (2.5)$$

é holomorfa (em \mathbb{C}). De fato, como $P(x, y) = e^x \cos y$ e $Q(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, temos

$$P_x = e^x \cos y = Q_y \text{ e } P_y = -e^x \operatorname{sen} y = -Q_x,$$

que são contínuas. Além disso, note que

$$\begin{aligned} f'(z) &= P_x + iQ_x \\ &= e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \\ &= e^z. \end{aligned}$$

Observação 3 (Produto de exponenciais) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, onde $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ são números complexos.⁶

Exemplos Demonstra-se que somas, diferenças, produtos, quocientes (cujos denominadores não se anulam em z_0) e composições de funções holomorfas (quando for possível compô-las) em z_0 também são holomorfas em z_0 . Portanto, as seguintes funções, definidas para cada $z \in \mathbb{C}$, são holomorfas (em \mathbb{C}):

- $p(z) = z_0 + z_1z + z_2z^2 + \dots + z_nz^n$, onde z_i é constante em \mathbb{C} , $i = 0, 1, 2, \dots, n$;
- $\operatorname{sen} z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ e $\operatorname{cos} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.⁷

⁶A demonstração dessa observação é uma consequência direta das fórmulas do seno e do cosseno da soma!

⁷Note que

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \operatorname{cos} z \text{ e } \frac{d}{dz}(\operatorname{cos} z) = -\operatorname{sen} z.$$

2.2.1 O Logaritmo complexo

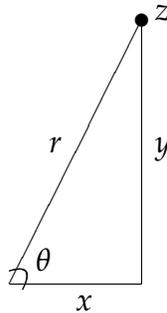
Representação polar de $z = x + iy$

É dada por

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \quad (2.6)$$

onde (r, θ) é a representação polar de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, conforme ilustrada na figura 2.1.

Figura 2.1: Coordenadas polares de (x, y) , identificado com $z = x + iy$



De fato, $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$. Além disso, note que, por (2.5), (2.6) pode ser escrita como

$$z = r e^{i\theta}. \quad (2.7)$$

Exemplo

$e^{i\pi} + 1 = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= 1 \cdot e^{i\pi} \\ &= 1(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) \\ &= -1. \end{aligned}$$

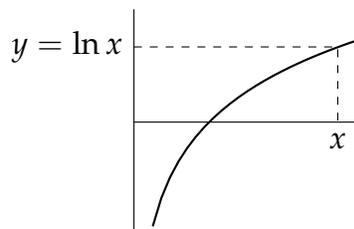
Definição de $w = \log z$ via $z = e^w$

No caso real, o logaritmo supracitado é a inversa da função exponencial, ou seja,

$$y \in \mathbb{R} \text{ é o logaritmo natural de } x > 0, \text{ isto é, } y = \ln x \iff x = e^y,$$

conforme ilustrada na figura 2.2.

Figura 2.2: Logaritmo natural real



No caso complexo, o domínio da função logarítmica não contém números complexos “negativos” (nem “positivos”), pois, \mathbb{C} não pode ser ordenado.⁸ Além disso, a exponencial

⁸Por exemplo, ± 1 , $\pm i$ e $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ têm módulo unitário, em outras palavras, representam seis raios vetores da circunferência que tem centro na origem do plano complexo e raio unitário.

complexa é *periódica* de período $2\pi i$, pois, para cada número complexo $z = x + iy$ e cada $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi ij} &= e^{x+i(y+2\pi j)} \\ &= e^x(\cos(y+2\pi j) + i \operatorname{sen}(y+2\pi j)) \\ &= e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \\ &= e^z. \end{aligned}$$

Consequentemente, não é possível obter uma *única* função $f(z)$ tal que $e^{f(z)} = z$, pois, se $g(z) = f(z) + 2\pi ij$, $j \in \mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned} e^{g(z)} &= e^{f(z)} e^{2\pi ij} \\ &= e^{f(z)} e^{0+2\pi ij} \\ &= e^{f(z)} e^0 = e^{f(z)}. \end{aligned}$$

Contudo, para $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, definiremos o logaritmo de

$$z = e^w \tag{2.8}$$

por

$$w := \log z \tag{2.9}$$

em domínios $D \subset \mathbb{C}$ adequados, da seguinte maneira: se

$$w = u + iv, \tag{2.10}$$

então, por (2.7) e (2.8),

$$\begin{aligned} re^{i\theta} &= e^{u+iv} \\ &= e^u e^{iv}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$r = e^u \text{ e } e^{i\theta} = e^{iv},$$

que é equivalente a

$$u = \ln r \text{ e } v = \theta + 2\pi j, j \in \mathbb{Z}. \tag{2.11}$$

Portanto, por (2.9), (2.10) e (2.11),

$$\begin{aligned} \log z &= \ln r + i(\theta + 2\pi j) \\ &= \ln |z| + i \operatorname{arg} z, \end{aligned}$$

onde

$$\operatorname{arg} z \in \{\theta + 2\pi j \mid j \in \mathbb{Z}\}.$$

Assim, para que $\log z$ seja univocamente determinado, precisamos considerar restrições aos domínios $D \subset \mathbb{C}$ onde $\operatorname{arg} z$ seja univocamente determinado. Com esse objetivo, considere, por exemplo, a semirreta fechada a partir da origem

$$L_\phi = \{(t \cos \phi, t \operatorname{sen} \phi) \mid t \leq 0\},$$

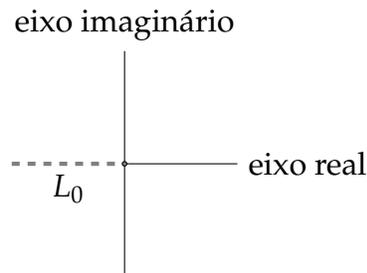
onde $0 \leq \phi < 2\pi$, e seja $D_\phi = \mathbb{C} - L_\phi$. Logo, para cada $z \in D_\phi$, existe um único valor de $\arg z$, denotado por $\arg_\phi z$, tal que $\phi < \arg_\phi z < \phi + 2\pi$.

Exemplo $D_0 = \mathbb{C} - L_0$ representa o plano complexo, ou seja, \mathbb{C} , menos o semi-eixo real negativo, isto é,

$$L_0 = \{t(1,0) \mid t \leq 0\},$$

conforme a figura 2.3.

Figura 2.3: $D_0 = \mathbb{C} - L_0$, com L_0 tracejada



Observação 4 (Ramos do logaritmo) Um ramo do logaritmo é dado pela função

$$\begin{aligned} f: D_\phi &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) = \log z = \ln |z| + i \arg_\phi z \end{aligned}$$

Exemplo $f(z) = \log z$ é holomorfa no domínio D_0 supracitado. De fato, para cada $z_0 \in D_0$, temos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\log z - \log z_0}{z - z_0} \\ &= \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} \\ &= \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{1}{\frac{e^w - e^{w_0}}{w - w_0}} \\ &= \frac{1}{e^{w_0}} \\ &= \frac{1}{z_0}, \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, de baixo para cima, utilizamos o exemplo que segue a observação 2.⁹

⁹Cf. p. 9.

2.2.2 Funções não holomorfas

Exemplos

- Pode ser demonstrado que funções holomorfas em z_0 são contínuas em z_0 . Assim, para que uma função não seja holomorfa num dado z_0 , basta que ela não seja contínua em z_0 . Para ilustrarmos essa propriedade, note que, embora o segundo membro de (2.6) seja igual a

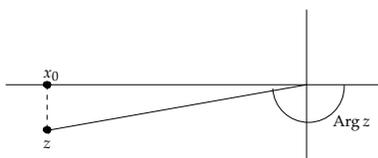
$$r(\cos(\theta + 2\pi j) + i \operatorname{sen}(\theta + 2\pi j)), j \in \mathbb{Z},$$

z é unicamente determinado para θ no intervalo $(-\pi, \pi]$. Esse valor particular de θ é dito *valor principal do argumento* (ou simplesmente *argumento*) de z e é denotado por $\operatorname{Arg} z$.

$$z \mapsto \operatorname{Arg} z$$

não é contínua no L_0 supracitado, pois, se $z_0 = x_0 \in L_0$ é não nulo (como ilustrado na figura 2.4), então, a medida que algum z pertencente ao terceiro quadrante do plano

Figura 2.4: $\operatorname{Arg} z$ não é contínua em $z_0 \in L_0$



aproxima-se de z_0 , no sentido anti-horário, temos $\operatorname{Arg} z \rightarrow -\pi$. Contudo, claramente, $\operatorname{Arg} x_0 = \pi$.

- $f(z) = \bar{z}$ não é holomorfa (em $z, \forall z \in \mathbb{C}$). De fato, seja $z \neq z_0$. Portanto:

$$* y = y_0, \text{ isto é, } z = x + iy_0 \implies \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1;$$

$$* x = x_0, \text{ ou seja, } z = x_0 + iy \implies \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = -1.$$

Consequentemente, $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ aproxima-se de, no mínimo, dois valores distintos (± 1) quando $z \rightarrow z_0$.

2.3 Integração complexa

Observação 5 (Disco (aberto) positivamente orientado) Um disco de centro $z_0 = x_0 + iy_0$ e raio $r > 0$, denotado por $D(z_0, r)$, é uma representação (em \mathbb{C}) do círculo (em \mathbb{R}^2) de centro (x_0, y_0) e raio r , menos a sua circunferência, isto é,

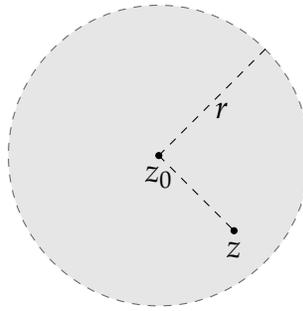
$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

conforme a figura 2.5. Se nada for dito em contrário, a circunferência supracitada, dita fronteira do disco e denotada em \mathbb{C} por

$$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\},$$

será percorrida no sentido anti-horário.

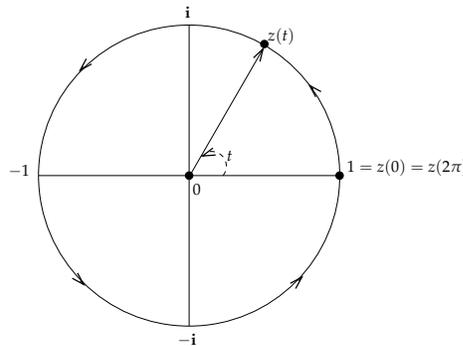
Figura 2.5: Disco aberto



Observação 6 (Parametrização do disco) $z(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, é uma parametrização de $\partial D(z_0, r)$.¹⁰

Exemplo

Se $z_0 = 0$ e $r = 1$, então $z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, é uma parametrização de $\partial D(0, 1)$, conforme a figura 2.6.

Figura 2.6: Fronteira do disco de centro $z_0 = 0$ e raio $r = 1$, percorrida no sentido anti-horário

Observação 7 (Integração de curvas parametrizadas) Seja $z(t) = x(t) + iy(t)$, onde

$$[a, b] \ni t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

é uma curva parametrizada integrável. Assim,

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt.$$

Exemplos

• $\int_0^1 (t - i)^2 dt = -\frac{2}{3} - i$. De fato, basta observarmos que, como $(t - i)^2 = t^2 - 1 - 2ti$, o primeiro membro da penúltima igualdade é igual a

$$\int_0^1 (t^2 - 1) dt - i \int_0^1 2t dt = \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_0^1 - i \left[t^2 \right]_0^1.$$

¹⁰ $z(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$, é uma outra parametrização de $\partial D(z_0, r)$.

- $\int_0^{\pi/2} e^{(1+i)t} dt = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1) + \frac{i}{2}(e^{\pi/2} + 1)$. De fato, basta observarmos que o primeiro membro da última igualdade é igual a

$$\int_0^{\pi/2} e^t (\cos t + i \operatorname{sen} t) dt = \int_0^{\pi/2} e^t \cos t dt + i \int_0^{\pi/2} e^t \operatorname{sen} t dt$$

e aplicarmos a fórmula da integração por partes do *cálculo 1* em cada parcela da soma do segundo membro da última igualdade.

Observação 8 (Propriedades das integrais de curvas parametrizadas) Podem ser demonstradas propriedades análogas às das integrais de funções reais e de curvas parametrizadas em \mathbb{R}^2 . Por exemplo:

- $\int_a^b (z_1(t) + z_2(t)) dt = \int_a^b z_1(t) dt + \int_a^b z_2(t) dt$;
- $c \in [a, b] \implies \int_a^b z(t) dt = \int_a^c z(t) dt + \int_c^b z(t) dt$;
- $\int_a^b (\alpha + i\beta)z(t) dt = (\alpha + i\beta) \int_a^b z(t) dt$;
- $\int_a^b z(t) dt = - \int_b^a z(t) dt$;
- Para cada $t \in [a, b]$, se $Z(t) = X(t) + iY(t)$ tem derivada $Z'(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ contínua, ou seja, $X'(t) = x(t)$ e $Y'(t) = y(t)$ são contínuas, então

$$\begin{aligned} \int_a^b z(t) dt &= Z(t) \Big|_{t=a}^{t=b} \\ &= X(t) \Big|_{t=a}^{t=b} + iY(t) \Big|_{t=a}^{t=b} \\ &= Z(b) - Z(a), \end{aligned}$$

isto é, vale o teorema fundamental do cálculo em \mathbb{C} .

Exemplos

- $\int_0^{\pi} e^{it} dt = 2i$. De fato, considere uma função $Z(t)$ que satisfaça a expressão $Z'(t) = e^{it}$. Por exemplo, considere a primitiva $Z(t) = \frac{e^{it}}{i}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{it} dt &= \frac{e^{it}}{i} \Big|_{t=0}^{t=\pi} \\ &= \frac{1}{i} (e^{i \cdot \pi} - e^{i \cdot 0}) \\ &= -\frac{2}{i}. \end{aligned}$$

- Vamos resolver o exemplo que precede a observação 8, sem integração por partes. Assim, considere uma função $Z(t)$ que satisfaça a expressão $Z'(t) = e^{(1+i)t}$. Por exemplo,

considere a primitiva $Z(t) = \frac{e^{(1+i)t}}{1+i}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^{(1+i)t} dt &= \frac{e^{(1+i)t}}{1+i} \Big|_{t=0}^{t=\pi/2} \\ &= \frac{1}{1+i} (e^{(1+i)\pi/2} - e^{(1+i)0}) \\ &= \frac{1}{2}(1-i)(-1 + ie^{\pi/2}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1) + \frac{i}{2}(e^{\pi/2} + 1). \end{aligned}$$

Note que, dessa integração complexa, podemos calcular, diretamente, duas integrais reais. De fato, por um lado,

$$\int_0^{\pi/2} e^{(1+i)t} dt = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1) + \frac{i}{2}(e^{\pi/2} + 1).$$

Por outro, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^{t+it} dt &= \int_0^{\pi/2} e^t e^{it} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} e^t \cos t dt + i \int_0^{\pi/2} e^t \sin t dt. \end{aligned}$$

Agora, basta compararmos as partes reais e imaginárias dos segundos membros, pois os primeiros membros representam a mesma integral. Logo,

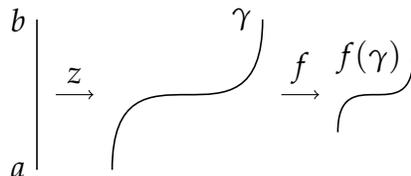
$$\int_0^{\pi/2} e^t \cos t dt = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1) \text{ e } \int_0^{\pi/2} e^t \sin t dt = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} + 1).$$

Observação 9 (Integral de linha de uma função complexa) Caso $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tenha derivada contínua e a função $f = P + iQ$ (dada em (2.1) da página 8) seja contínua sobre a curva $\gamma = \{z(t) : t \in [a, b]\}$ (conforme a figura 2.7), temos

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt. \quad (2.12)$$

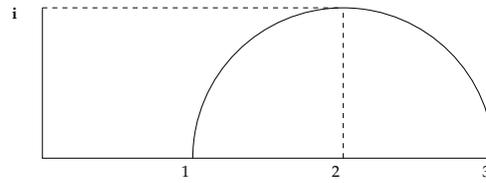
Além disso, pode ser demonstrado que essa integral não depende da parametrização $z(t)$ de γ .

Figura 2.7: $f(z(t))$, onde $z(t)$ é uma parametrização de γ e f está restrita a γ



Exemplo

Seja γ a semi-circunferência superior de centro $z_0 = 2$ e raio $r = 1$, conforme a figura ?? . Portanto, $\int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz = i\pi$, via parametrizações distintas de γ . Por exemplo, pela

Figura 2.8: Semi-circunferência superior de centro $z_0 = 2$ e raio $r = 1$.

parametrização $z(t) = 2 + e^{it}$, $t \in [0, \pi]$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2 + e^{it} - 2} \mathbf{i} e^{it} dt \\ &= \mathbf{i} \int_0^{\pi} dt \\ &= \mathbf{i} t \Big|_{t=0}^{t=\pi}. \end{aligned}$$

Analogamente, pela parametrização $z(t) = 2 + e^{i\pi t}$, $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz &= \int_0^1 \frac{1}{2 + e^{i\pi t} - 2} \mathbf{i}\pi e^{i\pi t} dt \\ &= \mathbf{i}\pi \int_0^{\pi} dt \\ &= \mathbf{i}\pi t \Big|_{t=0}^{t=1}. \end{aligned}$$

Observação 10 (Teorema fundamental do cálculo para integral de linha) *Doravante, assumiremos as mesmas hipóteses da observação 9. Agora, considere:*

- D aberto em \mathbb{C} ;
- $\gamma \subset D$;
- $f = P + \mathbf{i}Q$ holomorfa em D ;
- P_x, P_y, Q_x e Q_y contínuas em D .

Então,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f'(z) dz &= \int_a^b f'(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_{z(a)}^{z(b)} f'(u) du \\ &= f(z(b)) - f(z(a)). \end{aligned}$$

Exemplo

Considere $f(z) = \log z$, $z \in D_0$, o ramo do logaritmo (como definido anteriormente) e $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, uma parametrização de $\partial D(0, 1)$.¹¹ Assim, por um lado,

¹¹Conforme a observação 6, p. 14.

como $f'(z) = \frac{1}{z}$ (para cada $z \in D_0$), temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial D(0,1)} f'(z) dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \mathbf{i} e^{it} dt \\ &= \mathbf{i} \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned} f(z(2\pi)) - f(z(0)) &= \log e^{i \cdot 2\pi} - \log e^{i \cdot 0} \\ &= 2\pi \mathbf{i} - 0 \\ &= 2\pi \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Observação 11 (Linearidade da integral de linha) Se z_0 e z_1 são constantes complexas e f e g são integráveis como em (2.12), então

$$\int_{\gamma} (z_0 f + z_1 g) = z_0 \int_{\gamma} f + z_1 \int_{\gamma} g.$$

Exemplo

$\int_{\gamma} (z + \bar{z}) dz = \int_{\gamma} z dz + \int_{\gamma} \bar{z} dz$.¹² De fato, basta observarmos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (z + \bar{z}) dz &= \int_a^b [2x(t) (x'(t) + \mathbf{i}y'(t))] dt \\ &= \int_a^b 2x(t)x'(t) dt + \mathbf{i} \int_a^b 2x(t)y'(t) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z dz &= \int_a^b (x(t) + \mathbf{i}y(t)) (x'(t) + \mathbf{i}y'(t)) dt \\ &= \int_a^b [x(t)x'(t) - y(t)y'(t) + \mathbf{i} (x(t)y'(t) + x'(t)y(t))] dt \\ &= \int_a^b (x(t)x'(t) - y(t)y'(t)) dt + \mathbf{i} \int_a^b (x(t)y'(t) + x'(t)y(t)) dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_a^b z (x(t) - \mathbf{i}y(t)) (x'(t) + \mathbf{i}y'(t)) dt \\ &= \int_a^b [x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + \mathbf{i} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))] dt \\ &= \int_a^b (x(t)x'(t) + y(t)y'(t)) dt + \mathbf{i} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt. \end{aligned}$$

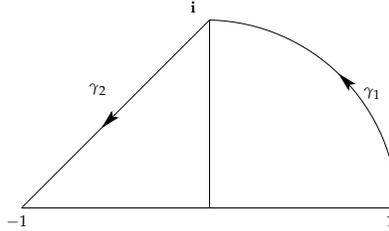
Observação 12 (Integração sobre curvas contíguas) Pode ser demonstrado que, caso o ponto final da curva γ_1 coincida com o ponto inicial da curva γ_2 , γ denote $\gamma_1 \cup \gamma_2$ e possamos integrar como em (2.12), temos

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

¹²Nesse exemplo, $z_0 = z_1 = 1$.

Exemplo Considere a função identidade $f(z) = z$ e as curvas $\gamma_1 = \{z_1(t) = e^{i\frac{\pi}{2}t} : t \in [0, 1]\}$ e $\gamma_2 = \{z_2(t) = \mathbf{i} + t(-1 - \mathbf{i}) : t \in [0, 1]\}$, conforme ilustradas na figura 2.9.

Figura 2.9: γ_2 é o segmento de reta entre $z_0 = \mathbf{i}$ e $z_1 = -1$, isto é, $z_2(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$, $0 \leq t \leq 1$; γ_1 representa a parte da circunferência de centro 0 e raio 1 no primeiro quadrante



Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} z dz &= \int_{\gamma_1} z dz + \int_{\gamma_2} z dz \\
 &= \int_0^1 z_1(t) z_1'(t) dt + \int_0^1 z_2(t) z_2'(t) dt \\
 &= \int_0^1 e^{i\frac{\pi}{2}t} \left(\frac{i\pi}{2} e^{i\frac{\pi}{2}t} \right) dt + \int_0^1 (-t + \mathbf{i}(1-t))(-1 - \mathbf{i}) dt \\
 &= \frac{i\pi}{2} \int_0^1 e^{i\pi t} dt + \int_0^1 [1 + \mathbf{i}(2t - 1)] dt \\
 &= \frac{i\pi}{2} \left(\frac{e^{i\pi t}}{i\pi} \right) + t + \mathbf{i} (t^2 - t) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{2}(-1 - 1) - 0 \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

Observação 13 (Estimativa do tamanho da integral) Se, para todo $z \in \gamma$, $|f(z)| \leq M$ e L é o comprimento de γ , então

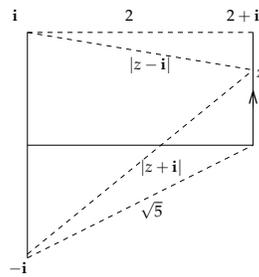
$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML.$$

Exemplo Para cada $z \in \gamma$, seja

$$\begin{aligned}
 |f(z)| &= \left| \frac{1}{z^2 + 1} \right| \\
 &= \frac{1}{|z + \mathbf{i}|} \cdot \frac{1}{|z - \mathbf{i}|},
 \end{aligned}$$

onde γ representa o segmento de reta entre $z_0 = 2$ e $z_1 = 2 + \mathbf{i}$. Logo, pela geometria da figura 2.10, $L = 1$ e, para todo $z \in \gamma$,

$$|z + \mathbf{i}| \geq \sqrt{5} \text{ e } |z - \mathbf{i}| \geq 2,$$

Figura 2.10: z varia em γ 

isto é,

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = M.$$

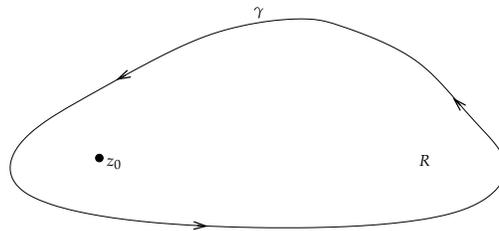
Consequentemente, pela observação 13,

$$\left| \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{5}}.^{13}$$

Observação 14 (Curvas de Jordan) *Doravante, caso nada seja dito em contrário, γ representará uma “curva de Jordan”, em outras palavras:*

- γ será fechada, ou seja, $z(a) = z(b)$;
- γ será simples, isto é, não terá auto-interseção;¹⁴
- γ terá sentido anti-horário;¹⁵
- γ representará a fronteira de uma região R limitada em \mathbb{C} , conforme ilustrada na figura 2.11.¹⁶

Nesse caso, denotaremos \int_{γ} por \oint_{γ} .

Figura 2.11: Região R limitada por uma curva de Jordan

¹³Em breve, calcularemos essa integral para γ fechada, como definida na observação 14.

¹⁴Ou seja, z será injetiva em $[a, b)$.

¹⁵Como convecionamos na observação 5 da página 13.

¹⁶A limitação de R significa o seguinte:

$$z_0 \in R \implies \exists r > 0 \text{ tal que } R \subset D(z_0, r) \cup \partial D(z_0, r),$$

conforme a observação 5.

Observação 15 (Teorema de Cauchy-Goursat) *Se f é holomorfa em $\gamma \cup R$, então*

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0. \tag{2.13}$$

Exemplos

No lugar da $f(z)$ de (2.13), podemos considerar qualquer uma das seguintes funções: e^z , $\cos z$, $\sen z$ e z^n , $n = 0, 1, 2, \dots$. De fato, como vimos, essas funções são holomorfas em \mathbb{C} .

Observação 16 (Integração entre curvas de Jordan) *Se f é holomorfa em $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup (R_2 - R_1)$ e $\gamma_1 \subset R_2$, conforme a figura 2.12, então*

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz.$$

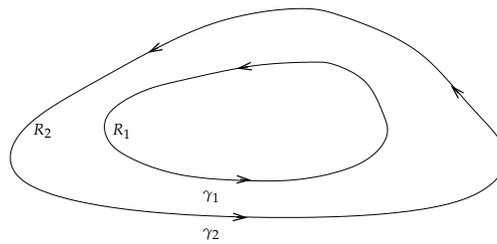
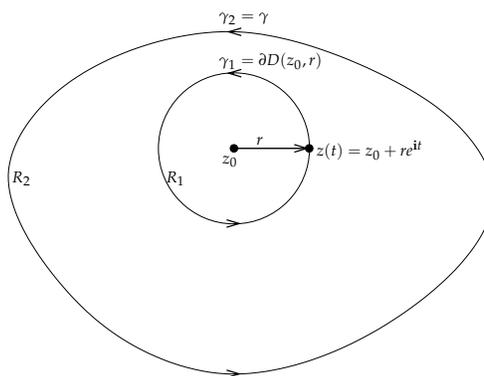


Figura 2.12: $f(z)$ é holomorfa na região limitada pelas curvas γ_1 e γ_2

Figura 2.13: Agora, $\gamma_2 = \gamma$ e $\gamma_1 = \partial D(z_0, r)$, ao compararmos com a figura 2.12



Observação 17 (Exemplo importante da observação 16) *Sejam $\gamma_2 = \gamma$, $z_0 \in R_2$ e, para r suficientemente pequeno, $\gamma_1 = \partial D(z_0, r)$, conforme a figura 2.13. Portanto,*

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i. \tag{2.14}$$

De fato, seja $z(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, uma parametrização de γ_1 . Assim,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz &= \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0} dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} i r e^{it} dt \\ &= i t \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

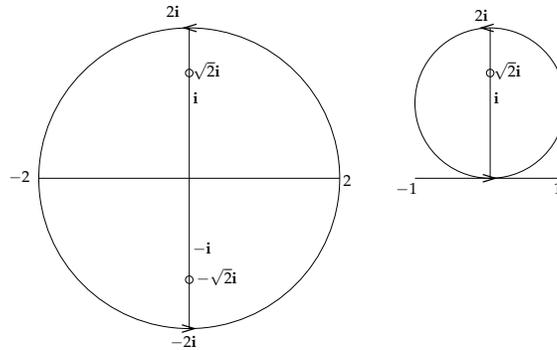
Note que, como

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

não é holomorfa em $z_0 \in R$, não podemos aplicar a fórmula (2.13) para a integral (2.14).

Exemplos

Figura 2.14: $\partial D(0, 2)$ e $\partial D(i, 1)$



$$1. \gamma = \partial D(0, 2) \implies \oint_{\gamma} \frac{2z}{z^2 + 2} dz = 4\pi i;$$

$$2. \gamma = \partial D(i, 1) \implies \oint_{\gamma} \frac{2z}{z^2 + 2} dz = 2\pi i.$$

De fato, como (pelo método das frações parciais)

$$\begin{aligned} \frac{2z}{z^2 + 2} &= \frac{2z}{(z + i\sqrt{2})(z - i\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{z + i\sqrt{2}} + \frac{1}{z - i\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

temos (veja a figura 2.14),

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D(0, 2)} \frac{2z}{z^2 + 2} dz &= \oint_{\partial D(0, 2)} \frac{1}{z + i\sqrt{2}} dz + \oint_{\partial D(0, 2)} \frac{1}{z - i\sqrt{2}} dz \\ &= 2\pi i + 2\pi i \\ &= 4\pi i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D(i,1)} \frac{2z}{z^2+2} dz &= \oint_{\partial D(i,1)} \frac{1}{z+i\sqrt{2}} dz + \oint_{\partial D(i,1)} \frac{1}{z-i\sqrt{2}} dz \\ &= 0 + 2\pi i \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

Observação 18 (Fórmula integral de Cauchy) Se f é holomorfa em $\gamma \cup R$ e $z_0 \in R$, então

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Note que, se $n = 0$, então, por (2.15),

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (2.16)$$

Além disso, se $f(z) = 1$ em $\gamma \cup R$, então, de (2.16) e (2.15) temos, respectivamente, as fórmulas (2.14) e, para $m > 1$,

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{(z-z_0)^m} dz = 0. \quad (2.17)$$

Exemplos

1. Queremos calcular $\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z-2} dz$. Assim:

$$\cdot z_0 = 2 \notin \gamma \cup R \text{ e } f(z) = \frac{e^z}{z-2} \xrightarrow{(2.13)} \oint_{\gamma} \frac{e^z}{z-2} dz = 0;$$

$$\cdot z_0 = 2 \in R \text{ e } f(z) = e^z \xrightarrow{(2.16)} \oint_{\gamma} \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i e^2.$$

2. Se $z_0 = \frac{1}{2} \in R$, então

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{z^3 - 6}{2z - i} dz &= \oint_{\gamma} \frac{\frac{z^3}{2} - 3}{z - z_0} dz \\ &= 2\pi i \left(\frac{z_0^3}{2} - 3 \right), \end{aligned}$$

por (2.16), com $f(z) = \frac{z^3}{2} - 3$.

3. Se $z_0 = i \in R$ e $f(z) = e^{z^2}$, temos, por (2.15) (com $n = 3$),

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{(z-i)^4} dz &= \frac{2\pi i}{3!} \cdot f^{(3)}(z_0) \\ &= \frac{2\pi i}{6} (12i + 8i^3) e^{i^2} \\ &= -\frac{4\pi}{3e}, \end{aligned}$$

onde utilizamos amos $f'''(z) = (12z + 8z^3) e^{z^2}$.

4. Exercício 19 da seção 2.6.

Primeira resolução

Como, via frações parciais,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z+2)} &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z+2} \\ &= \frac{(A+B)z + 2A}{z(z+2)}\end{aligned}$$

acarreta

$$A = \frac{1}{2} \text{ e } B = -\frac{1}{2},$$

temos

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2+2z} dz &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{1}{z-0} dz - \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{1}{z-(-2)} dz \\ &= \frac{1}{2}(2\pi i) - \frac{1}{2}(0) \\ &= \pi i,\end{aligned}$$

onde, na primeira parcela da diferença da primeira igualdade, de cima para baixo, como $z_0 = 0 \in R$, utilizamos (2.14) e, na segunda parcela, como $-2 \notin \gamma \cup R$, utilizamos (2.13) com $f(z) = \frac{1}{z+2}$.

Segunda resolução

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2+2z} dz &= \oint_{\gamma} \frac{1}{z(z+2)} dz \\ &= \oint_{\gamma} \frac{\frac{1}{z+2}}{z} dz \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{0+2} \right) \\ &= \pi i,\end{aligned}$$

onde, como $z_0 = 0 \in R$, utilizamos (2.16) com $f(z) = \frac{1}{z+2}$.

5. $\gamma = \partial D(0,1) \implies \oint_{\gamma} \frac{e^{i\pi z}}{2z^2-5z+2} dz = \frac{2\pi}{3}$.

De fato, como

$$\begin{aligned}2z^2 - 5z + 2 &= 2 \left(z^2 - \frac{5}{2}z + 1 \right) \\ &= 2 \left(z - \frac{1}{2} \right) (z - 2),\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{e^{i\pi z}}{2z^2 - 5z + 2} dz &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{e^{i\pi z}}{z - \frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{e^{i\pi \cdot \frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} - 2} \\ &= \pi i \cdot \frac{i}{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2\pi}{3}, \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, de cima para baixo, como $z_0 = \frac{1}{2} \in R$, utilizamos (2.16) com $f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z-2}$.

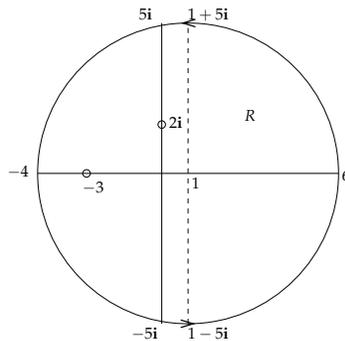
6. Exercício 18 da seção 2.6.

$\gamma = \partial D(1, 5)$, conforme a figura 2.15, e queremos calcular

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\zeta^2 + \zeta}{(\zeta - 2i)(\zeta + 3)} d\zeta.$$

Portanto, primeiramente, como $\{2i, -3\} \subset R$,¹⁷ note que:

Figura 2.15: $\gamma = \partial D(1, 5)$



- $f(\zeta) = \frac{\zeta^2 + \zeta}{(\zeta - 2i)(\zeta + 3)} \implies$ (2.13) (com ζ no lugar de z) não pode ser utilizada, pois $f(\zeta)$ não é holomorfa nos pontos $2i$ e -3 ;¹⁸
- (2.16) não pode ser utilizada da forma:¹⁹
 - * $\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta + 3} d\zeta = 2\pi i f(-3)$, onde $f(\zeta) = \frac{\zeta^2 + \zeta}{\zeta - 2i}$, pois f não é holomorfa em $2i$;
 - * $\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - 2i} d\zeta = 2\pi i f(2i)$, onde $f(\zeta) = \frac{\zeta^2 + \zeta}{\zeta + 3}$, pois f não é holomorfa em -3 .

¹⁷De fato, $|2i - 1| = \sqrt{5} < 5$ e $|-3 - 1| = 4 < 5$.

¹⁸Cf. p. 21.

¹⁹Cf. p. 23.

Consequentemente, pela divisão longa de $\frac{\zeta^2 + \zeta}{(\zeta - 2\mathbf{i})(\zeta + 3)}$, como o dividendo $\zeta^2 + \zeta$ é igual ao divisor $\zeta^2 + (3 - 2\mathbf{i})\zeta - 6\mathbf{i}$, multiplicado pelo quociente 1, mais o resto $-2(1 - \mathbf{i})\zeta + 6\mathbf{i}$, temos

$$\frac{\zeta^2 + \zeta}{(\zeta - 2\mathbf{i})(\zeta + 3)} = 1 - 2 \cdot \frac{(1 - \mathbf{i})\zeta - 3\mathbf{i}}{(\zeta - 2\mathbf{i})(\zeta + 3)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{\zeta^2 + \zeta}{(\zeta - 2\mathbf{i})(\zeta + 3)} d\zeta &= \oint_{\gamma} d\zeta - 2 \oint_{\gamma} \frac{(1 - \mathbf{i})\zeta - 3\mathbf{i}}{(\zeta - 2\mathbf{i})(\zeta + 3)} d\zeta \\ &= -2 \oint_{\gamma} \frac{(1 - \mathbf{i})\zeta - 3\mathbf{i}}{(\zeta - 2\mathbf{i})(\zeta + 3)} d\zeta, \end{aligned}$$

onde utilizamos (2.13) na primeira parcela da diferença das integrais. Agora, para resolvermos a última integral, usaremos a técnica das frações parciais. Assim, como

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \mathbf{i})\zeta - 3\mathbf{i}}{(\zeta - 2\mathbf{i})(\zeta + 3)} &= \frac{A}{\zeta - 2\mathbf{i}} + \frac{B}{\zeta + 3} \\ &= \frac{(A + B)\zeta + 3A - 2\mathbf{i}B}{(\zeta - 2\mathbf{i})(\zeta + 3)} \end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{cases} A + B = 1 - \mathbf{i}, \\ 3A - 2\mathbf{i}B = -3\mathbf{i}, \end{cases}$$

podemos multiplicar a primeira equação desse sistema por -3 e somar o produto daí obtido pela segunda equação, para obtermos $B = \frac{3}{3+2\mathbf{i}}$ e $A = \frac{2-\mathbf{i}}{3+2\mathbf{i}}$.²⁰ Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\gamma} \frac{\zeta^2 + \zeta}{(\zeta - 2\mathbf{i})(\zeta + 3)} d\zeta &= -\frac{1}{\pi\mathbf{i}} \left(\frac{2 - \mathbf{i}}{3 + 2\mathbf{i}} \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - 2\mathbf{i}} d\zeta + \frac{3}{3 + 2\mathbf{i}} \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta + 3} d\zeta \right) \\ &= -\frac{1}{\pi\mathbf{i}} \left(\frac{1}{3 + 2\mathbf{i}} \right) \left((2 - \mathbf{i}) \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - 2\mathbf{i}} d\zeta + 3 \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta + 3} d\zeta \right) \\ &= -\frac{1}{\pi\mathbf{i}} \left(\frac{1}{3 + 2\mathbf{i}} \right) ((2 - \mathbf{i} + 3)2\pi\mathbf{i}) \\ &= -\left(\frac{1}{3 + 2\mathbf{i}} \right) (10 - 2\mathbf{i}) \\ &= \frac{-10 + 2\mathbf{i}}{3 + 2\mathbf{i}}, \end{aligned}$$

onde utilizamos, na terceira igualdade, a fórmula (2.14).²¹

Observação 19 (Demonstração de (2.15)) Via (2.16),²² podemos demonstrar, por indução sobre n , a fórmula (2.15).

²⁰Podemos obter o valor de A ao substituirmos o valor B na primeira equação do sistema.

²¹Cf. p. 21.

²²Não demonstramos essa fórmula, apenas a enunciamos como caso particular de (2.15) na página 23.

De fato, o primeiro passo da indução é a demonstração de (2.15) para $n = 1$:

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - (z_0 + h)} dz - \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right]}{h} \quad (\text{via (2.16)}) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{1}{h} \cdot \frac{((z - z_0) - ((z - z_0) - h)) f(z)}{(z - (z_0 + h))(z - z_0)} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{1}{h} \cdot \frac{hf(z)}{(z - (z_0 + h))(z - z_0)} dz \\
 &= \frac{1!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.
 \end{aligned}$$

Portanto, como a fórmula (2.15) é válida para $n = 1$, podemos demonstrá-la para $n = 2$. De fato:

$$\begin{aligned}
 f''(z_0) &= (f')'(z_0) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(z_0 + h) - f'(z_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{(z - (z_0 + h))^2} dz - \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{(z - z_0)^2} dz \right]}{h} \quad ((2.15) \text{ válida para } n = 1) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{1}{h} \cdot \frac{((z - z_0)^2 - ((z - z_0) - h)^2) f'(z)}{(z - (z_0 + h))^2 (z - z_0)^2} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{1}{h} \cdot \frac{(2(z - z_0)h - h^2) f'(z)}{(z - (z_0 + h))^2 (z - z_0)^2} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{1}{h} \cdot \frac{h(2(z - z_0) - h) f'(z)}{(z - (z_0 + h))^2 (z - z_0)^2} dz \\
 &= \frac{1 \cdot 2}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(z - z_0) f'(z)}{(z - z_0)^4} dz \\
 &= \frac{2!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{(z - z_0)^3} dz.
 \end{aligned}$$

Analogamente, ao supormos que (2.15) é verdadeira para o inteiro positivo n , podemos demonstrá-la para $n + 1$.

2.4 Séries de números complexos

Estudaremos, quase que exclusivamente, as *séries de potências* em \mathbb{C} , que dependem das séries de potências em \mathbb{R} ,²³ que podem ser revisadas (definição, intervalos de convergência, testes/critérios de convergência, etc.) nas minhas notas (de aulas) de *cálculo 3*, disponibilizadas em minha página acadêmica institucional, cujo endereço eletrônico está destacado na capa desse manual.

²³Veremos que, a convergência de séries em \mathbb{C} depende da convergência de séries em \mathbb{R} e, em particular, a convergência de séries de potências em \mathbb{C} depende da convergência absoluta de séries de potências em \mathbb{R} .

Observação 20 (“Definição” de séries de números complexos) *Caso n_0 seja um inteiro não negativo e*

$$(z_{n_0}, z_{n_0+1}, z_{n_0+2}, \dots)$$

seja uma sequência em \mathbb{C} , a expressão

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq n_0} z_n &= \sum_{n=n_0}^{\infty} z_n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=n_0}^{n_0+N} z_n \end{aligned} \tag{2.18}$$

representa uma série de números complexos.

Exemplo

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} + \frac{\mathbf{i}}{n^2} \right) = (1 + \mathbf{i}) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\mathbf{i}}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{\mathbf{i}}{9} \right) + \dots$$

Observação 21 (Parte real e parte imaginária de (2.18)) *Demonstra-se que, se $z_n = x_n + \mathbf{i}y_n$, onde, para cada $n \geq n_0$, x_n e y_n são números reais, então,*

$$\sum_{n \geq n_0} z_n < \infty \iff \sum_{n \geq n_0} x_n < \infty \text{ e } \sum_{n \geq n_0} y_n < \infty$$

e, nesse caso,

$$\sum_{n \geq n_0} z_n = \sum_{n \geq n_0} x_n + \mathbf{i} \sum_{n \geq n_0} y_n.$$

Exemplos

- A série do exemplo anterior é divergente. De fato, embora

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots < \infty,$$

a série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

é divergente.²⁴

- Para uma série convergente em \mathbb{C} , considere

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{\mathbf{i}}{3^n} \right) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} + \mathbf{i} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) + \mathbf{i} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \right) \\ &= \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) + \mathbf{i} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) \\ &= 2 + \frac{3\mathbf{i}}{2}, \end{aligned}$$

²⁴Confira as minhas notas de cálculo 3 supracitadas.

pois, a parte real e a imaginária são séries geométricas, em outras palavras, somas de termos de *progressões geométricas infinitas* com razões no intervalo $(-1, 1)$.

Observação 22 (Séries complexas via séries reais) *Doravante, para cada inteiro $n \geq n_0$, consideraremos apenas a série (2.18) para*

$$z_n = a_n (z - z_0)^n,$$

onde cada coeficiente a_n , variável z e constante z_0 pertencem a \mathbf{C} . Assim, para bem definirmos a série

$$S(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n (z - z_0)^n, \quad (2.19)$$

consideremos a série (de números reais não negativos na variável r) associada a (2.19), ou seja,

$$\sum_{n \geq n_0} |a_n| r^n, \quad (2.20)$$

onde $r = |z - z_0|$.

Exemplo Se $z_0 = 0$ e, para cada inteiro não negativo, $a_n = 1$, (2.19) e (2.20) são dadas, respectivamente, por

$$\sum_{n \geq 0} z^n = 1 + z + z^2 + \dots \quad (2.21)$$

e

$$\sum_{n \geq 0} r^n = 1 + r + r^2 + \dots, \quad (2.22)$$

onde $r = |z| \geq 0$.

Observação 23 (Intervalo de convergência) *O intervalo de convergência $I(S(z))$ da série (2.19) é definido pelo intervalo de convergência da série (2.20), ou seja,*

$$I(S(z)) := \left\{ r \geq 0 : \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n < +\infty \right\},$$

e é não vazio.²⁵ Pelas minhas notas de cálculo 3 supracitadas, $I(S(z))$ é igual a um dos seguintes conjuntos:

- (1) $\{0\}$;
- (2) $[0, r_0)$ ou $[0, r_0]$, onde r_0 é positivo;²⁶
- (3) $[0, \infty)$.

²⁵ $0 \in I(S(z))$.

²⁶Seja $r_0 > 0$ tal que $\sum_{n \geq n_0} |a_n| r_0^n < \infty$. Pelo teste da comparação para séries reais, $\sum_{n \geq n_0} |a_n| r^n < \infty$ para todo $r \in [0, r_0]$.

Exemplo

Como (2.22) é uma série geométrica de termos não negativos, ela converge para

$$\frac{1}{1-r}$$

em $[0, 1)$.²⁷ Por outro lado, séries geométricas em \mathbb{R} divergem em $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Assim, para $|z| < 1$, temos que

$$I(S(z)) = [0, 1)$$

é o intervalo de convergência de (2.21). Além disso, assim como para as séries geométricas em \mathbb{R} , demonstra-se o seguinte resultado para as séries geométricas em \mathbb{C} :

$$|z| < 1 \implies \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}. \quad (2.23)$$

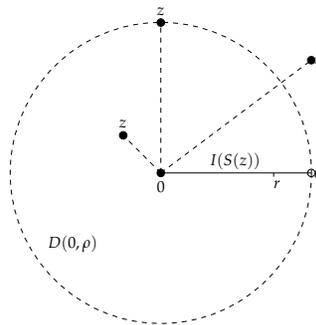
Observação 24 (Raio de convergência) O raio de convergência de (2.19), denotado por ρ , é dado por:

- 0, caso a condição (1) da observação 23 seja válida;
- r_0 , caso a condição (2) da observação 23 seja válida;
- ∞ , por abuso de notação, caso a condição (3) da observação 23 seja válida.

Exemplo

No exemplo anterior, $\rho = 1$.

Figura 2.16: Seja $z_0 = 0$. $S(z)$ converge para $z \in D(0, \rho)$; pode convergir ou divergir para $z \in \partial D(0, \rho)$; diverge para $z \notin D(0, \rho) \cup \partial D(0, \rho)$



Observação 25 (Disco de convergência e critérios de convergência) O disco (aberto)

$$D(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$$

é o disco de convergência de (2.19), conforme a figura 2.16, sendo vazio para $\rho = 0$.

Demonstra-se que:

²⁷(2.21) é a soma dos termos da progressão geométrica

$$(1, r, r^2, \dots, r^n, \dots)$$

de razão $r \in [0, 1)$.

- A série (2.19):²⁸

- converge absolutamente quando (2.20) converge, isto é,

$$\sum_{n \geq n_0} |a_n| |z - z_0|^n < +\infty$$

para $|z - z_0| < \rho$, ou seja, $z \in D(z_0, \rho)$;

- diverge quando (2.20) diverge, ou seja, quando $|z - z_0| > \rho$, isto é, $z \notin D(z_0, \rho) \cup \partial D(z_0, \rho)$;
- pode convergir ou divergir para $|z - z_0| = \rho$, ou seja, $z \in \partial D(z_0, \rho)$;

conforme a figura 2.16.

- Na prática, caso todos os coeficientes de (2.19), a partir de um determinado índice n , sejam não nulos, podemos utilizar o teste da razão para tentarmos obter ρ , ou seja,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Exemplos

Pelo teste da razão supracitado, ρ é igual a:

- 0 para $S(z) = \sum_{n \geq 0} n! z^n$;
- 1 para $S(z)$ dada por qualquer uma das séries: $\sum_{n \geq 0} z^n$, $\sum_{n > 0} \frac{1}{n} z^n$ ou $\sum_{n > 0} \frac{1}{n^2} z^n$.²⁹

Observação 26 (Adição e multiplicação de séries) Sem perda de generalidade, seja $n_0 = 0$ na série (2.19).³⁰ Demonstra-se que, se ρ é o menor entre os raios de convergência de

$$S_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_{1,n} (z - z_0)^n \text{ e } S_2(z) = \sum_{n \geq 0} a_{2,n} (z - z_0)^n,$$

então, para cada $z \in D(z_0, \rho)$,³¹ podemos obter a soma

$$S_1(z) + S_2(z) = \sum_{n \geq 0} (a_{1,n} + a_{2,n}) (z - z_0)^n$$

e o produto

$$S_1(z) \cdot S_2(z) = \sum_{n \geq 0} (a_{1,0} a_{2,n} + a_{1,1} a_{2,n-1} + \cdots + a_{1,n-1} a_{2,1} + a_{1,n} a_{2,0}) (z - z_0)^n.$$

Exemplos

Para $|z| < 1$, temos

$$\sum_{n > 0} \frac{n+1}{n^2} z^n = \sum_{n > 0} \frac{1}{n} z^n + \sum_{n > 0} \frac{1}{n^2} z^n$$

e

$$\sum_{n \geq 0} (n+1) z^n = \sum_{n \geq 0} z^n \cdot \sum_{n \geq 0} z^n.$$

²⁸Confira as notas supracitadas.

²⁹Note que, para $|z| = 1$, as duas primeiras séries desse item são divergentes, enquanto que a última é convergente.

³⁰Cf. p. 29.

³¹Logo, $|z - z_0| < \rho$.

Observação 27 (Derivações sucessivas de (2.19)) Sem perda de generalidade, seja $n_0 = 0$ em $S(z)$.³² Defina

$$S'(z) := \sum_{n \geq 0} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Demonstra-se que as séries $S(z)$ e $S'(z)$ têm o mesmo raio de convergência ρ e, se $\rho > 0$, então

$$S'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0},$$

para cada $z \in D(z_0, \rho)$. Portanto, $S(z)$ é holomorfa em $D(z_0, \rho)$ e, via derivações repetidas, temos $S(z)$ infinitamente diferenciável e

$$a_n = \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Exemplo

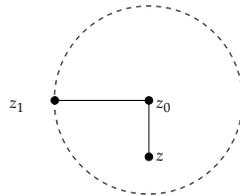
Podemos verificar a validade da observação 27 para o polinômio de grau g dado por

$$\begin{aligned} S(z) &= a_0 + a_1 z + \dots + a_g z^g \\ &= a_0 + a_1 z + \dots + a_g z^g + 0 + 0 + 0 + \dots, \end{aligned}$$

onde $a_n = 0$ para cada inteiro $n > g$.

Observação 28 (Holomorfismo acarreta analiticidade) Caso $f(z)$ seja holomorfa em z_0 e z_1 seja o ponto mais próximo de z_0 onde $f(z)$ não seja holomorfa, conforme a figura 2.17, temos $f(z)$ analítica

Figura 2.17: $D(z_0, |z_1 - z_0|)$



em $D(z_0, |z_1 - z_0|)$, isto é,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (2.24)$$

converge para cada z tal que $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.³³

Exemplos

- Para $f(z) = e^z$ e $z_0 = 0$, não existe o z_1 supracitado, pois $f(z)$ é holomorfa em \mathbb{C} . Assim, como $f^{(n)}(z_0) = 1$, $n = 0, 1, \dots$, temos

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

convergente para cada $z \in \mathbb{C}$.

³²Cf. (2.19), p. 29.

³³(2.24) é chamada de *série de Taylor*.

- Para $f(z) = \cos z$ (respectivamente, $f(z) = \sin z$) e $z_0 = 0$, não existe o z_1 supracitado, pois $f(z)$ é holomorfa em \mathbb{C} . Portanto,

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \text{ (respectivamente, } \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1})$$

é convergente para cada $z \in \mathbb{C}$.

- **[Série binomial]**

Para $f(z) = (1+z)^m$, $m < 0$ e $z_0 = 0$, temos $z_1 = -1$ e

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!}z + \frac{(m-1)m}{2!}z^2 + \dots$$

é convergente para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$.

Observação 29 (Holomorfismo e analiticidade são sinônimos) *Pelas observações 27 e 28, temos uma equivalência entre as funções complexas analíticas e holomorfas.*

Observação 30 (Séries com índices negativos) *Doravante, admitiremos a possibilidade do índice n da série (2.19) (da página 29) assumir valores inteiros negativos. Por exemplo, (2.23) (da página 30) gera outras séries, inclusive algumas com índices como o supracitado.*

Exemplos

Para $|z| < 1$, temos

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Portanto:

- Para $|z| > 1$, ou seja, $|1/z| < 1$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right) \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} \\ &= -\sum_{m=-\infty}^{-1} z^m; \end{aligned}$$

- Para $|z| < t_0$, isto é, $|z/t_0| < 1$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_0 - z} &= \frac{1}{t_0} \frac{1}{1 - \frac{z}{t_0}} \\ &= \frac{1}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{t_0^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t_0^{-(n+1)} z^n; \end{aligned}$$

· Para $|z| > t_0 > 0$, ou seja, $|t_0/z| < 1$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_0 - z} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{t_0}{z}} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_0^n}{z^n} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} t_0^n z^{-(n+1)} \\ &= -\sum_{m=-\infty}^{-1} t_0^{-(m+1)} z^m; \end{aligned}$$

· Para $|z| < 1$, ou seja, $|-z| < 1$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= \frac{1}{1-(-z)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n; \end{aligned}$$

· Para $|z| > 1$, ou seja, $|1/z| < 1$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{z}} \right) \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-(n+1)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{-1} (-1)^{-(m+1)} z^m. \end{aligned}$$

Observação 31 (Série de Laurent (SL) em torno de z_0) Para estudarmos os exemplos mais importantes da observação 30, considere duas curvas dadas por

$$\gamma_i = \partial D(z_0, r_i), i = 1, 2,$$

os raios dados por

$$0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty,$$

f analítica na região

$$R = R_2 - (\gamma_1 \cup R_1)$$

e uma curva

$$\gamma \subset R$$

arbitrária, conforme ilustrada na figura 2.18. Assim, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $r_1 < |z - z_0| < r_2$, temos a SL

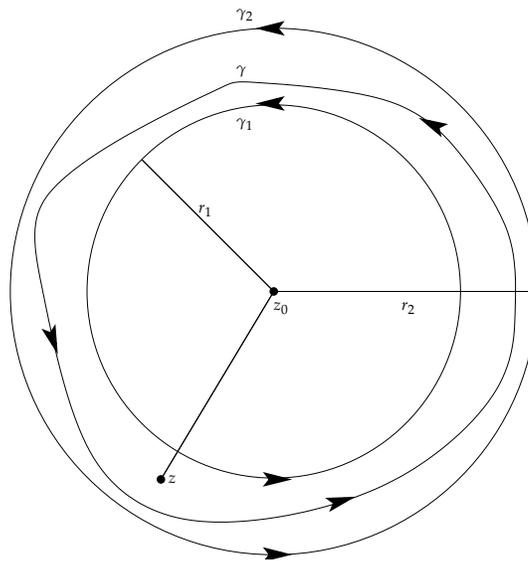
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

para cada inteiro n .³⁴

Figura 2.18: R é o interior da região $D(z_0, r_2) - D(z_0, r_1)$



Exemplos

- Qual a SL de $f(z) = \frac{1}{(z-1)z}$ em torno de $z_0 = 0$ para $0 < |z| < 1$?
Via frações parciais, temos

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} \\ &= -z^{-1} - 1 - z - z^2 - \dots \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)z^n. \end{aligned}$$

Aqui, $r_1 = 0, r_2 = 1, 0 \in R, \gamma \subset D(0,1)$ e

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dw}{w^{n+2}(w-1)} = \begin{cases} 0 & \text{para } n < -1, \\ -1 & \text{para } n \geq -1. \end{cases}$$

De fato:

³⁴Note que, a integral anterior, para $n = 0, 1, 2, \dots$, segue de $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ e (2.15), p. 23.

- Se $n = -2$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dw}{w^{n+2}(w-1)} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dw}{w^{-2+2}(w-1)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dw}{w-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pele teorema de Cauchy-Goursat,³⁵

- Se $-2 \neq n < -1$, isto é, $0 \neq n+2 < 1$, ou seja, $n+2 < 0$, então

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dw}{w^{n+2}(w-1)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{w^{-(n+2)}}{w-1} dw = 0,$$

pele teorema supracitado;

- Se $n \geq -1$, isto é, $n+2 \geq 1$, então

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dw}{w^{n+2}(w-1)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\frac{1}{w-1}}{w^{n+2}} dw.$$

Para calcularmos o segundo membro da igualdade anterior, consideremos a função $g(w) = \frac{1}{w-1}$. Assim,

$$g^{(n+1)}(w) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(w-1)^{n+2}}$$

e, por (2.15),³⁶

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\frac{1}{w-1}}{w^{n+2}} dw &= \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(0) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(-1)^{n+2}} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Pergunta: Qual a SL de $f(z)$ para $|z| > 1$?

- Via frações parciais, temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{3}{2+z-z^2} \\ &= \frac{3}{(1+z)(2-z)} \\ &= \frac{1}{1+z} + \frac{1}{2-z}. \end{aligned}$$

Logo, pela série geométrica (2.23),³⁷ temos três casos:

³⁵Cf. p. 21.

³⁶Cf. p. 23.

³⁷Cf. p. 30.

I. Seja $|z| < 1$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

Aqui, $z_0 = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ e

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \leq -1, \\ (-1)^n + 2^{-(n+1)} & \text{para } n > -1. \end{cases}$$

II. Seja $1 < |z| < 2$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{-(n+1)} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

Aqui, $z_0 = 0$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ e

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{-(n+1)} & \text{para } n \leq -1, \\ 2^{-(n+1)} & \text{para } n > -1. \end{cases}$$

III. Seja $|z| > 2$. Assim,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{-(n+1)} z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-2^{-(n+1)}) z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

Aqui, $z_0 = 0$, $r_1 = 2$, $r_2 = \infty$ e

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{-(n+1)} - 2^{-(n+1)} & \text{para } n \leq -1, \\ 0 & \text{para } n > -1. \end{cases}$$

- Qual a SL de $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)}$ em torno de $z_0 = 1$?³⁸

Via frações parciais, temos

$$f(z) = \frac{1}{8} \frac{1}{z-1} + \left(-\frac{3}{4}\right) \frac{1}{z-3} + \frac{5}{8} \frac{1}{z-5}.$$

Vamos analisar cada uma das parcelas dessa soma:

I parcela: $\frac{1}{z-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,1} (z-1)^n$, para $z \neq 1$, e

$$a_{n,1} = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq -1, \\ 1 & \text{para } n = -1. \end{cases}$$

³⁸Exercício 25.(c) da seção 2.6.

II parcela:

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-1-2} \underbrace{t=z-1}_{=2} - \frac{1}{2-t} \underbrace{|t|<2}_{=2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)2^{-(n+1)}(z-1)^n,$$

para $|z-1| < 2$. Assim,

$$\frac{1}{z-3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,3}(z-1)^n,$$

onde

$$a_{n,3} = \begin{cases} 0 & \text{para } n \leq -1, \\ (-1)2^{-(n+1)} & \text{para } n > -1. \end{cases}$$

III parcela:

$$\frac{1}{z-5} = \frac{1}{z-1-4} \underbrace{t=z-1}_{=4} - \frac{1}{4-t} \underbrace{|t|<4}_{=4} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-(n+1)} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)4^{-(n+1)}(z-1)^n,$$

para $|z-1| < 4$. Portanto,

$$\frac{1}{z-5} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,5}(z-1)^n,$$

onde

$$a_{n,5} = \begin{cases} 0 & \text{para } n \leq -1, \\ (-1)4^{-(n+1)} & \text{para } n > -1. \end{cases}$$

Consequentemente, para $0 < |z-1| < 2$, temos:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-1)^n,$$

onde

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n < -1, \\ 1/8 & \text{para } n = -1, \\ (3/4)2^{-(n+1)} + (-5/8)4^{-(n+1)} & \text{para } n > -1. \end{cases}$$

Pergunta: Qual a SL de $f(z)$ para $|z-1| > 2$?

- Qual a SL de $f(z) = \frac{z}{(z+1)^3}$ em torno de $z_0 = -1$?³⁹

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z+1)^3} = \frac{z+1-1}{(z+1)^3} \\ &= -\frac{1}{(z+1)^3} + \frac{1}{(z+1)^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-(-1))^n, \end{aligned}$$

³⁹Exercício 25.(b) da seção 2.6.

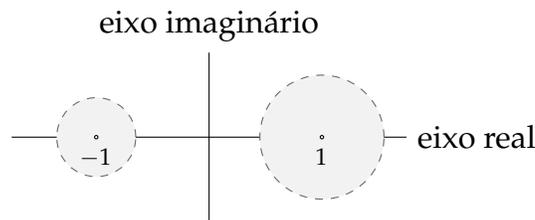
$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq -3, -2, \\ -1 & \text{para } n = -3, \\ 1 & \text{para } n = -2. \end{cases}$$

Note que $r_1 = 0$ e $r_2 = \infty$, isto é, a SL é válida para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z + 1| > 0$.⁴⁰

Observação 32 (Singularidade isolada) Diremos que $z_0 \in \mathbb{C}$ é um ponto singular isolado (ou uma singularidade isolada) de $f(z)$ caso seja o centro de algum disco (aberto) onde $f(z)$ seja analítica, exceto em z_0 .

Exemplo $z_0 \in \{-1, 1\}$ é uma singularidade isolada de $f(z) = \frac{1}{(1+z)(1-z)}$, conforme a figura 2.19.

Figura 2.19: Singularidades isoladas de $f(z)$



Observação 33 (Polo de ordem k) Diremos que $z_0 \in \mathbb{C}$ é um polo de ordem k da SL da observação 31 quando $a_{-k} \neq 0$ e

$$\dots = a_{-k-2} = a_{-k-1} = 0,$$

isto é,

$$\frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

é o primeiro termo não nulo da SL. Nesse caso, z_0 é um polo simples quando $k = 1$, isto é, caso

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0}$$

seja o primeiro termo não nulo da SL.

Exemplo $z_0 = 0$ é um polo simples de $\frac{1}{(z-1)z} = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)z^n$.⁴¹

Observação 34 (Critério para que z_0 seja polo) Caso z_0 seja uma singularidade isolada de $f(z)$, demonstra-se que z_0 é um polo de ordem k de $f(z)$ se, e somente se, existe $\varphi(z)$ analítica em $z = z_0$ tal que $\varphi(z_0) \neq 0$ e

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}.$$

⁴⁰Para a SL em torno de $z_0 = 0$, utilize a série binomial em $-\frac{1}{(z+1)^3} + \frac{1}{(z+1)^2}$.

⁴¹Confira o primeiro exemplo dado após a observação 31.

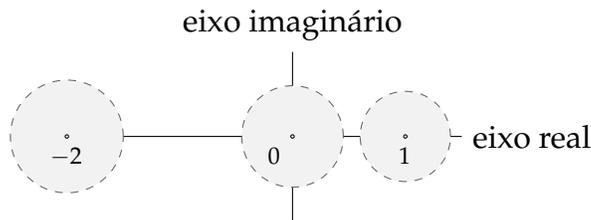
Exemplo

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + z^3 - 2z^2}$$

$$= \frac{1}{z^2(z+2)(z-1)}$$

tem três polos, conforme a figura 2.20.

Figura 2.20: Polos de $f(z)$



De fato:

- $z_0 = 0$ é um polo de ordem 2 de

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)},^{42}$$

- $z_1 = 1$ é um polo simples de

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+2)},^{43}$$

- $z_2 = -2$ é um polo simples de

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}.^{44}$$

Observação 35 (Comentários sobre a função seno) $\operatorname{sen} z$ é nula apenas em múltiplos inteiros de π . Em particular, embora $\operatorname{sen} z$ seja nula na origem, podemos escrever

$$\operatorname{sen} z = z \cdot g(z),$$

com $g(z)$ analítica e $g(0) \neq 0$.

De fato:

⁴²Aqui, $\varphi(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)}$.

⁴³Aqui, $\varphi(z) = \frac{1}{z^2(z+2)}$.

⁴⁴Aqui, $\varphi(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$.

· Seja $z = x + iy$. Assim, como

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i},\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z = 0 &\implies e^{-y+ix} - e^{y-ix} = 0 \\ &\implies |e^{-y+ix}| = |e^{y-ix}| \\ &\implies e^{-y}|e^{ix}| = e^y|e^{-ix}| \\ &\implies \frac{1}{e^y} = e^y \\ &\implies e^{2y} = 1 \\ &\implies y = 0.\end{aligned}$$

Nesse caso, $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x$, que é nula apenas em múltiplos de π . Portanto,

$$\operatorname{sen} z = 0 \iff z = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

· Pelo segundo exemplo dado após a observação 28,

$$g(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

é analítica e, claramente, $g(0) \neq 0$.

Exemplo

Calcule os cinco primeiros termos da SL, em torno de $z_0 = 0$, para $f(z) = \cot z$.

Resolução

Como $f(z) = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$ tem um polo simples na origem,⁴⁵ a sua SL é dada por

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

Para obtermos cada coeficiente a_n , consideremos $(\operatorname{sen} z)f(z) = \cos z$. Assim, por um lado, temos

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} z)f(z) &= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) \left(\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + \dots\right) \\ &= a_{-1} + a_0z + \left(a_1 - \frac{a_{-1}}{3!}\right)z^2 + \left(a_2 - \frac{a_0}{3!}\right)z^3 + \left(a_3 - \frac{a_1}{3!} + \frac{a_{-1}}{5!}\right)z^4 + \dots\end{aligned}$$

Por outro,

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

⁴⁵De fato, pela observação 35,

$$f(z) = \frac{\cos z/g(z)}{z},$$

onde $\varphi(z) = \cos z/g(z)$ é analítica (e não nula) em $z = 0$. Agora, basta considerarmos as observações 33 e 34.

Logo, igualando-se os cinco primeiros coeficientes de mesma potência de z , temos

$$a_{-1} = 1, a_0 = 0, a_1 - \frac{a_{-1}}{3!} = -\frac{1}{2}, a_2 - \frac{a_0}{3!} = 0 \text{ e } a_3 - \frac{a_1}{3!} + \frac{a_{-1}}{5!} = \frac{1}{4!},$$

ou seja,

$$a_{-1} = 1, a_0 = 0, a_1 = -\frac{1}{3}, a_2 = 0 \text{ e } a_3 = -\frac{1}{45}.$$

Portanto,

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 + \dots, \quad 0 < |z| < \pi. \quad (2.25)$$

Observação 36 (Resíduo) Seja z_0 uma singularidade isolada de $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. O resíduo de $f(z)$ em z_0 é dado por

$$\text{res}_f(z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz,^{46}$$

onde $\gamma = \partial D(z_0, |z - z_0|)$.

Exemplos

· Seja

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \\ &= \dots + 0 + \frac{1}{z} + 0 + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - 0)^n, \end{aligned}$$

onde

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq -1, \\ 1 & \text{para } n = -1. \end{cases}$$

Por um lado, $\text{res}_f(0) = a_{-1} = 1$. Por outro,

$$\begin{aligned} \text{res}_f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \\ &= 1, \end{aligned}$$

onde utilizamos a equação (2.14) da observação 17.⁴⁷

· Calcularemos $\text{res}_f(0)$ para

$$f(z) = \frac{\text{sen } z}{z^3(z - 2)(z + 1)}.^{48}$$

⁴⁶Confira a observação 31.

⁴⁷Cf. p. 21.

⁴⁸Exercício 27.(g) da seção 2.6.

Note que podemos escrever $f(z)$ como um produto de dois fatores do seguinte modo:

$$f(z) = \left(\frac{\operatorname{sen} z}{z^3} \right) \left(\frac{1}{(z+1)(z-2)} \right). \quad (2.26)$$

Logo, por um lado, como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \end{aligned}$$

podemos escrever o primeiro fator de (2.26) como

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^3} = z^{-2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots$$

Por outro, pelos exemplos que seguem a observação 30,⁴⁹ o segundo fator de (2.26) é dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)(z-2)} &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{2-z} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \left(\underbrace{(1-z+z^2-\dots)}_{|z|<1} + \underbrace{(2^{-1}+2^{-2}z+2^{-3}z^2+\dots)}_{|z|<2} \right) \\ &= -\frac{1}{3} ((1+2^{-1}) + (-1+2^{-2})z + (1+2^{-3})z^2 + \dots) \end{aligned}$$

(para $|z| < 1$). Assim, multiplicando-se os dois fatores supracitados, temos

$$f(z) = (-1/3)(1+2^{-1})z^{-2} + (-1/3)(-1+2^{-2})z^{-1} + \dots$$

(para $|z| < 1$). Consequentemente,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(0) &= a_{-1} \\ &= (-1/3)(-1+2^{-2}) \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Observação 37 (Cálculo dos resíduos em polos) *Caso z_0 seja um polo de ordem k de $f(z)$, demonstra-se que*

$$\operatorname{res}_f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} ((z-z_0)^k f(z)).$$

Exemplos

⁴⁹Cf. p. 33.

- Consideremos o último exemplo dado. Note que, pela observação 35,

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2(z-2)(z+1)}.$$

Portanto, 0 é um polo de ordem 2 de $f(z)$. Conseqüentemente, pela observação 37,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{(2-1)} \left(z^2 \left(\frac{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots}{z^2(z^2 - z - 2)} \right) \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots}{z^2 - z - 2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{2}{3!}z + \frac{4}{5!}z^3 - \dots \right) (z^2 - z - 2) - \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right) (2z - 1)}{(z^2 - z - 2)^2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- Calcularemos a parte principal de

$$f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen} z}^{50}$$

onde z varia em $D = \{x + iy : |x| < 1, |y| < 1\}$.⁵¹ Note que $f(z)$ tem um polo simples na origem.⁵² Logo, $a_{-1}z^{-1}$ é a sua parte principal. Calcularemos

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(1-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{(-1+1)} \left(\frac{(z-0) \cdot e^z}{\operatorname{sen} z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot e^z}{\operatorname{sen} z} \end{aligned}$$

de três modos distintos:

1.

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(1 + z + \dots)}{z(1 - z^2/3! + \dots)} \\ &= 1, \end{aligned}$$

pelo desenvolvimento em séries de e^z e de $\operatorname{sen} z$;

2.

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{\frac{\operatorname{sen} z}{z}} \\ &= \frac{\lim_{z \rightarrow 0} e^z}{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z}} \\ &= 1; \end{aligned}$$

⁵⁰ $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ é a *parte principal* da SL $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

⁵¹Esse é o exercício 24 da seção 2.6.

⁵²De fato, $f(z) = \frac{e^z/g(z)}{z}$, onde $g(z)$ é a função dada na observação 35.

3. Como o limite a ser calculado é da forma $0/0$, temos, por L'hôpital,

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z + z \cdot e^z}{\cos z} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Observação 38 (Integrais via resíduos) *Pela observação 36, temos*

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i a_{-1} \\ &= 2\pi i \operatorname{res}_f(z_0). \end{aligned}$$

Exemplo

$\oint_{\gamma} e^{2/z} dz = 4\pi i$, onde $\gamma = \partial D(0, 1)$. De fato, $f(z) = e^{2/z}$ é analítica em $\mathbb{C} - \{0\}$ e

$$\begin{aligned} e^{2/z} &= \sum_0^{\infty} \frac{(2/z)^n}{n!} \\ &= \cdots + \frac{2^2}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{2}{1!} \frac{1}{z} + 1 \end{aligned}$$

é a SL de $f(z)$ em torno de $z_0 = 0$.⁵³ Consequentemente, $\operatorname{res}_f(0) = 2$ e a integral anterior é válida.

Observação 39 (Teorema dos resíduos) *Em relação à observação 38, vale o seguinte resultado mais geral:*

Caso γ seja uma curva de Jordan que delimita uma região R (como na observação 14 da página 20) e $f(z)$ seja analítica em $\gamma \cup R$, exceto em $z_i \in R$, $i = 1, \dots, n$, temos

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_f(z_i).$$

Exemplos

$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^4 + z^3 - 2z^2} dz = 0$, onde $\gamma = \partial D(0, 3)$.

De fato, no exemplo dado após a observação 34, vimos que a origem é um polo de ordem 2 e $z_0 \in \{1, -2\}$ é um polo simples de $f(z) = \frac{1}{z^2(z+2)(z-1)}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^2 + z + 2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{-2z - 1}{(z^2 + z + 2)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

⁵³Aqui, $r_1 = 0$ e $r_2 = \infty$.

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_f(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)f(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1}{z^2(z+2)} \right) \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_f(-2) &= \lim_{z \rightarrow -2} ((z - (-2))f(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow -2} \left(\frac{1}{z^2(z-1)} \right) \\ &= -\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) \\ &= 2\pi i \cdot 0.\end{aligned}$$

· Exercício 28.(b) da seção 2.6.

Como $z_1 = -1$ e $z_2 = 0$ são os polos simples de

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)\operatorname{sen} z} \quad 54$$

interiores ao disco $D(0, 2)$, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_f(z_1) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z}{\operatorname{sen} z} \\ &= -\frac{1}{e \operatorname{sen} 1}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_f(z_2) &= \lim_{z \rightarrow 0} (z-0) \frac{e^z}{(z+1)\operatorname{sen} z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{(z+1) \cdot \frac{\operatorname{sen} z}{z}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,2)} f(z) dz = -\frac{1}{e \operatorname{sen} 1} + 1.$$

⁵⁴Para z_1 , note que $f(z) = \frac{e^z}{z+1}$. Para z_2 , note que $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)g(z)}$, com $g(z)$ dada na observação 35.

2.5 Cálculo de integrais reais pelo teorema dos resíduos

2.5.1 Integrais de tipo $I = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$, onde $F(\cos \theta, \sin \theta)$ é uma função real, racional (em $\cos \theta$ e $\sin \theta$) e finita em $[0, 2\pi]$

Pela mudança de variáveis

$$e^{i\theta} = z,$$

temos

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \\ \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \\ \frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta}, \text{ ou seja, } d\theta = \frac{1}{iz} dz, \end{cases}$$

$F(\cos \theta, \sin \theta)$ escrita como uma função complexa $f(z)$ racional (em z) e

$$I = \frac{1}{i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz,$$

onde $\gamma = \partial D(0, 1)$.

Exemplos

$$\cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos \theta} = 2\pi.$$

De fato, via $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ e $d\theta = dz/iz$, temos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z \left[\sqrt{2} - \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]} dz \\ &= -\frac{2}{i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1} dz \\ &= -\frac{2}{i} \oint_{\gamma} \frac{1}{\left[z - (\sqrt{2} + 1) \right] \left[z - (\sqrt{2} - 1) \right]} dz, \end{aligned}$$

cujo integrando tem polos simples em $\sqrt{2} + 1$ (fora do disco unitário) e $\sqrt{2} - 1$ (interior ao disco unitário). Consequentemente, como

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(\sqrt{2} - 1) &= \lim_{z \rightarrow \sqrt{2} - 1} \frac{1}{z - \sqrt{2} - 1} \\ &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

temos

$$I = (-2/i)2\pi i(-1/2).$$

· Se $a > b > 0$, então

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad 55$$

⁵⁵Esse é o exercício 29.(a) da seção 2.6.

De fato, via $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ e $d\theta = dz/iz$, temos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z \left[a + \frac{b}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]} \\ &= \frac{1}{i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{\frac{b}{2} z^2 + az + \frac{b}{2}} \\ &= \frac{2}{bi} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + \frac{2a}{b}z + 1} \end{aligned}$$

cujo integrando tem polos simples em $z_- = -(a/b) - \sqrt{(a/b)^2 - 1}$ (fora do disco unitário) e $z_+ = -(a/b) + \sqrt{(a/b)^2 - 1}$ (interior ao disco unitário).⁵⁶ Assim, como

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(z_+) &= \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{1}{z - z_-} \\ &= \frac{1}{z_+ - z_-} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{(a/b)^2 - 1}}, \end{aligned}$$

temos

$$I = \frac{2}{bi} \cdot 2\pi i \cdot \frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

· Se $a > b > 0$, então

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^2} = \frac{2a\pi}{(a^2 - b^2)^{3/2}}. \quad ^{57}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos \theta)^2} d\theta &= \frac{1}{i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z \left(a + b \left(\frac{z^2+1}{2z} \right) \right)^2} dz \\ &= \frac{1}{i} \oint_{\gamma} \frac{1}{\frac{(bz^2+2az+b)^2}{4z}} dz \\ &= \frac{4}{b^2 i} \oint_{\gamma} \frac{z}{\left(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1 \right)^2} dz \\ &= \frac{4}{b^2 i} \oint_{\gamma} \frac{z}{(z - z_-)^2 (z - z_+)^2} dz \\ &= \frac{4}{b^2 i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{res}_f(z_+), \end{aligned}$$

⁵⁶De fato, como $a/b > 1$, temos $z_- < -1$ (trivial!) e $-1 < z_+ < 0$, pois:

· $-(a/b) + \sqrt{(a/b)^2 - 1} \geq 0 \implies (a/b)^2 - 1 \geq (a/b)^2 \implies -1 \geq 0!$
 · $-(a/b) + \sqrt{(a/b)^2 - 1} \leq -1 \implies \sqrt{(a/b)^2 - 1} \leq (a/b) - 1 \implies (a/b)^2 - 1 \leq (a/b)^2 - 2(a/b) + 1 \implies a \leq b!$

⁵⁷Esse é o exercício 29.(b) da seção 2.6.

onde z_{\pm} são dados como no exemplo anterior, e

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(z_+) &= \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z - z_-)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{(z - z_-)^2 - 2z(z - z_-)}{(z - z_-)^4} \\ &= \frac{(z_+ - z_-)^2 - 2z_+(z_+ - z_-)}{(z_+ - z_-)^4} \\ &= -\frac{(z_+ + z_-)}{(z_+ - z_-)^3} \\ &= \frac{ab^2}{4(a^2 - b^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

2.5.2 Integrais reais impróprias de funções $f(x)$ racionais

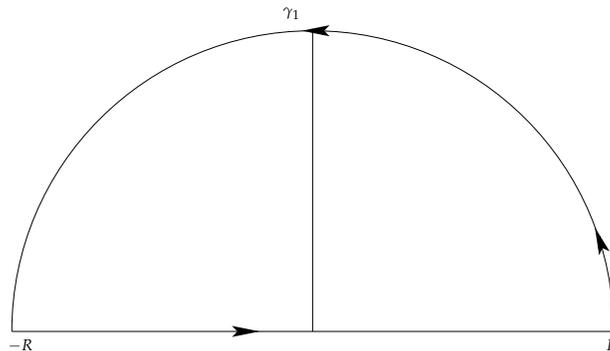
Pelo cálculo de funções $f(x)$ reais de uma variável x real,⁵⁸ temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^0 f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx, \end{aligned}$$

caso esses limites existam.⁵⁹

Primeiro tipo: $f(x)$ não tem polos reais e tem denominador não nulo e de grau no mínimo duas unidades maior do que o grau do numerador

Figura 2.21: $\gamma = \gamma_1 \cup [-R, R]$



Caso $f(x)$ seja a restrição da função complexa $f(z)$ em $[-R, R]$, considere a integral complexa

$$\oint_{\gamma} f(z) dz$$

⁵⁸Cálculo 1 na UFPR.

⁵⁹Nessa subseção, R denota uma variável real.

tal que $\gamma = \gamma_1 \cup [-R, R]$, onde γ_1 é a semicircunferência superior de centro na origem e raio R , conforme a figura 2.21. Por ser racional, $f(z)$ tem n polos, digamos, z_1, \dots, z_n , no semi-plano superior. Assim, caso R seja suficientemente grande, γ é a fronteira de uma região que contém todos esses polos. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx &= \oint_{\gamma} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{res}_f(z_i). \end{aligned}$$

Demonstra-se que a integral ao longo de γ_1 é zero para $R \rightarrow \infty$.⁶⁰ Consequentemente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{res}_f(z_i).$$

Exemplos

- $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.⁶¹

De fato:

- $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ tem 4 polos simples em $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$, $z_3 = e^{-3\pi i/4}$ e $z_4 = e^{-\pi i/4}$,⁶²
- z_i está no i -ésimo quadrante, $i = 1, 2, 3, 4$, na interseção da bissetriz (desse quadrante) com a circunferência de centro na origem e raio 1;
- Como $\text{res}_f(z_1) = -\frac{1}{4}e^{\pi i/4}$ e $\text{res}_f(z_2) = \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= 2\pi i \left(\frac{-e^{\pi i/4} + e^{-\pi i/4}}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

- Finalmente, note que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx = -\frac{\pi}{27}$.⁶³

De fato:

- $f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+13)^2}$ tem dois polos de ordem dois em $z_{\pm} = -2 \pm 3i$;
- Apenas z_+ está no semi-plano superior;

⁶⁰Como $|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^2}$, onde c é uma constante positiva, basta aplicarmos a observação 12 para $|z| = R \rightarrow \infty$.

⁶¹Exercício 30.(a) da seção 2.6.

⁶² $re^{i\theta} \neq 0$ tem n raízes n -ésimas distintas dadas por $r^{\frac{1}{n}}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

⁶³Exercício 30.(b) da seção 2.6.

· Como

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(z_+) &= \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z - z_-)^2} \right) \\ &= \frac{(z_+ - z_-)^2 - 2z_+(z_+ - z_-)}{(z_+ - z_-)^4} \\ &= \frac{z_+ - z_- - 2z_+}{(z_+ - z_-)^3} \\ &= -\frac{z_+ + z_-}{(z_+ - z_-)^3} \\ &= -\frac{4}{6^3 i} \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx &= 2\pi i \left(-\frac{2^2}{2^3 3^3 i} \right) \\ &= -\frac{\pi}{27}. \end{aligned}$$

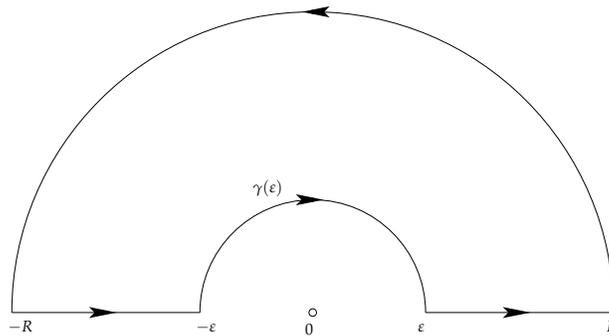
Segundo tipo: A origem é um polo simples e o único polo de $f(x)$

Caso a origem seja um polo simples de uma função $g(z)$, obtida de $f(x)$ como no caso do exemplo vindouro, demonstra-se que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} g(z) dz \\ &= \pi i \operatorname{res}_g(0), \end{aligned} \tag{2.27}$$

onde $\gamma(\varepsilon)$ é a semicircunferência superior de raio (suficientemente pequeno) ε e centro na origem, percorrida na direção do argumento crescente, conforme a figura 2.22.

Figura 2.22: A integral ao longo dessa curva fechada é zero, por Cauchy-Goursat. Além disso, como no primeiro tipo supracitado, a integral ao longo da semicircunferência de raio R é zero



Exemplo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi, \text{ pois, como } \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{e^{ix} - \cos x}{ix} \text{ e, para } 0 < \varepsilon < R, \frac{\cos x}{x} \text{ é uma função}$$

ímpar no intervalo $[-R, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, R]$,⁶⁴ temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx &= \frac{1}{i} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \right) \\ &= \frac{1}{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dz \quad (\text{Cf. a legenda da fig. 2.22}) \\ &= \pi \operatorname{res}_{e^{iz}/z}(0) \quad (\text{via 2.27}) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

⁶⁴Como $\varphi(x) = \frac{\cos x}{x}$ é ímpar no intervalo supracitado, ou seja,

$$\varphi(x) = -\varphi(-x)$$

para cada $x \neq 0$ pertencente ao intervalo $[-R, R]$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-\varepsilon} \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon}^R \varphi(x) dx &= - \int_R^{\varepsilon} \varphi(-u) du + \int_{\varepsilon}^R \varphi(x) dx \quad (\text{pela mudança de variáveis } x = -u) \\ &= \int_{\varepsilon}^R \varphi(-u) du + \int_{\varepsilon}^R \varphi(x) dx \\ &= - \int_{\varepsilon}^R \varphi(u) du + \int_{\varepsilon}^R \varphi(x) dx \quad (\varphi \text{ é ímpar}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2.6 Exercícios e algumas resoluções/sugestões

2.6.1 Operações elementares dos números complexos

1. Escreva cada um dos seguintes números complexos na forma cartesiana $x + iy$:

$$(a) \frac{1}{i} \qquad (e) i^{4n+3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(b) \frac{4+i}{6-3i} \qquad (f) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$$

$$(c) \left(\frac{i-1}{2i+6}\right)^3 \qquad (g) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$$

$$(d) (2i-4)^2$$

Sugestão para (a), (b) e (c):

$$\begin{aligned} \frac{x+iy}{u+iw} &= \frac{x+iy}{u+iw} \cdot 1 \\ &= \frac{x+iy}{u+iw} \cdot \frac{u-iw}{u-iw} \\ &= \frac{xu+yw+i(yu-xw)}{u^2+w^2}. \end{aligned}$$

Sugestão para (f) e (g):

A n -ésima potência de $z = re^{i\theta}$ é dada por $z^n = r^n e^{in\theta}$.⁶⁵

2. Obtenha a parte real e a parte imaginária de:

$$(a) z = (i+1)^2(i-1) \qquad (d) w = \frac{z}{z^2+1};$$

$$(b) z = \frac{i+1}{i-1} \qquad (e) w = \frac{z^2}{z-1};$$

$$(c) z = \frac{i^2}{i^3-4i+6} \qquad (f) w = z^4+2z+6.$$

Resolução

(a)

$$\begin{aligned} z &= (i+1)(i+1)(i-1) \\ &= (i+1)(i^2-1) \\ &= -2(1+i) \end{aligned}$$

↓

$$\Re(z) = \Im(z) = -2;$$

⁶⁵Cf. p. 10.

(b)

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{i+1}{i-1} \cdot \frac{i+1}{i-1} \\
 &= \frac{(i+1)^2}{2} \\
 &= -\frac{i^2 + 2i + 1}{2} = -i \\
 &\quad \Downarrow \\
 \Re(z) &= 0 \text{ e } \Im(z) = -1;
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 \frac{-1}{-i-4i+6} &= -\frac{1}{-5i+6} \\
 &= -\frac{1}{6-5i} \cdot \frac{6+5i}{6+5i} \\
 &= -\frac{6+5i}{61} \\
 &\quad \Downarrow \\
 \Re(z) &= -\frac{6}{61} \text{ e } \Im(z) = -\frac{5}{61};
 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{z}{z^2+1} \cdot \frac{\overline{z^2+1}}{z^2+1} \\
 &= \frac{z(\bar{z}^2+1)}{|z^2+1|^2} \\
 &= \frac{(|z|^2\bar{z}+z)}{|z^2+1|^2} \\
 &\quad \Downarrow
 \end{aligned}$$

$$\Re(w) = \frac{(|z|^2\Re(\bar{z}) + \Re(z))}{|z^2+1|^2} \underbrace{\Re(z) = \Re(\bar{z})}_{=} \frac{|z|^2+1}{|z^2+1|^2} \Re(z)$$

e

$$\Im(w) = \frac{(|z|^2\Im(\bar{z}) + \Im(z))}{|z^2+1|^2} \underbrace{\Im(z) = -\Im(\bar{z})}_{=} -\frac{|z|^2-1}{|z^2+1|^2} \Im(z);$$

(e) Ao utilizarmos a técnica de *completamento de quadrados* no numerador, temos

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{z^2 - 2z + 1 + 2z - 1}{z-1} \\
 &= \frac{(z-1)^2}{z-1} + \frac{2z}{z-1} - \frac{1}{z-1} \\
 &= z-1 + 2 \cdot \frac{z}{z-1} \cdot \frac{\overline{z-1}}{z-1} - \frac{1}{z-1} \cdot \frac{\overline{z-1}}{z-1} \\
 &= z-1 + 2 \cdot \frac{|z|^2 - z}{|z-1|^2} - \frac{\bar{z}-1}{|z-1|^2}
 \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned}\Re(w) &= \Re(z) - 1 + \frac{2|z|^2}{|z-1|^2} - \frac{2\Re(z)}{|z-1|^2} - \frac{\Re(\bar{z})}{|z-1|^2} + \frac{1}{|z-1|^2} \\ &= -1 + \frac{2|z|^2+1}{|z-1|^2} + \left(1 - \frac{3}{|z-1|^2}\right) \Re(z)\end{aligned}$$

e

$$\Im(w) = \left(1 - \frac{1}{|z-1|^2}\right) \Im(z).$$

(f) Claramente,

$$\Re(w) = \Re(z^4) + 2\Re(z) + 6 \text{ e } \Im(w) = \Im(z^4) + 2\Im(z).$$

3. Determine o módulo de:

(a) $(2 - i)^2 \cdot (4 + 6i)$

(d) $\frac{i+2}{i-2}$

(b) $\frac{3-i}{(6+2i)^3}$

(e) $(i+1) \cdot (i+2) \cdot (i+3)$

(c) $(\sqrt{3} + i) \cdot (\sqrt{3} - i)$

Sugestão:

Lembre-se que o módulo do produto é igual ao produto dos módulos!

4. Para $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrários, verifique que:

(a) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$;

(b) $\Re(z\bar{w}) = \Re(\bar{z}w)$;

(c) $z\bar{w} + \bar{z}w = 2\Re(z\bar{w})$;

(d) $|1 \pm z|^2 = 1 \pm 2\Re(z) + |z|^2$;

(e) $|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2$;

(f) $1 - \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\bar{z}w|^2}$.

ResoluçãoPara (a), multiplique $(z/w)^{-1}$ em ambos os membros da igualdade resultante de

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} \cdot \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \left|\frac{z}{w}\right|^2 \\ &= \frac{|z|^2}{|w|^2} \\ &= \frac{z \cdot \bar{z}}{w \cdot \bar{w}} \\ &= \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{w}};\end{aligned}$$

(b) e (c) seguem de

$$\begin{aligned}\Re(z\bar{w}) &= \frac{z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}}{2} \\ &= \frac{\bar{z}w + \overline{\bar{z}w}}{2} \\ &= \Re(\bar{z}w);\end{aligned}$$

(d) e (e) seguem de

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) \quad \text{e} \quad |z - w|^2 = (z - w)(\overline{z - w}),^{66}$$

juntamente com o item (c) desse exercício;
(f) segue de

$$\begin{aligned}1 - \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|^2 &= 1 - \frac{|z - w|^2}{|1 - z\bar{w}|^2} \\ &= 1 - \frac{|z|^2 - 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2}{1 - 2\Re(z\bar{w}) + |z\bar{w}|^2} \\ &= \frac{1 - 2\Re(z\bar{w}) + |z\bar{w}|^2 - |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) - |w|^2}{|1 - z\bar{w}|^2} \\ &= \frac{1 + |z|^2|\bar{w}|^2 - |z|^2 - |w|^2}{|1 - z\bar{w}|^2} \\ &= \frac{1 - |z|^2 - |w|^2 + |z|^2|w|^2}{|1 - z\bar{w}|^2},\end{aligned}$$

onde aplicamos os itens (d) e (e) (desse exercício) na segunda igualdade, de cima para baixo.

5. Obtenha todas as raízes, na forma polar,⁶⁷ dos seguintes polinômios complexos:

- (a) $z^2 + z + 1 = 0$;
- (b) $w^2 + 2w + \mathbf{i} = 0$;
- (c) $z^2 - 1 = 0$ (isto é, achar as duas raízes quadradas de 1);
- (d) $w^4 + 1 = 0$ (isto é, achar as quatro raízes quartas de -1).

Resolução

Note que, pelo *teorema fundamental da álgebra*, qualquer polinômio (não constante) de grau n têm n raízes complexas. Assim, os polinômios dos itens (a), (b) e (c) têm duas raízes e o do item (d) tem quatro. Aqui, resolveremos (apenas) os itens (a) e (b).⁶⁸

⁶⁶Inclusive para $w = 1$!

⁶⁷Cf. (2.7), p. 10.

⁶⁸As resoluções dos itens (c) e (d) ficam a cargo do leitor.

(a) Pela fórmula de Bhaskara,

$$\begin{aligned} z &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{-1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= e^{\pm \frac{2\pi i}{3}}, \end{aligned}$$

por (2.7).⁶⁹

(b) Como a equação pode ser reescrita na forma

$$w^2 + 2w(1) + 1 = -i + 1,$$

ou seja,

$$(w + 1)^2 = 1 - i,$$

se $z = w + 1$, temos

$$z^2 = 1 - i.$$

Conseqüentemente, pela segunda sugestão do primeiro exercício dessa seção, temos

$$r^2 e^{2\theta i} = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

Assim,

$$r^2 = 2^{1/2} \text{ e } 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k = 0, 1,$$

isto é,

$$r = 2^{1/4} \text{ e } \theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k = 0, 1.$$

Portanto,

$$w \in \left\{ -1 + 2^{1/4} e^{-\frac{\pi i}{8}}, -1 + 2^{1/4} e^{\frac{7\pi i}{8}} \right\}.$$

6. Escreva, em notação real, ou seja, na forma

$$u(x, y) + iv(x, y),$$

os polinômios complexos (nas variáveis z e \bar{z}) dos itens seguintes:

(a) $F(z, \bar{z}) = z^3 - \bar{z}^2;$

(b) $F(z, \bar{z}) = \bar{z}^4;$

(c) $F(z, \bar{z}) = z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2.$

Sugestão: Considere $(z + \bar{z})^2$.

⁶⁹Cf. p. 10.

7. Escreva os seguintes polinômios (dados em notação real) como polinômios em z e \bar{z} :⁷⁰

(a) $F(x, y) = (x - y^2) + \mathbf{i}(y^2 + x)$;

(b) $F(x, y) = (x^2 - y^2) + \mathbf{i}(2xy)$;

Resposta: z^2 .

(c) $F(x, y) = (x^3 - 3xy^2) + \mathbf{i}(-3x^2y + y^3)$.

Resposta: \bar{z}^3 .

Sugestão: Para $z = x + \mathbf{i}y$, temos $\bar{z} = x - \mathbf{i}y$, $z + \bar{z} = 2x$ e $z - \bar{z} = 2\mathbf{i}y$, em outras palavras,

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ e } y = \frac{z - \bar{z}}{2\mathbf{i}}. \quad (2.28)$$

Contudo, nos itens (b) e (c), ao invés de substituirmos (2.28) nos polinômios (dados em notação real) e fazermos “um monte de conta”, podemos identificar o *binômio de Newton*, ou seja, as expressões

$$(x + \mathbf{i}y)^2 = x^2 + 2x(\mathbf{i}y) + (\mathbf{i}y)^2$$

e

$$\begin{aligned} (x - \mathbf{i}y)^3 &= (x + (-\mathbf{i}y))^3 \\ &= x^3 + 3x^2(-\mathbf{i}y) + 3x(-\mathbf{i}y)^2 + (-\mathbf{i}y)^3, \end{aligned}$$

nos polinômios supracitados.

2.6.2 Derivadas

8. Caso a parte real $P(x, y)$ e a parte imaginária $Q(x, y)$ de $f(z)$, dada em (2.1),⁷¹ sejam diferenciáveis, podemos definir a *diferencial total*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (2.29)$$

Em particular, $z = x + \mathbf{i}y$ e $\bar{z} = x - \mathbf{i}y$ acarretam

$$dz = dx + \mathbf{i}dy \quad \text{e} \quad d\bar{z} = dx - \mathbf{i}dy. \quad (2.30)$$

Consequentemente,

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \quad \text{e} \quad dy = \frac{1}{2\mathbf{i}}(dz - d\bar{z}). \quad (2.31)$$

Assim, ao substituirmos (2.31) em (2.29), temos

$$df = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}. \quad (2.32)$$

⁷⁰Os termos de polinômios nas variáveis z e \bar{z} são escritos da forma

$$az^m \bar{z}^n,$$

onde o coeficiente a é complexo e os índices m e n são inteiros não negativos.

⁷¹Cf. p. 8.

Portanto, podemos utilizar as notações

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.33)$$

para representarmos (2.32) por

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \quad (2.34)$$

Pelas notações supracitadas, verifique a validade das seguintes identidades:

- (a) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z\bar{z}) = \bar{z}$ e $\frac{\partial}{\partial z}(z\bar{z}) = z$;
- (b) $\frac{\partial}{\partial z}(4\bar{z}^2 - z^3) = -3z^2$;
- (c) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{z}^2 + z^2\bar{z}^3) = 2\bar{z} + 3z^2\bar{z}^2$;
- (d) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(x^2 - y) = x + \frac{\mathbf{i}}{2}$;
- (e) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(x + y) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i})$.

Resolução

Aqui, $z = x + \mathbf{i}y$, ou seja, $\bar{z} = x - \mathbf{i}y$. Além disso, resolveremos apenas os itens 1 e 2, pois os cálculos a serem utilizados podem ser aplicados aos demais itens.

- (a) Verificaremos apenas a primeira identidade, pois a verificação da segunda é análoga. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(z\bar{z}) &= \frac{\partial}{\partial z}(|z|^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) \right) \\ &= \frac{1}{2}(2x - 2y\mathbf{i}) \\ &= x - \mathbf{i}y \\ &= \bar{z}. \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(4\bar{z}^2 - z^3) &= \frac{\partial}{\partial z}(4(x - \mathbf{i}y)^2 - (x + \mathbf{i}y)^3) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}(4(x - \mathbf{i}y)^2 - (x + \mathbf{i}y)^3) - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y}(4(x - \mathbf{i}y)^2 - (x + \mathbf{i}y)^3) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((8(x - \mathbf{i}y)(1) - 3(x + \mathbf{i}y)^2(1)) - \mathbf{i}(8(x - \mathbf{i}y)(-\mathbf{i}) - 3(x + \mathbf{i}y)^2(\mathbf{i})) \right) \\ &= \frac{1}{2}(8(x - \mathbf{i}y) - 3(x + \mathbf{i}y)^2 - 8(x - \mathbf{i}y) - 3(x + \mathbf{i}y)^2) \\ &= \frac{1}{2}(0 - 6(x + \mathbf{i}y)^2) \\ &= -3z^2, \end{aligned}$$

onde utilizamos a *regra da cadeia* na terceira igualdade, de cima para baixo.

9. Para $f(z) = \mathbf{i}Q(x, y)$,⁷² obtenha $\frac{\partial}{\partial z}f(z)$, $\overline{\frac{\partial}{\partial z}f(z)}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f(z)$. Conclua que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f(z) = \overline{\frac{\partial}{\partial z}f(z)}.$$

10. Demonstre que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \Delta, \end{aligned}$$

onde

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (2.35)$$

é o operador laplaciano.

11. Demonstra-se que $f(z)$ é holomorfa em $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0$ se, e somente se, $f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) e, nesse caso,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

em z_0 ,⁷³ ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

em z_0 , por (2.33). Portanto, uma condição necessária e suficiente para que $f(z)$ seja holomorfa é a seguinte: o coeficiente de $d\bar{z}$ deve nulo em (2.34), isto é, df deve ser proporcional a dz , onde $f'(z)$ é o coeficiente de proporcionalidade.

Como exercício, determine que condições as constantes reais a, b, c e d devem satisfazer para que a função

$$f(z) = ax + by + \mathbf{i}(cx + dy)$$

seja holomorfa.

12. Caso $f(z) = P(x, y) + \mathbf{i}Q(x, y)$ seja uma função holomorfa e $P(x, y)$ seja constante, mostre que $f(z)$ é constante.

Sugestão: Use as condições de Cauchy-Riemann supracitadas.

13. Determine uma função $f(z)$ tal que $\Re(f(z)) = x^2 + 2x - y^2 + 1$.

Resolução

$P(x, y) = x^2 + 2x - y^2 + 1$ é harmônica.⁷⁴ Agora, suponha que existe $Q(x, y)$ tal que

⁷²Note que $\overline{f(z)} = -\mathbf{i}Q(x, y)$.

⁷³Essa condição é equivalente às condições de Cauchy-Riemann, isto é, (2.2) da página 8.

⁷⁴Uma função é harmônica quando o seu operador laplaciano é nulo, ou seja, $\Delta = 0$, conforme definido em (2.35). Demonstra-se que, se uma função é holomorfa, então ela é harmônica, pelas condições de Cauchy-Riemann supracitadas.

$f = P + iQ$ seja holomorfa em todo \mathbb{C} . Assim, pelas condições de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} = 2y.$$

Portanto,

$$Q(x, y) = 2xy + h(y).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial y} &= 2x + h'(y) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} \\ &= 2x + 2.\end{aligned}$$

Logo, como $h'(y) = 2$, temos $h(y) = 2y$. Assim,

$$Q(x, y) = 2xy + 2y.$$

Portanto,

$$f(z) = P + iQ = x^2 + 2x - y^2 + 1 + i(2xy + 2y).$$

14. Encontre a função f tal que $\Re(f(z)) = x^3 - 3xy^2$ (ou explique porque essa função não existe).

2.6.3 Integrais

15. Seja γ a circunferência unitária parametrizada por $z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$, onde $t \in [0, 2\pi]$.

- (a) Por (2.16),⁷⁵ calcule a integral

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz;$$

- (b) Por (2.12) (da observação 9) e pelo item (a) supracitado, deduza que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} (\cos(\sin t) + i \sin(\sin t)) dt = 2\pi.$$

- (c) Por que podemos concluir que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt = 2\pi \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t) dt = 0?$$

16. Calcule as seguintes integrais complexas:

- (a) $\oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz$, onde γ é a circunferência unitária centrada em $(0, 0)$ com orientação anti-horária

Resposta: $2\pi i$;⁷⁶

⁷⁵Cf. p. 23.

⁷⁶Cf. (2.14), p. 21.

- (b) $\oint_{\gamma} \bar{z} + z^2 \bar{z} dz$, onde γ é o quadrado unitário centrado em $(0,0)$ com orientação anti-horária;⁷⁷
- (c) $\oint_{\gamma} \frac{\bar{z}}{8+z} dz$, onde γ é o retângulo com vértices $\pm 3 \pm i$ com orientação anti-horária;⁷⁸
- (d) $\oint_{\gamma} \frac{\xi^2}{\xi-1} d\xi$, onde γ é a circunferência centrada em $(0,0)$ e raio 3 com orientação anti-horária
Resposta: $2\pi i$;⁷⁹
- (e) $\oint_{\gamma} \frac{\xi(\xi-3)}{(\xi+i)(\xi-8)} d\xi$, onde γ é a circunferência centrada em $2+i$ e raio 3, com orientação anti-horária
Resposta: $2\pi i \left(\frac{-1+3i}{-8-i} \right)$;⁸⁰
- (f) $\oint_{\gamma} \xi(\xi+4) d\xi$, onde γ é a circunferência centrada em 0 e raio 2, com orientação anti-horária;
Resposta: 0;⁸¹
- (g) $\oint_{\gamma} \bar{\xi} d\xi$, onde γ é a circunferência unitária centrada em 0, com orientação anti-horária
Resposta: $2\pi i$.⁸²

Sugestão para os itens (b), (c) e (g): A função $f(z) = \bar{z}$ não é holomorfa (em $z, \forall z \in \mathbb{C}$), conforme o segundo exemplo da subseção 2.2.2.

⁷⁷Sugestão: Pela sugestão dada no final desse exercício, resta calcularmos essa integral de linha pela definição (2.12), página 16. Assim, considere uma decomposição do quadrado γ pelos seus lados, ou seja,

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4, \quad (2.36)$$

parametrizados por:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : z_1(t) &= t - i, \\ \gamma_2 : z_2(t) &= 1 + ti, \\ \gamma_3 : z_3(t) &= -t + i, \\ \gamma_4 : z_4(t) &= -1 - ti, \end{aligned}$$

onde t varia em $[-1, 1]$. Para cada $z \in \gamma$, considere

$$f(z) = (1 + z^2) \bar{z}.$$

⁷⁸Resolução análoga a do item (b) desse exercício. Nesse caso, o retângulo supracitado é decomposto como em (2.36), onde seus lados são parametrizados por:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : z_1(t) &= 3t - i, \\ \gamma_2 : z_2(t) &= 3 + ti, \\ \gamma_3 : z_3(t) &= -3t + i, \\ \gamma_4 : z_4(t) &= -3 - ti, \end{aligned}$$

para cada $t \in [-1, 1]$.

⁷⁹Cf. (2.16), p. 23.

⁸⁰Idem.

⁸¹Cf. (2.13), p. 21.

⁸²Pela sugestão que acompanha essa questão, resta calcularmos essa integral de linha pela definição (2.12), página 16. Aqui, para cada ξ pertencente à circunferência supracitada, parametrizada por

$$[0, 2\pi] \ni t \mapsto \xi(t) = e^{it},$$

considere $f(\xi) = \bar{\xi}$.

17. Calcule

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{(\zeta - 1)(\zeta - 2i)} d\zeta,$$

onde $\gamma = \partial D(0, 4)$.

Resolução

Como 1 e $2i$ são pontos interiores à região delimitada por γ , não podemos utilizar o teorema de Cauchy-Goursat,⁸³ nem a fórmula integral de Cauchy.⁸⁴ Por outro lado, via frações parciais, temos

$$\frac{1}{(\zeta - 1)(\zeta - 2i)} = \frac{1}{1 - 2i} \left(\frac{1}{\zeta - 1} - \frac{1}{\zeta - 2i} \right).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{(\zeta - 1)(\zeta - 2i)} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{1 - 2i} \left(\oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - 1} d\zeta - \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - 2i} d\zeta \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{1 - 2i} (2\pi i - 2\pi i) \right], \end{aligned}$$

pela fórmula integral de Cauchy (supracitada). Portanto, a integral do enunciado desse exercício é nula.

18. Calcule

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\zeta^2 + \zeta}{(\zeta - 2i)(\zeta + 3)} d\zeta,$$

onde $\gamma = \partial D(1, 5)$.⁸⁵

19. Caso γ seja a poligonal fechada da figura 2.23, com orientação anti-horária, calcule a integral

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 2z} dz.$$
⁸⁶

20. Considere $D \subset \mathbb{C}$ aberto, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e que γ é uma curva fechada (percorrida no sentido anti-horário) contida em D . Caso z_0 seja um ponto interior da região R limitada por γ (que está orientada positivamente em relação a R), demonstre a igualdade

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} \oint_{\gamma} \frac{f^{(n)}(z)}{z - z_0} dz, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sugestão: Utilize a equação (2.15) no primeiro membro dessa igualdade.⁸⁷ No segundo membro dela, considere $g(z) = f^{(n)}(z)$ e utilize (2.16).⁸⁸

⁸³Cf. (2.13), p. 21.

⁸⁴Cf. (2.16), p. 23.

⁸⁵Uma resolução é dada no sexto exemplo que segue a observação 18.

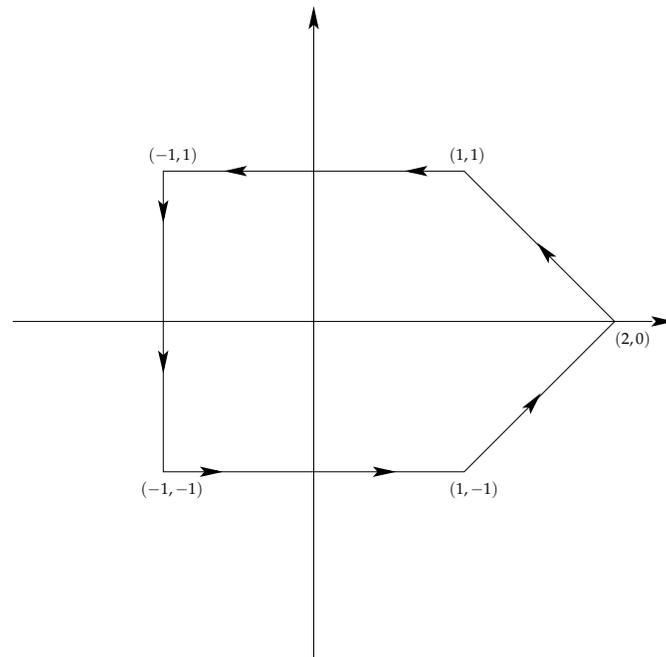
⁸⁶Note que $z^2 + 2z = z(z + 2)$.

Para duas resoluções distintas, confira o quarto exemplo que segue a observação 18.

⁸⁷Cf. p. 23.

⁸⁸Idem.

Figura 2.23: A curva é dada por uma poligonal fechada



21. Seja $\gamma = \partial D(0,1)$.

(a) Via (2.15),⁸⁹ calcule

$$\oint_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}, \quad n \in \mathbb{N};$$

(b) Pelo item (a) dessa questão e pela observação 9,⁹⁰ deduzo o valor da integral

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \sen^{2n} t dt;$$

(c) Obtenha os valores de

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} t dt \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \sen^{2n+1} t dt.$$

Resolução

Por um lado,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} &= \oint_{\gamma} \frac{(z^2 + 1)^{2n}}{z^{2n+1}} dz \\ &= \frac{2\pi i}{(2n)!} f^{(2n)}(0), \end{aligned}$$

⁸⁹Cf. p. 23.

⁹⁰Cf. p. 16.

onde $f(z) = (z^2 + 1)^{2n}$. Por outro,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} (e^{it} + e^{-it})^{2n} e^{-it} i e^{it} dt \\ &= 2^{2n} i \int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt = \frac{\pi}{((2n)!) 2^{2n-1}} f^{(2n)}(0).$$

Analogamente, por um lado,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \left(z - \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} &= \oint_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^{2n}}{z^{2n+1}} dz \\ &= \frac{2\pi i}{(2n)!} g^{(2n)}(0), \end{aligned}$$

onde $g(z) = (z^2 - 1)^{2n}$. Por outro,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \left(z - \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} (e^{it} - e^{-it})^{2n} e^{-it} i e^{it} dt \\ &= 2^{2n} i^{2n} i \int_0^{2\pi} \sin^{2n} t dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n} t dt = \frac{(-1)^n \pi}{((2n)!) 2^{2n-1}} g^{(2n)}(0).$$

O item (c) segue de modo análogo, trocando-se $2n$ por $2n + 1$.

2.6.4 Séries de Taylor, séries de Laurent e resíduos

22. Determine o raio de convergência (ρ) de cada uma das seguintes séries:

- (a) $\sum_{k=3}^{\infty} k z^k$;
- (b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln k} (z + 1)^k$;
- (c) $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) z^k$, onde $p(k)$ é um polinômio;
- (d) $\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-k} z^k$.

23. Para cada uma das seguintes funções, obtenha a respectiva série de potências, com o ponto dado como centro, e o respectivo raio de convergência (ρ):

- (a) e^{-z} , 0;

Resposta: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$, $\rho = \infty$.⁹¹

⁹¹Sugestão: Confira o primeiro exemplo que segue a observação 28. Considere $-z$ no lugar de z .

(b) $\cos z, -\pi/2;$

Resposta: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(z + \frac{\pi}{2}\right)^{2n}, \rho = \infty.$ ⁹²

(c) $\cos^2 z, 0;$

Resposta: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}, \rho = \infty.$ ⁹³

24. Seja $f(z) = e^z/\operatorname{sen} z$, com $z \in D = \{x + iy : |x| < 1, |y| < 1\}$. Calcule a parte principal de $f(z)$. Resposta: $1/z.$ ⁹⁴

25. Calcule, no mínimo, os primeiros quatro termos da expansão de Laurent das funções dadas em torno dos pontos dados. Em cada caso, especifique o anel de convergência da expansão.

(a) $f(z) = \operatorname{csc} z$ em torno de $z_0 = 0;$ Resposta: $a_{-1} = 1, a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = 0, a_3 = \frac{7}{360}, a_4 = 0$ e $a_5 = \frac{31}{15120}; 0 < |z| < \pi$ (convergência).

(b) $f(z) = z/(z+1)^3$ em torno de $z_0 = -1;$ ⁹⁵

(c) $f(z) = z/[(z-1)(z-3)(z-5)]$ em torno de $z_0 = 1;$ ⁹⁶

(d) $f(z) = z/[(z-1)(z-3)(z-5)]$ em torno de $z_0 = 5;$ ⁹⁷

(e) $f(z) = \operatorname{csc} z$ em torno de $z_0 = \pi;$ Resposta: $a_{-1} = -1, a_0 = 0, a_1 = -\frac{1}{6}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{7}{360}, a_4 = 0$ e $a_5 = -\frac{31}{15120}; \pi < |z| < 2\pi$ (convergência).

(f) $f(z) = \operatorname{sec} z$ em torno de $z_0 = \pi/2.$ Resposta: $a_{-1} = -1, a_0 = 0, a_1 = -\frac{1}{6}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{7}{360}, a_4 = 0$ e $a_5 = -\frac{31}{15120}; \frac{\pi}{2} < |z| < \frac{3\pi}{2}$ (convergência).

(g) $f(z) = e^z/z^3$ em torno de $z_0 = 0.$ Resposta: $f(z) = \sum_{m=-3}^{\infty} \frac{z^m}{(m+3)!}$ para cada $z \in \mathbb{C}$ não nulo.

Sugestão para os itens (a) e (e): Como, pela observação 35,⁹⁸ temos

$$\begin{aligned} \operatorname{csc} z &= \frac{1}{\operatorname{sen} z} \\ &= \frac{1/g(z)}{z}, \end{aligned}$$

⁹²Sugestão: Considere

$$w = z + \frac{\pi}{2}. \quad (2.37)$$

Escreva a expansão de Taylor para

$$\cos w$$

em torno de $w_0 = 0$, como no segundo exemplo que segue a observação 28. Reescreva a expansão supracitada na variável z via (2.37).

⁹³Sugestão: Verifique que

$$\cos^2 z = \frac{1 + \cos(2z)}{2},$$

pelo segundo exemplo que segue a observação 3. Calcule a série de

$$\cos(2z)$$

pelo segundo exemplo que segue a observação 28, com $2z$ no lugar de z .

⁹⁴Exercício resolvido no segundo exemplo que segue a observação 37, p. 43.

⁹⁵Uma resolução é apresentada no quarto exemplo que segue a observação 31.

⁹⁶Uma resolução é apresentada no terceiro exemplo que segue a observação 31.

⁹⁷Sugestão: Confira a nota de rodapé do item (c) desse exercício e faça as adaptações devidas!

⁹⁸Cf. p. 40.

$z_0 = 0$ é um polo simples de $\csc z$.⁹⁹ Consequentemente, como

$$(\operatorname{sen} z)(\csc z) = 1$$

é equivalente à identidade

$$\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) \left(\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots\right) = 1,¹⁰⁰$$

temos a resposta supracitada e

$$\csc z = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + \frac{31z^5}{15120} + \dots$$

é a série de Laurent de $\csc z$ em torno de $z = 0$. Agora, se $\zeta = z - \pi$, então

$$\begin{aligned} \csc z &= -\csc(z - \pi) \\ &= -\csc \zeta \\ &= -\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta}{6} + \frac{7\zeta^3}{360} + \frac{31\zeta^5}{15120} + \dots\right) \\ &= -\frac{1}{z - \pi} - \frac{z - \pi}{6} - \frac{7(z - \pi)^3}{360} - \frac{31(z - \pi)^5}{15120} - \dots \end{aligned}$$

é a série de Laurent em torno de $z = \pi$.

Sugestão para o item (f): Utilize a expressão

$$\begin{aligned} \sec z &= \frac{1}{\cos z} \\ &= -\frac{1}{\operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= -\csc\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\csc \zeta, \end{aligned}$$

onde $\zeta = z - \frac{\pi}{2}$, e faça como no item (e) desse exercício.

Sugestão para o item (g): Pelo primeiro exemplo dado após a observação 28,¹⁰¹ temos, para cada $z \in \mathbb{C}$ não nulo,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-3}}{n!}.$$

26. A expansão de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

⁹⁹Cf. obs. 34, p. 39.

¹⁰⁰Confira o exemplo sobre a $\cot z$, dado logo após a observação 35.

¹⁰¹Essa observação encontra-se na página 32.

em torno de $z_0 = 0$ é da forma

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} z^k,$$

onde cada $B_k \in \mathbb{R}$ e é chamado *número de Bernoulli*. Calcule os primeiros três números de Bernoulli.

27. Calcule cada um dos seguintes resíduos:

(a) $\text{res}_f(2i), f(z) = \frac{z^2}{(z-2i)(z+3)}$. Resposta: $-\frac{4}{3+2i}$.

(b) $\text{res}_f(-3), f(z) = \frac{z^2+1}{(z+3)^2 z}$. Resposta: $\frac{8}{9}$.

(c) $\text{res}_f(i+1), f(z) = \frac{e^z}{(z-i-1)^3}$. Resposta: $\frac{e^{1+i}}{2}$.

(d) $\text{res}_f(2), f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$. Resposta: $\frac{2}{3}$.

(e) $\text{res}_f(-i), f(z) = \frac{\cot z}{z^2(z+i)^2}$. Resposta: $-\csc^2(-i) + 2i \cot(-i)$.

(f) $\text{res}_f(0), f(z) = \frac{\cot z}{z(z+1)}$. Resposta: -1 .

Sugestão: $\cot z = z^{-1}h(z)$ com $h(z) = 1 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 + \dots$,¹⁰² $f(z) = \frac{h(z)}{z^2}$.

(g) $\text{res}_f(0), f(z) = \frac{\text{sen } z}{z^3(z-2)(z+1)}$.¹⁰³ Resposta: $1/4$.

(h) $\text{res}_f(\pi), f(z) = \frac{\cot z}{z^2(z+1)}$. Resposta: $\frac{1}{\pi^2(\pi+1)}$.

Sugestão: Primeiramente, note que, como

$$\cot z = \frac{\cos z}{\text{sen } z},$$

$z = \pi$ é uma singularidade isolada de $f(z)$. Portanto, podemos resolver (esse item) determinando o coeficiente de índice -1 da série de Laurent em torno de $z = \pi$ ou utilizando a fórmula da observação 37,¹⁰⁴ pois, para $\zeta = z - \pi$, temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cot(\zeta + \pi)}{(\zeta + \pi)^2((\zeta + \pi) + 1)} \\ &= \frac{\cot(\zeta)}{(\zeta + \pi)^2(\zeta + \pi + 1)} \\ &= \frac{h(\zeta)}{\zeta(\zeta + \pi)^2(\zeta + \pi + 1)} \\ &= \varphi(\zeta), \end{aligned}$$

onde h é dada na sugestão do item (f) desse exercício. Assim,

$$z \rightarrow \pi \iff \zeta \rightarrow 0$$

e

$$\text{res}_f(\pi) = \text{res}_\varphi(0).$$

¹⁰²Cf. pp. 40–42, da obs. 35 até a eq. (2.25).

¹⁰³Para duas resoluções, confira o segundo exemplo dado após a observação 36 e o primeiro exemplo dado após a observação 37.

¹⁰⁴Cf. p. 43.

28. Utilize resíduos para calcular cada uma das integrais seguintes:

(a) $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,5)} f(z) dz$, onde $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2i)}$. Resposta: $\frac{1}{1-2i} + \frac{2i}{1+2i}$.

(b) $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,2)} f(z) dz$, onde $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)\sin z}$. Resposta: $1 - 1/(e \sin 1)$.¹⁰⁵

(c) $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,8)} f(z) dz$, onde $f(z) = \frac{\cot z}{(z-6i)^2+64}$. Resposta: $\sum_{n=-2}^2 \frac{1}{(n\pi-6i)^2+64}$.

(d) $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$, onde $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)(z+2)}$ e γ é o triângulo com vértices $1 \pm i$ e -3 , orientado no sentido anti-horário. Resposta: $\frac{e^2-2e+1}{2e^2}$.¹⁰⁶

(e) $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$, onde $f(z) = \frac{e^z}{(z+3i)^2(z+3)^2(z+4)}$ e γ é o retângulo com vértices $2 \pm i$, $-8 \pm i$, orientado no sentido anti-horário. Resposta: $-\frac{2}{(-3+3i)^3e^3} + \frac{1}{(-4+3i)^2e^4}$.¹⁰⁷

(f) $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$, onde $f(z) = \frac{e^{iz}}{(\sin z)(\cos z)}$ e γ é o quadrilátero com vértices $\pm 5i$, ± 10 , orientado no sentido anti-horário.
Resposta incompleta:¹⁰⁸

$$\sum_{m=-3}^2 \operatorname{res}_f\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) + \sum_{n=-3}^3 \operatorname{res}_f(n\pi).$$

Sugestão para o item (c): Primeiramente, note que, como

$$\begin{aligned} (z-6i)^2+64 &= (z-6i)^2+8^2 \\ &= (z-6i+8)(z-6i-8) \\ &= (z+(8-6i))(z-(8+6i)), \end{aligned}$$

$z = 8 \pm 6i$ são singularidades isoladas de $f(z)$. Contudo, como $|8 \pm 6i| = 10$, essas singularidades não pertencem ao interior da região delimitada por $\partial D(0,8)$. Por outro lado, as outras singularidades isoladas de $f(z)$ (pertencentes ao interior da região supracitada) são dadas por

$$z = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2,$$

pois

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

¹⁰⁵Pela observação 35 (p. 40), $f(z) = \frac{e^z/g(z)}{z(z+1)}$.

¹⁰⁶0, -1 e -2 são polos simples de $f(z)$, pertencentes ao interior do triângulo supracitado.

¹⁰⁷Das singularidades isoladas de $f(z)$, $3i$ é a única que não pertence ao interior do retângulo supracitado, enquanto que -3 é um polo de ordem dois e -4 é um polo simples.

¹⁰⁸Os resíduos dos somatórios (dados na resposta) devem ser calculados. Por exemplo, na sugestão desse item, que logo apresentaremos, é determinado que $\operatorname{res}_f(0) = 1$.

Como, para $\zeta = z - n\pi$, temos, por (2.25),¹⁰⁹

$$\begin{aligned}\cot z &= \cot(z - n\pi) \\ &= \cot \zeta \\ &= \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{3}\zeta - \frac{1}{45}\zeta^3 - \dots \\ &= \frac{1}{\zeta} \left(1 - \frac{1}{3}\zeta^2 - \frac{1}{45}\zeta^4 - \dots \right) \\ &= \frac{1}{z - n\pi} \left(1 - \frac{1}{3}(z - n\pi)^2 - \frac{1}{45}(z - n\pi)^4 - \dots \right),\end{aligned}$$

essas outras singularidades são polos simples de $f(z)$.

Sugestão para o item (f): Como

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{2e^{iz}}{2 \operatorname{sen} z \cos z} \\ &= \frac{2e^{iz}}{\operatorname{sen}(2z)},\end{aligned}$$

as suas singularidades isoladas (pertencentes ao interior da região delimitada pelo quadrilátero supracitado) são determinadas via

$$2z \in \{0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi, \pm5\pi, \pm6\pi\},$$

ou seja,

$$z \in \left\{ 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm2\pi, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm3\pi \right\}.$$

Além disso, como

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2z) &= 2z - \frac{(2z)^3}{3!} + \frac{(2z)^5}{5!} - \dots \\ &= 2z \left(1 - \frac{4z^2}{3!} + \frac{16z^4}{5!} - \dots \right),\end{aligned}$$

temos, caso denotemos por $\phi(z)$ a série entre parênteses da última igualdade (de cima para baixo),

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\phi(z)}$$

e, portanto, 0 é um polo simples de $f(z)$ e

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_f(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz}}{\phi(z)} \\ &= \frac{e^0}{\phi(0)} \\ &= 1.\end{aligned}$$

¹⁰⁹Cf. p. 42.

Analogamente, todas as outras doze singularidades são polos simples de $f(z)$ e, assim, seus outros resíduos podem ser calculados, como fizemos na sugestão do item (c) desse exercício.

29. Calcule as seguintes integrais trigonométricas:

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b \cos \theta)}, \text{ com } a > b > 0. \quad \text{Resposta: } \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.^{110}$$

$$(b) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b \cos \theta)^2}, \text{ com } a > b > 0. \quad \text{Resposta: } \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}.^{111}$$

$$(c) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b \cos^2 \theta)^2}, \text{ com } a > b > 0. \quad \text{Resposta: } \frac{(2a+b)\pi a}{[a(a+b)]^{3/2}}.$$

$$(d) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a \cos \theta + a^2}, \text{ com } a \in \mathbb{C}, a \neq \pm 1. \quad \text{Resposta: } \frac{2\pi}{1-a^2} \text{ se } |a| < 1. \frac{2\pi}{a^2-1} \text{ se } |a| > 1.$$

$$(e) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta d\theta}{1-2a \cos \theta + a^2}, \text{ com } a \text{ complexo}, a \neq \pm 1. \quad \text{Resposta: } \frac{\pi(a^6+1)}{a^6(a^2-1)} \text{ se } |a| > 1. \frac{\pi(a^6+1)}{1-a^2} \text{ se } |a| < 1.$$

30. Utilize resíduos para calcular as seguintes integrais reais:

$$(a) \int_0^\infty \frac{1}{x^4+1} dx. \quad \text{Resposta: } \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.^{112}$$

$$(b) \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx. \quad \text{Resposta: } -\pi/27.^{113}$$

$$(c) \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx, a > 0. \quad \text{Resposta: } \pi/(4a).$$

$$(d) \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^n} dx, n \in \mathbb{N}. \quad \text{Resposta: } \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{2.4.6 \dots (2n-2)} \frac{\pi}{2}.$$

$$(e) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx, a > 0, b > 0. \quad \text{Resposta: } \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

$$(f) \int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1} dx. \quad \text{Resposta: } \pi\sqrt{2}/2.$$

$$(g) (1) \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^4+1} dx. \quad (2) \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx. \quad (3) \int_{-\infty}^\infty \frac{x^4}{1+x^{10}} dx.$$

$$(h) \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+1} dx.^{114}$$

$$(i) \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx, \text{ com } a \text{ e } b \text{ positivos.} \quad \text{Resposta: } \frac{\pi e^{-ab}}{2b}.$$

$$(j) \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2+b^2} dx, \text{ com } a \text{ e } b \text{ positivos.} \quad \text{Resposta: } \frac{\pi}{2} e^{-ab}.$$

$$(k) \int_{-\infty}^\infty \frac{x \cos x}{x^2-2x+10} dx. \quad \text{Resposta: } \frac{\pi}{3e^3} (\cos 1 - 3 \sin 1).$$

$$(l) \int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin x}{x^2-2x+10} dx. \quad \text{Resposta: } \frac{\pi}{3e^3} (3 \cos 1 + \sin 1).$$

31. Calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{itx}}{x} dx, t > 0. \quad \text{Resposta: } \pi i.^{115}$$

$$(b) \int_{-\infty}^\infty \frac{x \cos x}{x^2-5x+6} dx. \quad \text{Resposta: } \pi(2 \sin 2 - 3 \sin 3).$$

$$(c) \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)} dx. \quad \text{Resposta: } \frac{\pi}{5} (\cos 1 - \frac{1}{e^2}).$$

¹¹⁰Confira o segundo exemplo da subseção 2.5.1.

¹¹¹Confira o terceiro exemplo da subseção 2.5.1.

¹¹²Confira o primeiro exemplo da subseção 2.5.2.

¹¹³Confira o segundo exemplo da subseção 2.5.2.

¹¹⁴Note que $x \sin x$ é uma função par.

¹¹⁵Confira o último exemplo da seção 2.5.

Capítulo 3

Parte II - Séries e transformadas de Fourier

3.1 Série(s) de Fourier (SF)

Para uma revisão dos espaços vetoriais cujos vetores são funções e, em particular, dos produtos internos desses espaços, confira o capítulo 6 do meu livro de *álgebra linear*, na minha página acadêmica institucional.¹

Observação 40 (Funções periódicas) *Uma função f $2L$ -periódica é definida, para cada x pertencente a um intervalo real (ou uma união de intervalos reais) que contenha $x + 2L$, por*

$$f(x + 2L) = f(x).$$

Exemplo

Para cada inteiro n , as funções $\cos \frac{\pi nx}{L}$, $\sin \frac{\pi nx}{L}$ e $e^{i\pi nx/L}$ são $2L$ -periódicas.

Aviso importante

Caso nada seja dito em contrário, função, nesse capítulo, significa função $2L$ -periódica.

Observação 41 (Produto interno) *O produto interno das funções f_1 e f_2 é dado por*

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_1(x) \overline{f_2(x)} dx.$$

Exemplo

Para $L = \pi$, $f_1(x) = \sin x$ e $f_2(x) = \cos x$, temos

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = 0.^2$$

Observação 42 (Propriedades do produto interno) *Para o produto da observação 41, demonstre que:*

1. $\overline{\langle f_1, f_2 \rangle} = \langle f_2, f_1 \rangle$;
2. $\langle \text{cte}_1 f_1 + \text{cte}_2 f_2, f \rangle = \text{cte}_1 \langle f_1, f \rangle + \text{cte}_2 \langle f_2, f \rangle$;³

¹Cf. o endereço eletrônico na capa desse manual.

²Considere integração por partes.

³cte denota uma constante.

$$3. \langle f, \text{cte}_1 f_1 + \text{cte}_2 f_2 \rangle = \overline{\text{cte}_1} \langle f, f_1 \rangle + \overline{\text{cte}_2} \langle f, f_2 \rangle.$$

Observação 43 (Ortogonalidade) As funções f_1 e f_2 são ortogonais (entre si) quando

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 0.$$

Exemplos

1.

$$\begin{aligned} \langle e^{i\pi m x/L}, e^{i\pi n x/L} \rangle &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i\pi(m-n)x/L} dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2L} \left. \frac{L e^{i\pi(m-n)x/L}}{i\pi(m-n)} \right|_{-L}^L & = 0 \text{ se } m \neq n, \\ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L 1 dx & = 1 \text{ se } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Como $\text{sen } A \cos B = \frac{1}{2}[\text{sen}(A+B) + \text{sen}(A-B)]$, temos

$$\begin{aligned} \langle \text{sen} \frac{\pi m x}{L}, \cos \frac{\pi n x}{L} \rangle &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \text{sen} \frac{\pi m x}{L} \cos \frac{\pi n x}{L} dx \\ &= \frac{1}{4L} \left[\int_{-L}^L \text{sen} \frac{\pi(m+n)x}{L} dx + \int_{-L}^L \text{sen} \frac{\pi(m-n)x}{L} dx \right] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4L} \left[\frac{L}{\pi(m+n)} \int_{-\pi(m+n)}^{\pi(m+n)} \text{sen } u du + \frac{L}{\pi(m-n)} \int_{-\pi(m-n)}^{\pi(m-n)} \text{sen } v dv \right] \\ \quad \text{se } m \neq n, \\ \frac{1}{4L} \left[\int_{-L}^L \text{sen} \frac{2\pi m x}{L} dx + \int_{-L}^L \text{sen } 0 dx \right] \\ \quad \text{se } m = n \end{cases} \\ &= \frac{1}{4L} (0 + 0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois a função seno é ímpar no intervalo $[-L, L]$.⁴

Observação 44 (SF 2L-periódica) A SF 2L-periódica é dada por

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\pi m x/L}, \quad (3.1)$$

onde $c_m \in \mathbb{C}$, para cada inteiro m . Caso essa série convirja para a função $f(x)$, isto é,

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\pi m x/L},$$

temos

$$\begin{aligned} \langle f(x), e^{i\pi n x/L} \rangle &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\pi m x/L} \right) e^{-i\pi n x/L} dx \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \langle e^{i\pi m x/L}, e^{i\pi n x/L} \rangle. \end{aligned}$$

⁴Cf. o último exemplo da seção 2.5.

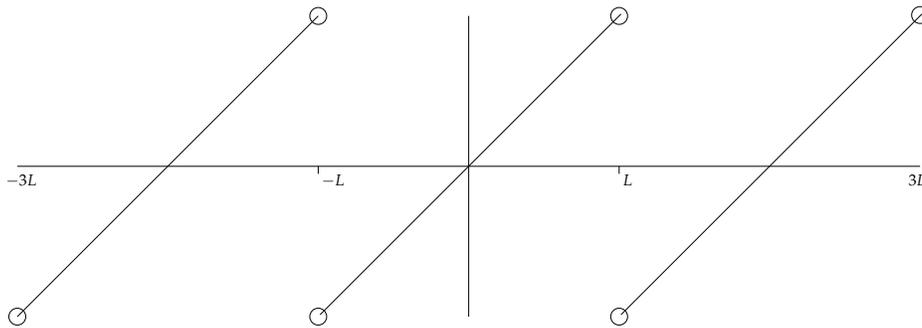
Consequentemente, para cada inteiro n , temos

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\pi nx/L} dx, \quad (3.2)$$

pelo exemplo 1 supracitado.

Exemplo Caso ψ seja $2L$ -periódica e, para cada $x \in (-L, L)$, $\psi(x) = x$, conforme a figura 3.1, temos

Figura 3.1: função ψ



$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x dx = 0$$

e, para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x e^{-i\pi nx/L} dx \\ &= \frac{1}{2L} \left(x \frac{-L}{i\pi n} e^{-i\pi nx/L} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{-L}{i\pi n} e^{-i\pi nx/L} dx \right) \\ &= \frac{-L}{i2\pi n} (-1)^n - \frac{L}{i2\pi n} (-1)^n - \frac{1}{2L} \left(\frac{L}{i\pi n} \right)^2 \int_{i\pi n}^{-i\pi n} e^u du \\ &= \frac{iL(-1)^n}{\pi n} - 0 \\ &= \frac{iL(-1)^n}{\pi n}. \end{aligned}$$

Observação 45 (De Laurent para Fourier) Caso $F(z)$ seja holomorfa em $D(0, \rho)$ e $0 \leq r < \rho$ esteja fixado, temos, pela observação 31 sobre a SL ,⁵

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

que, para

$$z = r e^{i\theta},$$

⁵Cf. p. 34.

pode ser reescrita na forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta},$$

com n -ésimo coeficiente dado por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,r)} \frac{F(w)}{w^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{F(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}} i r e^{i\theta} d\theta \\ &= r^{-n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right). \end{aligned}$$

Assim, caso θ seja uma variável real, $x = \theta - \pi$, $f(x) = F(re^{i(x+\pi)})$ e $c_n = (-1)^n a_n r^n$, temos uma SF 2π -periódica.⁶

Observação 46 (Teorema (de convergência) de Fourier) Em cada ponto x , a SF de uma função f , caso f seja diferenciável por partes,⁷ converge para a média $(f(x^+) + f(x^-))/2$ dos limites laterais de f e, assim, converge para $f(x)$, caso f seja contínua em x .⁸

Exemplo

Para a função ψ do exemplo anterior, a SF é dada por

$$\psi(x) = \frac{iL}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n} e^{i\pi n x/L}.$$

Por um lado, essa série tem soma zero em $x \in \{0, L\}$, pois, nesse caso, seu termo de índice n é cancelado com o de índice $-n$.⁹ Por outro lado, ψ é contínua em $x = 0$, com $\psi(0) = 0$, e descontínua em $x = L$, com limites $\psi(L^+) = -L$ e $\psi(L^-) = L$. Logo, esses valores estão em concordância com o estabelecido na observação 46.

Ainda nesse exemplo, note que, se $x = L/2$, então o termo de índice n , isto é,

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n} e^{i\pi n/2} &= \frac{(-1)^n}{n} (\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))^n \\ &= \frac{(-1)^n i^n}{n} \\ &= \frac{(-i)^n}{n}, \end{aligned}$$

cancela o termo de índice $-n$, caso $n \neq 0$ seja par, e iguala o termo de índice $-n$, caso n seja ímpar. Além disso, a soma dos termos de índices n e $-n$ alterna o sinal para $n = 2k + 1$,

⁶Cf. a observação 44, p. 74.

⁷Isto é, diferenciável em $[-L, L]$, exceto talvez num número finito de pontos.

⁸No lugar do sinal $=$, alguns matemáticos usam \sim entre $f(x)$ e a sua SF, pois o valor da SF de $f(x)$ num extremo (direito ou esquerdo) é dado pela média aritmética dos valores de $f(x)$ nos extremos (direito e esquerdo).

⁹De fato, a série em $x = 0$ é dada por $\sum_{n \neq 0} (-1)^n/n$ e, em $x = L$, devido à $e^{i\pi n} = \cos(\pi n) = (-1)^n$, por $\sum_{n \neq 0} 1/n$.

onde k representa um inteiro não negativo arbitrário. Portanto, como a SF em $x = L/2$ é dada por

$$\frac{2L}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$$

e, de acordo com a observação 46, converge para $\psi(L/2) = L/2$, temos a série

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Observação 47 (SF reais) Caso f seja uma função real, isto é, $\bar{f} = f$, temos $c_{-n} = \bar{c}_n$.¹⁰ Portanto, como podemos escrever $c_n = (a_n - ib_n)/2$ (para n inteiro), temos

$$\begin{aligned} \bar{c}_0 = c_0 &\implies c_0 \in \mathbb{R} \\ &\implies b_0 = 0 \end{aligned}$$

e, como $e^{-i\pi nx/L} = \cos \frac{\pi nx}{L} - i \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L}$, temos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{\pi nx}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$
¹¹

Por outro lado, por (3.1),¹² temos a soma dos termos de índices n e $-n$ (da SF) dada por

$$\begin{aligned} c_n e^{i\pi nx/L} + c_{-n} e^{-i\pi nx/L} &= a_n \frac{e^{i\pi nx/L} + e^{-i\pi nx/L}}{2} + b_n \frac{e^{i\pi nx/L} - e^{-i\pi nx/L}}{2i} \\ &= a_n \cos \frac{\pi nx}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L}. \end{aligned}$$

Logo, uma função f diferenciável por partes pode ser representada por sua SF real

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L}.$$

Observação 48 (Funções pares e ímpares) Além das funções ímpares supracitadas, temos as funções $y = f(x)$ pares, onde $f(-x) = f(x)$ para cada $x \in \operatorname{Dom}(f)$. Portanto, os gráficos das funções pares são simétricos em relação ao eixo y e os das ímpares são simétricos em relação a origem. Além disso, de modo análogo ao que foi verificado para as funções ímpares, a paridade de $f(x)$ resulta na expressão

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx.$$

Exemplo

As funções $\cos \frac{\pi nx}{L}$ são pares, enquanto que $\operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L}$ são ímpares.

¹⁰De fato, veja (3.2), p. 75.

¹¹Idem.

¹²Cf. p. 74.

Observação 49 (SF dos cossenos e senos) Considere as mesmas notações da observação 47. Assim, caso f seja par, $b_n = 0$. De fato,

$$b_n = \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^0 f(x) \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L} dx + \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L} dx \right],$$

onde a primeira integral é dada por

$$- \int_0^{-L} f(-x) \left(- \operatorname{sen} \frac{\pi n(-x)}{L} \right) dx = - \int_0^L f(u) \operatorname{sen} \frac{\pi nu}{L} du.$$

Logo, apenas termos pares da SF real “sobrevivem”. Assim, temos a SF dos cossenos, que representa funções pares diferenciáveis por partes, dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{L}, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{\pi nx}{L} dx.$$

Analogamente, funções ímpares diferenciáveis por partes podem ser representadas pela SF dos senos dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L} dx.$$

Exemplos

- A função ψ do exemplo anterior é real e ímpar. Assim, ao combinarmos os termos simétricos de sua SF complexa, temos, para $n > 0$,

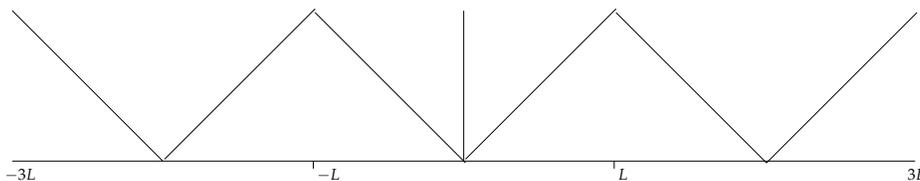
$$\begin{aligned} \frac{iL(-1)^n}{\pi n} \left(e^{i\pi nx/L} - e^{-i\pi nx/L} \right) &= \frac{iL(-1)^n}{\pi n} \left(2i \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2L}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L}, \end{aligned}$$

acarretando

$$\psi(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L}.$$

- Seja ϕ a função ($2L$ -periódica) definida por $\phi(x) = |x|$ para todo $x \in [-L, L]$, conforme a figura 3.2. ϕ é real, par, diferenciável por partes, não tem descontinuidades e,

Figura 3.2: Função ϕ



portanto, igual à soma de sua SF dos cossenos. Conseqüentemente, temos

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x dx = L$$

e, para $n > 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L x \cos \frac{\pi nx}{L} dx \\ &= \frac{2x}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L} \Big|_0^L - \frac{2}{\pi n} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L} dx \\ &= 0 - 0 + \frac{2L}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi nx}{L} \Big|_0^L \\ &= \frac{2L}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

Assim,

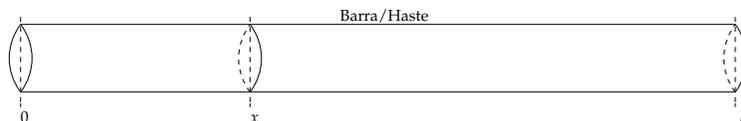
$$\phi(x) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{\pi(2k-1)x}{L}.$$

Em particular, para $x = 0$, temos, pela observação 46,¹³ a série

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Solução da equação do calor 1D via separação de variáveis

Figura 3.3: Barra



Considere uma barra/haste como a da figura 3.3. Queremos resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t &= \kappa^2 u_{xx} & (\text{edp}), \\ u(0,t) = 0 \text{ e } u(L,t) = 0 & (\text{condições de fronteira/contorno}), \\ u(x,0) &= f(x) & (\text{condição inicial}), \end{cases} \quad (3.3)$$

onde:

- $u(x, t)$ é a temperatura u (da barra) em função da posição x e do tempo t ;
- κ^2 é a constante de difusão térmica e depende da condutividade térmica, da densidade e do calor específico do material constituinte da barra, conforme ilustramos na tabela dada a seguir;¹⁴
- Assim como *edo* significa *equação diferencial ordinária*, *edp* significa *equação diferencial parcial*.¹⁵

Resolução

¹³Teorema de Fourier, p. 76.

¹⁴ κ^2 é medida em unidades de (comprimento)²/tempo.

¹⁵*edos* e *edps* representam o plural das frases (em itálico) supracitadas.

material	κ^2
prata	1,71
cobre	1,14
alumínio	0,80
ferro	0,12
granito	0,011
tijolo	0,0038

- **Separação de variáveis**

Seja $u(x, t) = X(x)T(t)$. Assim, por $u_t = \kappa^2 u_{xx}$, temos

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\kappa^2 T} \frac{dT}{dt} = \text{cte},$$

pois uma função apenas de x iguala uma função apenas de t (para quaisquer x e t admissíveis) apenas quando ambas representam a mesma função constante. Consequentemente,

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \text{cte} \kappa^2 T \implies T(t) = T_0 e^{\text{cte} \kappa^2 t}, \\ \frac{d^2 X}{dx^2} = \text{cte} X. \end{cases}$$

Caso não exista fonte externa de calor, T é decrescente e, portanto, para

$$\text{cte} = -p^2,^{16}$$

temos

$$T(t) = T_0 e^{-p^2 \kappa^2 t}$$

e

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -p^2 X \implies X(x) = \text{cte}_1 \cos px + \text{cte}_2 \sin px.$$

- **Condições de fronteira**

· Como

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \implies X(0) = 0,$$

temos $\text{cte}_1 = 0$, ou seja,

$$X(x) = \text{cte}_2 \sin px.$$

· Como

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0 \implies X(L) = 0,$$

temos

$$\sin pL = 0,$$

acarretando

$$pL = n\pi, \text{ ou seja, } p = \frac{n\pi}{L}, \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0. \quad (3.4)$$

¹⁶Note que cte é negativa.

Assim,

$$X_n(x) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \text{ com } c_n \text{ real, } n = 1, 2, \dots^{17}$$

Portanto,

$$u_n(x, t) = b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2\pi^2\kappa^2 t/L^2}, \quad b_n = T_0 c_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Consequentemente, como combinações lineares de soluções são soluções, temos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2\pi^2\kappa^2 t/L^2}.$$

• **Condição Inicial**

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

é uma SF dos senos, com

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

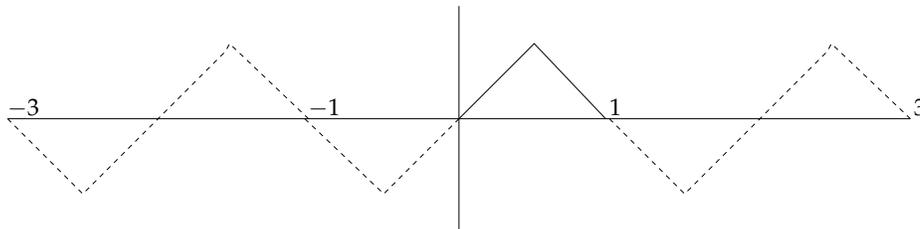
Note que, como cada termo da solução tem uma exponencial negativa, a temperatura deve decrescer no tempo e, no final, convergir para $u = 0$.

Exemplo

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}; \\ u(0, t) = u(1, t) = 0; \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1/2, \\ 1-x & \text{se } 1/2 < x < 1, \end{cases} \end{cases}$$

onde $f(x)$ está representada na figura 3.4.

Figura 3.4: $f(x)$ é representada pela linha contínua



Aqui, como $\kappa^2 = L = 1$ e $b_n = 2 \left(\int_0^{1/2} x \operatorname{sen}(n\pi x) dx + \int_{1/2}^1 (1-x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx \right)$, temos

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1, \text{ ímpar}} \frac{(-4)(-1)^n}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}.$$

¹⁷ X_0 não pode ser calculado, pois, por (3.4), $n \neq 0$. Além disso, não consideramos índices negativos, pois $X_{-n} = -X_n$.

3.2 Transformada de Fourier (TF)

Para compararmos com a transformada supracitada e revisarmos algumas notações e funções especiais, precisamos do capítulo 4 (*Transformada de Laplace (TL) e edo*) do meu livro sobre *edps*, disponibilizado na minha página acadêmica, cujo endereço eletrônico encontra-se na capa desse manual.

Como ilustração do uso da TL (\mathcal{L}) para resolvermos *edps*, de modo similar ao método (para resolver *edps*) do capítulo 4 supracitado, considere o seguinte:

Exemplo

Solução da equação da onda via TL

Seja $u(x, t)$ a solução da *edp* do telégrafo, ou seja,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{4} \frac{k^2}{c^2} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.5)$$

Primeiramente, vamos obter a *edp* satisfeita por $\phi = ue^{-kt/2}$. Em seguida, usaremos \mathcal{L} (numa função apenas de t) para obtermos a solução dessa *edp* com condições de fronteira dadas por

$$u(x, 0) = \cos(mx), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = e^{kt/2}.$$

Assim, note que, ao substituirmos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \phi(x, t)e^{kt/2}, \\ u_t &= \phi_t e^{kt/2} + \frac{k}{2} \phi e^{kt/2}, \\ u_{tt} &= \phi_{tt} e^{kt/2} + k\phi_t e^{kt/2} + (k/2)^2 \phi e^{kt/2} \text{ e} \\ u_{xx} &= \phi_{xx} e^{kt/2} \end{aligned}$$

em (3.5), temos a *equação de onda*

$$\frac{1}{c^2} \phi_{tt} = \phi_{xx} \quad (3.6)$$

e, ao considerarmos

$$\mathcal{L}\{\phi(x, t)\} = \Phi(x, s),$$

a propriedade

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

e as condições iniciais (em $t = 0$) para u e u_t ,¹⁸ temos a *edo*

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2} \Phi = -\frac{s - \frac{k}{2}}{c^2} \cos(mx). \quad (3.7)$$

Caso $\Phi = \Phi_H + \Phi_P$ seja a soma da solução do problema homogêneo e de uma solução particular do problema não-homogêneo associados à essa *edo*, temos, por

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2} \Phi = 0,$$

¹⁸Confira o capítulo 4 do livro supracitado.

$r^2 - \frac{s^2}{c^2} = 0$, isto é, $r = \pm \frac{s}{c}$. Portanto,

$$\Phi_H = \text{cte}_1 e^{\frac{s}{c}x} + \text{cte}_2 e^{-\frac{s}{c}x}.$$

Por outro lado, ao substituirmos $\Phi_P = \text{cte} \cos(mx)$ e $\frac{d^2\Phi_P}{dx^2} = -m^2 \text{cte} \cos(mx)$ em (3.7), temos

$$c^2 m^2 \text{cte} + s^2 \text{cte} = s - \frac{k}{2},$$

acarretando $\text{cte} = \frac{s-k/2}{s^2+c^2m^2}$. Consequentemente,

$$\Phi(x, s) = \text{cte}_1 e^{\frac{s}{c}x} + \text{cte}_2 e^{-\frac{s}{c}x} + \frac{s-k/2}{s^2+c^2m^2} \cos(mx).$$

Logo, para $m = 0$, temos $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x, s) = \frac{s-k/2}{s^2}$ se $\text{cte}_1 = 0$.

Que condição de fronteira sobre $\phi(x, t)$ acarreta esse resultado?

Pela tabela e pela propriedade de linearidade dadas no capítulo 4 supracitado, temos

$$\mathcal{L}^{-1} \{1/s\} = 1 \text{ e } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-k/2}{s^2} \right\} = -\frac{k}{2}t.$$

Portanto,

$$\mathcal{L} \left\{ 1 - \frac{k}{2}t \right\} = \frac{1}{s} - \frac{k/2}{s^2} = \frac{s-k/2}{s^2}.$$

Logo, ao consideremos $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, t) = 1 - \frac{k}{2}t$ para $m = 0$,¹⁹ temos

$$\Phi(x, s) = \text{cte}_2 e^{-\frac{s}{c}x} + \frac{s-k/2}{s^2+c^2m^2} \cos(mx).$$

Então, pela condição de fronteira para $x = 0$, temos $\phi(0, t) = e^{-kt/2}u(0, t) = 1$, acarretando

$$\begin{aligned} \Phi(0, s) &= \mathcal{L} \{ \phi(0, t) \} \\ &= \mathcal{L} \{ 1 \} \\ &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Logo, $\text{cte}_2 = \frac{1}{s} - \frac{s-k/2}{s^2+c^2m^2}$ e, assim,

$$\Phi(x, s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{s-k/2}{s^2+c^2m^2} \right) e^{-\frac{s}{c}x} + \frac{s-k/2}{s^2+c^2m^2} \cos(mx).$$

¹⁹De fato, pela definição da TL (confira o capítulo 4 do livro supracitado),

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x, s) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \phi(x, t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{k}{2}t \right) e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L} \left\{ 1 - \frac{k}{2}t \right\} \\ &= \frac{s-k/2}{s^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, como, pela tabela supracitada,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{e^{-st_0}F(s)\} &= H(t-t_0)f(t-t_0), \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} &= \cos(at) \text{ e} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s+a^2}\right\} &= \text{sen}(at),\end{aligned}$$

temos

$$\phi(x, t) = \begin{cases} 1 - \cos\left(cm\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) + \frac{k}{2cm} \text{sen}\left(cm\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) + \\ \left(\cos(cmt) - \frac{k}{2cm} \text{sen}(cmt)\right) \cos(mx) & \text{se } t > x/c, \\ \left(\cos(cmt) - \frac{k}{2cm} \text{sen}(cmt)\right) \cos(mx) & \text{se } 0 < t < x/c, \end{cases}$$

restando agora, considerarmos $u = \phi e^{kt/2}$ para resolvermos (3.5).

Observação 50 (Definição da TF) A TF de uma função $f(t)$ adequada é definida pela integral

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)\} &= F(\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt,\end{aligned}\tag{3.8}$$

caso essa integral exista.²⁰

Exemplo

$$f(t) = e^{-cte^2 t^2} \implies F(\omega) = \frac{1}{cte\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4cte^2}}.$$

De fato, por (3.8), temos

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cte^2 t^2} e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cte^2 t^2 + i\omega t} dt.\end{aligned}$$

Agora, completando quadrados do expoente do integrando, ou seja,

$$\begin{aligned}-cte^2 t^2 + i\omega t &= -cte^2 \left(t^2 - 2 \cdot t \cdot \frac{i\omega}{2cte^2} \right) \\ &= -cte^2 \left(t^2 - 2 \cdot t \cdot \frac{i\omega}{2cte^2} - \frac{\omega^2}{4cte^4} \right) - \frac{\omega^2}{4cte^2} \\ &= -cte^2 \left(t - \frac{i\omega}{2cte^2} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4cte^2},\end{aligned}$$

e fazendo a mudança de variáveis

$$u = t - \frac{i\omega}{2cte^2},$$

²⁰A integral existirá caso $f(t)$ satisfaça três hipóteses que apresentaremos na observação 53. Se nada for dito em contrário, o operador \mathcal{F} será aplicado apenas em funções que satisfaçam essas hipóteses!

temos

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/4cte^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cte^2 u^2} du.$$

Finalmente, pela mudança de variáveis $r = cte \cdot u$, obtemos

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{cte\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/4cte^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr \\ &= \frac{1}{cte\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4cte^2}, \end{aligned}$$

pois, no exemplo da observação sobre a *convolução* para a TL, dado no capítulo 4 do livro supracitado, temos $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-u^2} du + \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

onde usamos $u = -x$ na segunda igualdade, de cima para baixo.

Observação 51 (Linearidade) Como a \mathcal{L} , a \mathcal{F} é linear.

De fato, sendo c_1 e c_2 constantes, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) e^{i\omega t} dt \\ &= c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{i\omega t} dt + c_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{i\omega t} dt \\ &= c_1 \mathcal{F} \{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{F} \{f_2(t)\}. \end{aligned}$$

Observação 52 (Desenvolvimento da integral de Fourier (IF)) Caso $f(t)$ seja uma função $2L$ -periódica e diferenciável por partes,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{\pi n t}{L} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sen \frac{\pi n t}{L} dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

temos, pela observação 47,²¹

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{\pi n t}{L} dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sen \frac{\pi n x}{L} \int_{-L}^L f(t) \sen \frac{\pi n t}{L} dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{\pi n (t-x)}{L} dt. \end{aligned}$$

²¹Cf. p. 77.

Consequentemente, se $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt < \infty$, $\frac{\pi n}{L} = \omega$ e $\frac{\pi}{L} = \Delta\omega$, então

$$\lim_{L \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(t-x))dt.$$

Portanto, temos a IF dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(t-x))dt.$$

A rigor, esse desenvolvimento formal (para a obtenção da IF) não é propriamente uma demonstração. Contudo, com as hipóteses da observação 53, uma demonstração similar a tal desenvolvimento pode ser encontrada em alguns livros (matematicamente mais rigorosos) da área.

Observação 53 (Hipóteses para existência da IF) *A IF existe se:*

1. f é diferenciável por partes;
2. f' é contínua por partes;
3. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$.²²

Note que f não precisa ser $2L$ -periódica para que a IF seja válida.

Observação 54 (Forma exponencial da IF: transformada de Fourier inversa (TFI)) *Devido a $\cos(\omega(t-x))$ ser par como função de ω , temos*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(t-x))dt.$$

Devido a $\sin(\omega(t-x))$ ser ímpar como função de ω , temos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega(t-x))dt = 0.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos(\omega(t-x)) + i \sin(\omega(t-x)))dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right) e^{-i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \end{aligned}$$

Consequentemente, para $x = t$, temos a TFI dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \{F(\omega)\} &= f(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned} \tag{3.9}$$

²²Assim, como $|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt| < \infty$, temos $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt < \infty$.

Exemplo

Considere $f(t) = \delta(t)$, a função *delta de Dirac*.²³ Logo, como

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \delta(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega \cdot 0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$

temos

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Assim, não só obtivemos que a função $\delta(t)$ e a função constante $1/\sqrt{2\pi}$ são transformadas uma da outra por \mathcal{F} e \mathcal{F}^{-1} , mas também um novo modo de representar a função $\delta(t)$.²⁴

Observação 55 (“Escolha” das definições (das transformadas) dadas) Poderíamos ter trocado $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ por $\frac{1}{2\pi}$ em uma das transformadas, eliminado $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ na outra e/ou trocado os sinais dos expoentes nas duas, sem grandes perdas na teoria.

Exemplo

Caso

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= F(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} &= f(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

sejam utilizadas como as fórmulas para a TF e a TFI, respectivamente, resolva os seguintes exercícios:

1. Para a função de Heaviside $H(t)$, dada por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ 1 & \text{se } t \geq 0, \end{cases} \quad 25$$

obtenha a TF de $f(t) = H(t)e^{-at}$, com $a > 0$.

2. Determine o valor de

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\omega}}{5 + i\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

²³Confira o capítulo 4 do livro supracitado.

²⁴Em alguns livros, $\delta(t)$ é definida por essa integral!

²⁵Confira o capítulo 4 do livro supracitado.

3. Utilize a TF para obter uma solução $y(t)$ de

$$y(t)'' + 3y(t)' + 2y(t) = \delta(t).$$

Resolução

1. Note que

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F} \{ H(t)e^{-at} \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= -\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+i\omega}. \end{aligned}$$

Na última igualdade, de cima para baixo, usamos o seguinte fato:

É nulo o limite do produto de uma função limitada por uma que converge para 0.

Assim,

$$L \rightarrow \infty \implies e^{-aL} (\cos(\omega L) + i \operatorname{sen}(\omega L)) \rightarrow 0.$$

Caso as transformadas do enunciado desse exercício sejam trocadas pelas transformadas (3.8) e (3.9),²⁶ temos a seguinte resolução: Como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ e^{-at} & \text{se } t \geq 0, \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(a-i\omega)t} dt \\ &= -\frac{e^{-(a-i\omega)t}}{\sqrt{2\pi}(a-i\omega)} \Big|_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Assim, como

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-(a-i\omega)t}| &= \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-at}| |e^{i\omega t}| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-at}| \\ &= 0, \end{aligned}$$

temos

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a-i\omega)}.$$

²⁶Confira as páginas 84 e 86.

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\omega}}{5 + i\omega} e^{i\omega t} d\omega &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{2i\omega}}{5 + i\omega} \right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{2i\omega} \mathcal{F} \left\{ H(t) e^{-5t} \right\} \right\} \\ &= H(t + 2) e^{-5(t+2)}, \end{aligned}$$

onde usamos o (resultado obtido no) item 1 (desse exemplo) na segunda igualdade e, na última igualdade, a vindoura observação 56, adaptada a definição das transformadas adotada nesse exemplo, isto é,

$$\mathcal{F} \{f(t - a)\} = e^{-i\omega a} \mathcal{F} \{f(t)\}.$$

3. Seja $\mathcal{F} \{y(t)\} = Y(\omega)$. Considerando a vindoura observação 57, adaptada a definição da TF dada nesse exemplo, isto é,

$$\mathcal{F} \{y'(t)\} = i\omega Y(\omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{F} \{y''(t)\} = -\omega^2 Y(\omega),$$

além da TF de $\delta(t)$ (obtida anteriormente), adaptada a definição da TF dada nesse exemplo, isto é, $\mathcal{F} \{\delta(t)\} = 1$, temos

$$Y(\omega)(\omega^2 - 3i\omega - 2) = -1 \implies Y(\omega) = \frac{-i}{\omega - i} + \frac{i}{\omega - 2i} = \frac{1}{i\omega + 1} - \frac{1}{i\omega + 2}.$$

Consequentemente, pelo item 1 desse exemplo, temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1} \{Y(\omega)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{i\omega + 1} - \frac{1}{i\omega + 2} \right\} \\ &= (e^{-t} - e^{-2t}) H(t). \end{aligned}$$

Observação 56 (Deslocamento)

$$\mathcal{F} \{f(t - a)\} = e^{i\omega a} F(\omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{F} \{e^{iat} f(t)\} = F(\omega + a).$$

Demonstração

Para a segunda igualdade, é fácil ver que

$$\mathcal{F} \{e^{iat} f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i(\omega+a)t} dt.$$

Para a primeira, pela mudança de variáveis $t - a = u$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{f(t - a)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega(u+a)} du \\ &= e^{i\omega a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega u} du. \end{aligned}$$

Observação 57 (Derivadas das funções $f(t)$ e $F(\omega)$)

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right\} = (-i\omega)^k F(\omega) \text{ e } \mathcal{F} \{ t^k f(t) \} = (-i)^k \frac{d^k}{d\omega^k} F(\omega).$$

Demonstração

Seja $k = 1$. Para a primeira igualdade, integrando-se por partes, temos

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} = -i\omega F(\omega).^{27} \quad (3.10)$$

Para a segunda, ao passarmos a derivação em relação a ω para dentro do sinal de integração, temos

$$\mathcal{F} \{ t f(t) \} = -i \frac{d}{d\omega} F(\omega). \quad (3.11)$$

As fórmulas para $k > 1$ seguem (indutivamente) de (3.10) e (3.11)

Exemplo

Provaremos, de um modo diferente do que fizemos no primeiro exemplo dado após a definição de TF,²⁸ que

$$\mathcal{F} \left\{ e^{-cte^2 t^2} \right\} = \frac{1}{cte\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4cte^2}}.$$

De fato, $f(t) = e^{-cte^2 t^2}$ satisfaz a *edo*

$$\frac{d}{dt} f(t) + 2cte^2 t f(t) = 0.$$

Portanto, aplicando-se a observação 57 para $k = 1$, temos

$$i\omega F(\omega) + 2cte^2 i \frac{d}{d\omega} F(\omega) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{d\omega} F(\omega) + \frac{\omega}{2cte^2} F(\omega) = 0.$$

Assim, temos

$$F(\omega) = CTE e^{-\omega^2/4cte^2},$$

onde

$$\begin{aligned} CTE &= F(0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cte^2 t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{cte} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr \quad (r = cte t) \\ &= \frac{1}{cte\sqrt{2}}. \quad (\text{Cf. exemplo supracitado}) \end{aligned}$$

²⁷Pode ser provado que, se $f(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \pm\infty$, então existe a TF de $f(t)$.

²⁸Cf. obs. 50, p. 84.

Exemplo**Solução da equação de onda via TF**

Essa equação é dada por (3.6) e já foi resolvida via TL.²⁹ Para resolvê-la por TF, considere que a amplitude $\phi(x, t)$ de pequenas vibrações satisfaz a equação supracitada, ou seja,

$$\phi_{xx} = \frac{1}{c^2} \phi_{tt}, \quad (3.12)$$

e a condição inicial

$$\phi(x, 0) = f(x), \quad (3.13)$$

onde $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, pois, nesse caso, a onda ainda não se propagou, já que a propagação, além de espacial, também é temporal.³⁰ Logo, aplicando-se a TF em (3.12) (como função apenas de x) e sendo $\Phi(\omega, t) = \mathcal{F}\{\phi(x, t)\}$, temos a equação

$$(-i\omega)^2 \Phi(\omega, t) = \frac{1}{c^2} \Phi_{tt}(\omega, t). \quad (3.14)$$

Como essa equação é uma *edo* em t e, ao aplicarmos a TF à (3.13), temos a condição inicial $\Phi(\omega, 0) = F(\omega)$, a solução de (3.14) é dada pela expressão

$$\Phi(\omega, t) = F(\omega) e^{\pm i\omega ct}.$$

Agora, aplicando-se a TFI nessa expressão, temos, pela observação 56,

$$\phi(x, t) = f(x \mp ct),$$

que corresponde a propagação de ondas nas direções positiva e negativa do eixo x , respectivamente.

Exemplo**Solução da equação de calor unidimensional via TF**

Essa equação, no sistema (3.3),³¹ já foi resolvida via SF. Para resolvê-la por TF, caso $u(x, t)$ seja a temperatura (em função do tempo e do espaço) satisfazendo a *edp*

$$u_t = \kappa^2 u_{xx},$$

podemos aplicar a TF nessa equação como função apenas de x e, denotando-se

$$U(\omega, t) = \mathcal{F}\{u(x, t)\},$$

temos, pela observação 57 (na derivada em relação a x), temos a seguinte *edo* em t

$$U_t(\omega, t) = -\kappa^2 \omega^2 U(\omega, t),$$

cujas solução é dada por

$$U(\omega, t) = \text{cte} \cdot e^{-\kappa^2 \omega^2 t},$$

²⁹Cf. p. 82.

³⁰Essa condição sobre $f(x)$ assegura o uso da fórmula da TF para a derivada de $f(x)$.

³¹Cf. p. 79.

onde cte depende de ω e é determinada pelas condições iniciais. De fato, $\text{cte} = U(\omega, 0)$ é a distribuição espacial inicial de U , que é dada pela TF aplicada a distribuição espacial inicial de u , isto é, $u(x, 0)$. Então,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{cte}(\omega) e^{-\kappa^2 \omega^2 t} e^{-i\omega x} d\omega.$$

Portanto, por exemplo, caso tenhamos $u(x, 0) = \delta(x)$ (e, assim, $\text{cte}(\omega) = \text{cte}$), podemos completar quadrados em ω para $-\kappa^2 \omega^2 t - i\omega x$ e, por uma mudança de variáveis adequada, obtermos

$$u(x, t) = \frac{\text{cte}}{\kappa\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}}.$$

De fato, basta considerarmos

$$-\left[(\kappa\sqrt{t})^2 \omega^2 + i\omega x \right] = -(\kappa\sqrt{t})^2 \left(\omega + \frac{i x}{2(\kappa\sqrt{t})^2} \right)^2 - \frac{x^2}{4(\kappa\sqrt{t})^2}$$

e

$$u = \omega + \frac{i x}{2\kappa^2 t}.$$

Observação 58 (Convolução) Se $(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$, então

$$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = \sqrt{2\pi}F(\omega)G(\omega).$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \right) e^{i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)e^{i\omega t} dt \right) g(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\omega\tau} F(\omega) \right) g(\tau)d\tau \\ &= \sqrt{2\pi}F(\omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau, \end{aligned}$$

onde usamos a observação 56 na segunda igualdade, de cima para baixo.

Exemplo

Oscilador harmônico amortecido

Considere a *edo*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = g(t),$$

onde k e ω_0^2 são constantes tais que $\omega_0^2 > k^2/4$. Assim, se

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(\omega) \text{ e } \mathcal{F}\{g(t)\} = G(\omega),$$

então, aplicando-se a TF em ambos os membros da *edo* supracitada e usando a observação 57 em $y(t)$, temos

$$Y(\omega) = \frac{G(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - ik\omega}.$$

Agora, se $F(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - ik\omega}$, então, pela observação 58, temos

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau,$$

onde

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - ik\omega} d\omega \end{aligned}$$

pode ser calculada calculada por uma integral (complexa) de contorno, resultando em

$$f(t) = \begin{cases} \frac{e^{-kt/2}}{\sqrt{\omega_0^2 - k^2/4}} \text{sen}(\sqrt{\omega_0^2 - k^2/4}t) & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Observação 59 (Transformadas de Fourier do cosseno e do seno) Essas transformadas são definidas da seguinte maneira:

1. TFC e TFCI

Seja $f_c(t)$ par. Logo, como $\cos(\omega t)$ é par, temos

$$F_c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_c(t)(\cos(\omega t) + i \text{sen}(\omega t))dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(t) \cos(\omega t)dt$$

é par e

$$f_c(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_c(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos(\omega t)d\omega.$$

2. TFS e TFSI

Seja $f_s(t)$ ímpar. Portanto, analogamente,

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(t)\text{sen}(\omega t)dt \quad e \quad f_s(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega)\text{sen}(\omega t)d\omega.$$

Exemplo

A função

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < 1, \\ 0 & \text{se } |t| > 1, \end{cases}$$

é a função de passo unitário finita simétrica.

1. Determine $F_c(\omega)$, a TFC de $f(t)$;

2. Utilizando-se a TFCI, mostre que

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega \cos(\omega t)}{\omega} d\omega.$$

3. Pelo item anterior, verifique que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega \cos(\omega t)}{\omega} d\omega = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| > 1, \\ \pi/4 & \text{se } |t| = 1, \\ \pi/2 & \text{se } |t| < 1. \end{cases}$$

Resolução

Seja $f(t) = f_c(t)$. Assim:

1.

$$\begin{aligned} F_c(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos(\omega t) dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} \Big|_0^1 \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen } \omega}{\omega}. \end{aligned}$$

2. $f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos(\omega t) d\omega \stackrel{\text{item 1.}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega \cos(\omega t)}{\omega} d\omega.$

3. Pela definição de $f(t)$ e pelo item 2 desse exemplo, a verificação é trivial para $t \neq \pm 1$. Agora, para $t = 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega \cos \omega}{\omega} d\omega &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(2\omega)}{\omega} d\omega \stackrel{x=2\omega}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

onde a integral $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx$ pode ser calculada via variáveis complexas.

Observação 60 (Mudança de variável) Se $cte \neq 0$, então

$$\mathcal{F} \{f(cte \cdot t)\} = \frac{1}{|cte|} F\left(\frac{\omega}{cte}\right).$$

Demonstração

· Para $cte > 0$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{f(cte \cdot t)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(cte \cdot t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega u / cte} \frac{1}{cte} du \\ &= \frac{1}{cte} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\frac{\omega}{cte} u} du \\ &= \frac{1}{|cte|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\frac{\omega}{cte} u} du; \end{aligned}$$

· Para $\text{cte} < 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(\text{cte} \cdot t)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\text{cte} \cdot t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega u / \text{cte}} \frac{1}{\text{cte}} du \\ &= -\frac{1}{\text{cte}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\frac{\omega}{\text{cte}} u} du \\ &= \frac{1}{|\text{cte}|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\frac{\omega}{\text{cte}} u} du.\end{aligned}$$

Exemplo Como $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-\omega)$, temos que

$f(t)$ é par (respectivamente, ímpar)

Portanto,

$F(\omega)$ é par (respectivamente, ímpar).

Exemplo Se a e b são constantes positivas, então

$$\int_0^{\infty} e^{-a\omega} \frac{\text{sen}(b\omega)}{\omega} d\omega = \arctan \frac{b}{a}.$$

De fato, a função

$$f_b(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < b, \\ 0 & \text{se } |t| > b, \end{cases}$$

como no exemplo da função de passo unitário supracitada, tem TF

$$\mathcal{F}\{f_b(t)\} = \frac{2 \text{sen}(b\omega)}{\sqrt{2\pi}\omega}.$$

Portanto, por linearidade, temos

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sqrt{2\pi}}{2} f_b(t)\right\} = \frac{\text{sen}(b\omega)}{\omega}.$$

Por outro lado, resolvendo de modo análogo a um exemplo dado anteriormente,³² só que dessa vez também considerando a integral para $t \in (-\infty, 0)$ (além da integral em $(0, \infty)$ já obtida), temos

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2 + \omega^2)}.$$

Analogamente, só que, agora, aplicando a TFI, temos

$$\mathcal{F}\left\{\frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2 + t^2)}\right\} = e^{-a|\omega|}.$$

³²Qual?

Agora, pela observação 58, temos

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} f_b(t) \right) * \left(\frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a^2 + t^2} \right) \right\} = \frac{\text{sen}(b\omega)}{\omega} e^{-a|\omega|}$$

$$= F(\omega).$$

Consequentemente, como

$$f(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b \frac{1}{a^2 + (t - \tau)^2} d\tau$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{t+b}^{t-b} \frac{1}{a^2 + u^2} du,$$

temos

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\arctan \frac{t+b}{a} - \arctan \frac{t-b}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

onde, na primeira igualdade, de cima para baixo, usamos a integral $\int \frac{1}{a^2+u^2} du = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a}$. Consequentemente, como \arctan é ímpar, basta considerarmos $t = 0$ para obtermos o resultado desejado.

3.3 Exercícios

1. Seja

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \\ \frac{\pi}{2} & \text{para } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi; \\ \pi - \frac{t}{2} & \text{para } \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Esboce o gráfico de $f(t)$ e determine a **SF** assumindo $f(t) = f(t + 2\pi)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

2. Determine a **SF** para a função

$$f(x) = \begin{cases} H(x) \text{ (função de Heaviside)} & \text{se } x \in [-\pi, \pi]; \\ f(x + 2\pi) \text{ (} f \text{ } 2\pi\text{-periódica)} & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Daí, obtenha o valor da série

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

3. Obtenha a **SF** para

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } 0 \leq x \leq \pi, \\ -\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } \pi < x \leq 2\pi, \end{cases}$$

sendo $f(x) = f(x + 2\pi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

4. Determine a **SF** para

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \in [-\pi, \pi], \\ f(x + 2\pi) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sugira valores possíveis de $f(x)$ em $x = \pi$.

5. Deduza que a **SF** para $f(x) = e^{ax}$, $-\pi < x < \pi$, a um número real, é

$$\frac{\text{senh}(\pi a)}{\pi} \left(\frac{1}{a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} (a \cos(nx) - n \text{sen}(nx)) \right).$$

Daí, obtenha os valores das quatro séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2}.$$

6. Se

$$f(t) = \begin{cases} -t + e^t & \text{se } -\pi \leq t < 0, \\ t + e^t & \text{se } 0 \leq t < \pi, \\ f(t + 2\pi) & \text{se } t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

esboce o gráfico de $f(t)$ para $-4\pi \leq t \leq 4\pi$ e obtenha a **SF** para $f(t)$.

7. Encontre a SF para a função

$$f(t) = \begin{cases} \pi^2 & \text{se } -\pi < t < 0; \\ (t - \pi)^2 & \text{se } 0 \leq t < \pi; \\ f(t + 2\pi) & \text{se } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Daí determine o valor das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

8. Determine a SF de meio período para a função do item anterior e esboce os gráficos da função em ambos os casos para $t \in [-2\pi, 2\pi]$.

9. Dada a SF de meio período

$$t(\pi - t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)t)}{(2n-1)^3}, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

use a **Identidade de Parseval**

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad \text{(IP)}$$

(válida para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $2L$ -periódica, sendo f , $|f|$ e $|f|^2$ integráveis) para deduzir o valor da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}.$$

Daí obtenha o valor da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6},$$

decompondo-a em duas séries, uma das quais é a série anterior.

10. Verifique que a SF para a função $f(x) = x^4$, $-\pi < x < \pi$, é dada por

$$x^4 \sim \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{n^4} (\pi^2 n^2 - 6) \cos(nx);$$

explique porque tal série não contém termos com senos; use tal série para obter o valor da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4},$$

considerando que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

11. Dada a SF

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \text{sen}(nx), \quad -\pi < x < \pi,$$

integre termo a termo para obter a SF para x^2 , calculando a constante de integração, integrando ambos os membros para $x \in [-\pi, \pi]$. Use a mesma técnica na SF para x^4 dada no último exercício para obter a SF para x^5 em $-\pi < x < \pi$.

12. Num circuito elétrico, a voltagem é dada por

$$V(t) = \begin{cases} 40 & \text{se } 0 < t < 2, \\ 0 & \text{se } 2 < t < 5. \end{cases}$$

Obtenha os 5 primeiros termos da SF complexa para $V(t)$.

13. (a) Seja $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi n x/L}$ uma SF complexa. Desta, obtenha a IP

$$\langle f, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

(b) Aplique a IP para a função $2L$ -periódica $\psi(x) = x$, $x \in [-L, L]$, obtendo

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

14. Usando separação de variáveis, resolva o PVC

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{4}], \\ u(x, 0) = x(\frac{\pi}{4} - x) & \text{no instante } t = 0, \\ u(0, t) = u(\frac{\pi}{4}, t) = 0 & \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

escrevendo a SF para a função $x(\frac{\pi}{4} - x)$.

15. Use TL para resolver novamente o PVC da questão anterior mas, desta vez, obtendo

$$\begin{aligned} u(x, t) = & -x^2 + \frac{\pi}{4}x - 2\kappa t \\ & + 2\kappa \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\text{senh}(\frac{\pi}{4} - x) \sqrt{\frac{s}{\kappa}}}{s^2 \text{senh}(\frac{\pi}{4}) \sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \right\} \\ & + 2\kappa \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\text{senh}(x \sqrt{\frac{s}{\kappa}})}{s^2 \text{senh}(\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{s}{\kappa}})} \right\}. \end{aligned}$$

Use TL para inverter tal expressão. Explique quaisquer diferenças entre esta solução e a resposta do exercício anterior.

16. A função $u(x, t)$ satisfaz o PVC

$$\begin{cases} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & \text{para } x > 0, a > 0, b > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{para todo } x, \\ u(0, t) = 1 & \text{para todo } t, \\ u \rightarrow 0 & \text{quando } x \rightarrow \infty, \text{ para todo } t > 0. \end{cases}$$

Determine $U(x, s) = \mathcal{L}\{u(x, t)\}$. (**Aviso:** Não inverta U).

17. Resolva o PVC

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}, \\ u(x, 0) = 0 \text{ para todo } x, \\ u(0, y) = 1 \text{ para todo } y > 0, \\ u(x, y) \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Sugestão: Use a questão anterior!

18. Suponha que $u(x, t)$ satisfaça a EDP do telégrafo

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{4} \frac{k^2}{c^2} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Determine a EDP satisfeita por $\phi = ue^{-kt/2}$; daí, use **TL** (em t) para obter a solução com condições de fronteira

$$u(x, 0) = \cos(mx), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = e^{kt/2}.$$

19. A função $u(x, t)$ satisfaz o PVC

$$u_t - c^2 u_{xx} = 0; \quad x > 0, t > 0; \quad u(0, t) = f(t); \quad u(x, 0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0,$$

onde $f(t)$ é contínua por partes e de ordem exponencial. Obtenha a solução para tal PVC via **TL** e **CONVOLUÇÃO**. Determine a solução explícita para $f(t) = \delta(t)$, onde $\delta(t)$ é a função delta de Dirac.

20. Um sólido semi-infinito ocupando a região $x \geq 0$ tem temperatura inicial nula. Um fluxo de calor constante é aplicado a face em $x = 0$, tal que $T_x(0, t) = -\alpha$, onde T é a temperatura do campo e α é uma constante. Supondo condução de calor linear, encontre a temperatura para qualquer ponto $x > 0$ da barra e mostre que a temperatura da face no instante t é dada por

$$\alpha \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}}$$

onde κ é a condutividade térmica da barra.

21. Use

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

como fórmulas para **TF** e **TFI**, respectivamente, para resolver este e os próximos dois exercícios.

A função de Heaviside $H(t)$ é dada por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{para todo } t < 0, \\ 1 & \text{para todo } t \geq 0. \end{cases}$$

Obtenha a **TF** de $f(t) = H(t)e^{-at}$, onde $a > 0$.

Soluções possíveis: $F(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$; $F(\omega) = \frac{1}{a+\omega}$; $F(\omega) = \frac{1}{\omega+i a}$.

22. Determine o valor de

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\omega}}{5 + i\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

Soluções possíveis: $H(t+2)e^{-5(t+2)}$; $H(t)e^{2it}$; $H(e^{-5(t+2)})$.

23. Use **TF** para obter uma solução $y(t)$ de

$$y(t)'' + 3y(t)' + 2y(t) = \delta(t).$$

Soluções possíveis:

$$y(t) = \begin{cases} e^{-t} - e^{-2t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} e^t - e^{2t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} e^t + e^{2t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

24. Resolva os 3 exercícios anteriores, agora usando

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega.$$

25. Verifique que $\mathcal{F} \left\{ e^{-cte^2 t^2} \right\} = \frac{1}{cte\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4cte^2}}$.

26. Resolva $\phi_{xx} = \frac{1}{c^2} \phi_{tt}$ (**EO**) via **TF**, considerando a condição inicial $\phi(x, 0) = f(x)$, onde $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$.

27. Resolva a Equação do Calor Unidimensional aplicando **TF** em x a $u_t = \kappa^2 u_{xx}$, considerando $u(x, 0) = \delta(x)$.

28. Resolva, via **TF**, a EDO do Oscilador Harmônico Amortecido

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = g(t),$$

onde k e ω_0^2 são constantes tais que $\omega_0^2 > k^2/4$.

29. Para a **função passo unitário finita simétrica**

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

resolva os seguintes itens:

(a) Determine $F_c(\omega)$, a **TCF** de $f(t)$;

(b) Aplicando a **TICF**, mostre que

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega \cos(\omega t)}{\omega} d\omega.$$

(c) Usando o ítem anterior, verifique que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega \cos(\omega t)}{\omega} d\omega = \begin{cases} 0, & |t| > 1, \\ \pi/4, & |t| = 1, \\ \pi/2, & |t| < 1. \end{cases}$$

30. (a) Mostre que a **TSF** e a **TCF** de e^{-at} são dadas (respectivamente) por

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}, \quad F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2}.$$

Sugestão: Cada uma das transformadas pode ser relacionada a outra via integração por partes.

- (b) Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega \operatorname{sen}(\omega t)}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-at}, \quad t > 0, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2a} e^{-at}, \quad t > 0.$$

Tais resultados podem ser obtidos por integração complexa de caminhos.

31. Verifique que $\int_0^{\infty} e^{-a\omega} \frac{\operatorname{sen}(b\omega)}{\omega} d\omega = \arctan \frac{b}{a}$, onde a e b são constantes positivas.