

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PROFESSOR JOSÉ RENATO RAMOS BARBOSA

NOTAS DE AULAS - CMI041/CMI064

II Semestre - 2023

Conteúdo

1	Teoria de I ordem	5
1.1	Edo linear de primeira ordem	6
1.2	Edo não-linear de primeira ordem	11
2	Teoria de II ordem - equação característica	19
2.1	Edo linear de II ordem homogênea	19
2.1.1	Linearidade das soluções	20
2.1.2	LD e LI	20
2.1.3	Solução geral	21
2.2	Edo linear de II ordem não homogênea	26
2.2.1	Método dos coeficientes indeterminados, ou, a serem determinados .	27
2.2.2	Método de variação de parâmetros	29
3	Teoria de II ordem - séries de Taylor	33
3.1	Séries numéricas	33
3.1.1	Convergência ou divergência	34
3.2	Séries de funções	44
3.2.1	Exemplo fundamental: série geométrica	44
3.2.2	Definição de convergência absoluta	46
3.3	Séries de potências	47
3.4	Séries de Taylor e funções analíticas	50
3.4.1	Séries de potências e edo	53
4	Transformada de Laplace (TL) e edo	63
4.1	TL	63
4.2	Edo e TL	81
4.2.1	Função delta de Dirac ($\delta(t)$)	84
4.2.2	TL e Sistemas	87
5	Exercícios para os capítulos anteriores	89

Capítulo 1

Teoria de I ordem

OBJETIVO DO CURSO

Estudar *equações diferenciais ordinárias (edos)*, bem como *séries de funções, transformadas de Laplace* e *teoria qualitativa*, para aplicá-las nas *edos*.

O QUE É UMA EDO?

Uma *equação diferencial ordinária (edo)* é uma equação que relaciona uma função incógnita, digamos $x(t)$ ou $y(t)$, com algumas de suas derivadas. Determinar que funções satisfazem uma *edo* significa obter suas *soluções*.

EXEMPLO

Seja

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0. \quad (1.1)$$

Por um lado, escrevendo (1.1) como $1 \cdot x''(t) = -x$, se pensarmos na derivada de segunda ordem (em relação a t) como a aceleração a de uma partícula no instante t , $m = 1$ como uma massa unitária e o simétrico aditivo da função incógnita como uma força F , resistiva ao movimento, temos $F = ma$.¹ Por outro, $\cos t$ e $\sin t$ são soluções dessa *edo*, isto é, satisfazem a equação (1.1). Na verdade, *combinações lineares* dessas duas funções trigonométricas, ou seja,

$$x = cte_1 \cos t + cte_2 \sin t,$$

são soluções de (1.1), onde cte_1 e cte_2 são constantes numéricas.²

TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO

Além de resoluções analíticas, existem ainda resoluções numéricas, que estão fora do escopo dessas notas, e qualitativas, que estudaremos posteriormente.

¹Segunda lei de Newton.

²Verifique!

DOMÍNIO DAS SOLUÇÕES

É importante observar o domínio máximo da solução de uma *edo*. Em geral, esse domínio é um conjunto *aberto* da reta real, isto é, um intervalo aberto ou uma união de intervalos abertos.

EXEMPLO

No exemplo anterior, o domínio das soluções é \mathbb{R} , isto é, o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE (TEU)

O problema de valor inicial (*pvi*)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) & (\text{edo}) \\ x(t_0) = x_0 & (\text{condição inicial}) \end{cases}$$

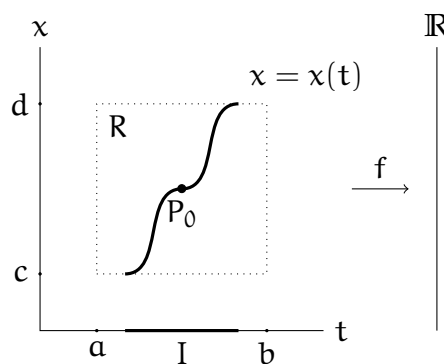
admite uma única solução $x = x(t)$ no intervalo aberto máximo I contendo t_0 , caso f e f_x sejam contínuas num retângulo aberto

$$R = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid a < t < b \text{ e } c < x < d \right\}$$

contendo $P_0 = (t_0, x_0)$ com $I \subset (a, b)$.

Para uma representação geométrica do TEU, considere a figura 1.1.

Figura 1.1: TEU



1.1 Edo linear de primeira ordem

Sejam $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, onde I é um intervalo aberto em \mathbb{R} , e o *pvi*

$$\begin{cases} x' = ax + b; & (\text{edo}) \\ x(t_0) = x_0. & (\text{condição inicial}) \end{cases}$$

Pelo TEU, considerando $f(t, x) = a(t)x + b(t)$, tal *pvi* admite uma única solução.

Vamos considerar os seguintes casos:

I. **a é a função nula.**

Nesse caso, temos a seguinte *solução geral*, via integração simples:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} = b(t) &\implies \int \frac{dx}{dt} dt = \int b(t) dt \\ &\implies x(t) = \int b(t) dt + cte.\end{aligned}$$

EXEMPLOS

$$1. \begin{cases} x' = \cos t; \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Por um lado, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned}x(t) &= \int \cos t dt + cte \\ &= \sin t + cte.\end{aligned}$$

Por outro, pela condição inicial,

$$0 = x(0) = \sin 0 + cte \implies cte = 0.$$

Portanto, $x(t) = \sin t$ é a solução desse *pvi*.³

$$2. \begin{cases} x' = \frac{1}{t}; \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Por um lado, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned}x(t) &= \int \frac{1}{t} dt + cte \\ &= \ln |t| + cte.\end{aligned}$$

Por outro lado, pela condição inicial,

$$0 = x(1) = \ln |1| + cte \implies cte = 0.$$

Portanto, $x(t) = \ln t$ é a solução desse *pvi* com $I = (0, \infty)$.

II. **b é a função nula.**

³Note que $I = \mathbb{R}$.

Nesse caso, a solução geral é obtida pela seguinte resolução:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} = a(t)x &\implies \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a(t) \\
 &\implies \frac{d}{dt} [\ln |x(t)|] = a(t) \\
 &\implies \int \frac{d}{dt} [\ln |x(t)|] dt = \int a(t) dt \\
 &\implies \ln |x(t)| = \int a(t) dt + cte_1 \\
 &\implies e^{\ln |x(t)|} = e^{\int a(t) dt} \cdot e^{cte_1} \\
 &\implies |x(t)| = cte_2 e^{\int a(t) dt} \\
 &\implies x(t) = cte e^{\int a(t) dt}.
 \end{aligned}$$

De cima para baixo, na primeira implicação, assumimos que x não se anula; na segunda, usamos a *regra da cadeia*; na penúltima, denotamos $cte_2 = e^{cte_1}$; na última, consideramos cte como sendo qualquer uma das constantes $\pm cte_2$.

EXEMPLOS

1. $x' = \frac{t}{1+t^2} x$.

Se $u = 1 + t^2$, a solução geral segue de

$$\begin{aligned}
 x(t) &= cte e^{\int \frac{t}{1+t^2} dt} \\
 &= cte e^{\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du} \\
 &= cte e^{\ln \sqrt{1+t^2}} \\
 &= cte \sqrt{1+t^2}.
 \end{aligned}$$

Derivando $x = cte (1 + t^2)^{1/2}$ em relação a t , podemos obter a *edo* desse exemplo. De fato:

$$\begin{aligned}
 x' &= cte \cdot 2t \cdot \frac{1}{2} (1 + t^2)^{-1/2} \\
 &= cte t (1 + t^2)^{-1+\frac{1}{2}} \\
 &= t \cdot \frac{1}{1+t^2} \cdot cte (1 + t^2)^{1/2} \\
 &= \frac{t}{1+t^2} x.
 \end{aligned}$$

Obviamente, uma cte (e portanto uma solução particular) é obtida se considerarmos um *pvi* composto de tal *edo* e de uma condição inicial.

2. Seja

$$\begin{cases} x' = 2tx; \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Por um lado, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{cte} e^{\int 2t dt} \\ &= \text{cte} e^{t^2}. \end{aligned}$$

Por outro, como

$$1 = x(0) = \text{cte} e^{0^2} \implies \text{cte} = 1,$$

a solução do *pvi* é $x = e^{t^2}$.⁴

III. a e b podem não ser identicamente nulas

Nesse caso, sendo

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds, \quad (1.2)$$

a solução do *pvi* é dada por

$$x = e^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right). \quad (1.3)$$

Primeiramente, note que, as soluções de I e II são casos particulares da equação (1.3). Além disso, em relação à equação (1.2), note que,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t a(s) ds &= A(t) \\ &= A(t) - 0 \\ &= A(t) - A(t_0) \\ &= A(s) \Big|_{s=t_0}^{s=t}, \end{aligned}$$

ou seja, A é a primitiva, isto é, a integral, de a , variando de t_0 até t .

Para demonstrar (1.3), como $\frac{dA}{dt} = a(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[e^{-A(t)} x \right] &= e^{-A(t)} x' - a(t) e^{-A(t)} x \\ &= e^{-A(t)} [x' - a(t)x] \\ &= e^{-A(t)} b(t), \end{aligned}$$

onde usamos a hipótese $x' - ax = b$. Assim, integrando de t_0 até t , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} \left[e^{-A(s)} x \right] ds &= \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \implies e^{-A(t)} x - e^{-A(t_0)} x(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \\ &\implies e^{-A(t)} x = x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \\ &\implies x = e^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right). \end{aligned}$$

⁴Note que $I = \mathbb{R}$.

Embora a fórmula (1.3) possa ser usada para obter a solução do caso III, em vez de memorizá-la, apresentaremos a técnica do *fator integrante*, com a qual podemos reobter (1.3) e, concomitantemente, obter um processo de resolução.

O objetivo aqui é escrever o primeiro membro da equação

$$x' - a(t)x = b(t) \quad (1.4)$$

como a derivada de um produto, para podermos utilizar o caso I. Assim, multiplicando a equação (1.4) por $\mu(t) \neq 0$, temos

$$\mu(t)x' - a(t)\mu(t)x = \mu(t)b(t), \quad (1.5)$$

onde estamos supondo que $\mu' = -a\mu$. Nesse caso, pelo caso II,

$$\mu = cte_1 e^{\int(-a(t))dt}.$$

Aqui, sem perda de generalidade, considere $cte_1 = 1$. Agora, voltando à equação (1.5), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu x) = \mu b &\implies \int \frac{d}{dt}(\mu x) dt = \int \mu b dt \\ \implies \mu x &= \int \mu b dt + cte \\ \implies x &= \mu^{-1} \left(cte + \int \mu(t)b(t) dt \right). \end{aligned}$$

Portanto, utilizando alguma condição inicial $x(t_0) = x_0$, obtemos (1.3).

EXEMPLO

Seja

$$\begin{cases} tx' = -x + t^2; \\ x(1) = x_0. \end{cases}$$

Para $t \neq 0$, a *edo* pode ser escrita como

$$x' + \frac{1}{t}x = t.$$

Então, pelo fator integrante

$$\begin{aligned} \mu &= e^{\int \frac{1}{t} dt} \\ &= e^{\ln t} \\ &= t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu x) = \mu t &\implies \frac{d}{dt}(tx) = t^2 \\ \implies tx &= \frac{t^3}{3} + cte. \end{aligned}$$

Note que, a condição inicial foi utilizada em $\ln|t| = \ln t$, no cálculo de μ ,⁵ e, além disso, acarreta $\text{cte} = x_0 - \frac{1}{3}$. Portanto,

$$x = \frac{t^2}{3} + \frac{x_0 - \frac{1}{3}}{t}$$

e $I = (0, \infty)$.

1.2 Edo não-linear de primeira ordem

Sendo $f(t, x)$ como no TEU, estudaremos essa *edo*, dos seguintes tipos:

I. **SEPARÁVEL**

$f(t, x) = \frac{g(t)}{h(x)}$, onde g e $h \neq 0$ são contínuas. Além disso, h admite uma primitiva H invertível, isto é, existe H com inversa H^{-1} tal que $\frac{dH}{dx} = h$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{g(t)}{h(x)} &\implies h(x) \frac{dx}{dt} = g(t) \\ &\implies \frac{dH}{dx} \frac{dx}{dt} = g(t) \\ &\implies \frac{d}{dt}[H(x(t))] = g(t) \\ &\implies H(x(t)) = \int g(t) dt + \text{cte} \\ &\implies x(t) = H^{-1} \left(\int g(t) dt + \text{cte} \right), \end{aligned}$$

onde cte pode ser obtida pela condição inicial de um *pvi*. Além disso, note que, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* na terceira implicação e uma integração em t na quarta.

EXEMPLOS

$$1. \begin{cases} x' = 1 + x^2; \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Como

$$x' = \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}},$$

temos $g(t) = 1$ e $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ satisfazendo as condições exigidas para essas funções. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} \frac{dx}{dt} = 1 &\implies \frac{d}{dt}[\arctan x(t)] = 1 \\ &\implies \arctan x(t) = \int 1 dt + \text{cte} \\ &\implies x(t) = \tan(t + \text{cte}). \end{aligned}$$

⁵De fato, $t_0 = 1$ não pode ser ponto do domínio de $\ln(-t)$.

Nas duas primeiras implicações, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* e uma integração em t , respectivamente.

Aqui, a cte é obtida via

$$\begin{aligned}x(0) = 0 &\implies \tan(0 + \text{cte}) = 0 \\ &\implies \text{cte} = \arctan 0 \\ &\implies \text{cte} = 0.\end{aligned}$$

Assim, $x = \tan t$, $t \in I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,⁶ é a solução desse *pvi*.

2. $x' = \frac{t^2}{x^2}$.

Analogamente à resolução do exemplo anterior, temos

$$\begin{aligned}x^2 \frac{dx}{dt} = t^2 &\implies \frac{d}{dx} \left[\frac{x(t)^3}{3} \right] = t^2 \\ &\implies \frac{x(t)^3}{3} = \frac{t^3}{3} + \text{cte}_1 \\ &\implies x(t) = \sqrt[3]{t^3 + \text{cte}},\end{aligned}$$

onde $\text{cte} = 3 \text{cte}_1$. Note que, nas duas primeiras implicações, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* e uma integração em t , respectivamente.

O domínio I de $x(t)$ é \mathbb{R} ?

Conforme o TEU, x' deve ser contínua. Portanto, como

$$x'(t) = 3t^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(t^3 + \text{cte})^2}} \rightarrow \infty$$

quando $t \rightarrow -\sqrt[3]{\text{cte}}$, temos uma assíntota vertical em $t = -\sqrt[3]{\text{cte}}$. Assim, I é igual a $(-\infty, -\sqrt[3]{\text{cte}})$ ou a $(-\sqrt[3]{\text{cte}}, \infty)$.

3. $xx' = -t$, $x > 0$.

Analogamente aos dois exemplos anteriores, temos

$$\begin{aligned}x \frac{dx}{dt} = -t &\implies \frac{d}{dx} \left[\frac{x(t)^2}{2} \right] = -t \\ &\implies \frac{x(t)^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + \text{cte}_1 \\ &\implies x(t) = \sqrt{\text{cte} - t^2},\end{aligned}$$

onde $\text{cte} = 2 \text{cte}_1$. Nas duas primeiras implicações, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* e uma integração em t , respectivamente. Na última, consideramos $x > 0$.

Para o domínio I de $x(t)$, note que, $t^2 \leq \text{cte}$. Na verdade, como $x \neq 0$, $t^2 < \text{cte}$, ou seja, $t \in (-\sqrt{\text{cte}}, \sqrt{\text{cte}})$. I também pode ser obtido, observando que

$$x(t)^2 + t^2 = (\sqrt{\text{cte}})^2$$

é a equação da circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{\text{cte}}$. Assim, o domínio de x é dado por $I = (-\sqrt{\text{cte}}, \sqrt{\text{cte}})$.

⁶Embora o domínio mais geral de uma função \tan seja $\mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{(2n-1)\pi}{2} \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\}$, como solução desse *pvi*, seu domínio é o maior intervalo aberto que contenha $t_0 = 0$.

II. **EXATA**

$f(t, x) = -\frac{M(t, x)}{N(t, x)}$, ou seja, a *edo* pode ser escrita da forma

$$M(t, x) + N(t, x) \frac{dx}{dt} = 0, \quad (1.6)$$

e existe alguma função $F(t, x)$ com $F_t = M$ e $F_x = N$ contínuas. Portanto, pela equação (1.6),

$$F_t + F_x x' = 0,$$

isto é, temos o produto interno nulo dado por

$$(F_t, F_x) \cdot (1, x') = 0,$$

ou seja, pela *regra da cadeia*, temos

$$\frac{d}{dt}(F(t, x(t))) = 0,$$

isto é,

$$F(t, x) = \text{cte}$$

é uma solução *implícita* da *edo*, para qualquer constante *cte*.

Como saber se uma *edo* da forma $M + Nx' = 0$ é exata?

Em sendo exata, temos, via “cálculo II”,

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} \\ &= \frac{\partial N}{\partial t} \end{aligned}$$

num conjunto *aberto* de \mathbb{R}^2 ,⁷ ainda que “suficientemente pequeno”, caso F tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas nesse *aberto*. Logo,

$$M_x = N_t$$

é uma condição necessária para que a *edo* seja exata, para M e N com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto *aberto* de \mathbb{R}^2 .

EXEMPLOS

1. $(2tx - 3t^2) + (t^2 - 2x) \frac{dx}{dt} = 0.$

Como $M = 2tx - 3t^2$ e $N = t^2 - 2x$, temos

$$M_x = 2t = N_t.$$

⁷Busque, no Google, informações sobre conjuntos *abertos*.

Logo, se $F_t = M$, então

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \int M(t, x) dt \\ &= \int (2tx - 3t^2) dt \\ &= t^2x - t^3 + g(x), \end{aligned}$$

onde $g(x)$ é constante como resultado dessa integração em t . Portanto, se $F_x = N$, então

$$\begin{aligned} t^2 + \frac{dg}{dx} = t^2 - 2x &\implies g(x) = -2 \int x dx \\ &\implies g(x) = -x^2 - cte \\ &\implies F(t, x) = t^2x - t^3 - x^2 - cte \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}(F(t, x(t))) = 0 \iff (2tx - 3t^2) + (t^2 - 2x)x' = 0.$$

$$2. \begin{cases} (\cos t - t \operatorname{sen} t + x^2) + 2tx \frac{dx}{dt} = 0; \\ x(\pi) = 1. \end{cases}$$

Por um lado, como $M = \cos t - t \operatorname{sen} t + x^2$ e $N = 2tx$, temos

$$M_x = 2x = N_t.$$

Portanto, se $F_x = N$, então

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \int N(t, x) dx \\ &= \int 2tx dx \\ &= tx^2 + h(t), \end{aligned}$$

onde $h(t)$ é constante como resultado dessa integração em x . Assim, se $F_t = M$, então

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{dh}{dt} = \cos t - t \operatorname{sen} t + x^2 &\implies h(t) = \int \cos t dx - \int t \operatorname{sen} t dt \\ &\implies h(t) = \operatorname{sen} t + cte_1 - (-t \cos t + \operatorname{sen} t + cte_2) \\ &\implies h(t) = t \cos t + cte \\ &\implies F(t, x) = tx^2 + t \cos t + cte, \end{aligned}$$

onde $cte = cte_1 - cte_2$, e, portanto,

$$\frac{d}{dt}(F(t, x(t))) = 0 \iff (\cos t - t \operatorname{sen} t + x^2) + 2txx' = 0.$$

Agora, usando a condição inicial, temos $(\pi)(1)^2 + (\pi) \cos(\pi) = cte$, isto é, $cte = 0$. Logo, a solução implícita do *pvi* é

$$tx^2 + t \cos t = 0.$$

Note que, para $t \neq 0$, como $x(\pi) = 1$,

$$x(t) = \sqrt{-\cos t}$$

tem domínio dado por $I = (\pi/2, 3\pi/2)$.

SEPARÁVEL É EXATA

Qualquer *edo* separável $x' = \frac{g(t)}{h(x)}$, isto é,

$$-g(t) + h(x) \frac{dx}{dt} = 0,$$

é exata. De fato,

$$M(t, x) = -g(t) \text{ e } N(t, x) = h(x) \implies M_x = 0 = N_t.$$

EXERCÍCIO

Em sendo possível, resolva os exemplos dados para as equações separáveis,⁸ considerando, agora, aquelas equações como exatas.

III. BERNOULLI

Nesse tipo de *edo*,

$$f(t, x) = -p(t)x + q(t)x^n,$$

onde $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, I é um intervalo real e $n \in \mathbb{R}$ é constante. Assim, pelo TEU, o *pvi* associado tem solução (única). Agora, como $f(t, x)$ é linear para $n \in \{0, 1\}$, considere $n \notin \{0, 1\}$. Assim, se $y = x^{1-n}$, sua derivada em relação a t é dada por $y' = (1-n)x^{-n}x'$. Então,

$$\begin{aligned} x' + p(t)x &= q(t)x^n \implies x^{-n}x' + p(t)x^{1-n} = q(t) \\ &\implies \left(\frac{1}{1-n} \right) y' + p(t)y = q(t), \end{aligned}$$

que é linear.

EXEMPLOS

$$1. \begin{cases} x' + \frac{4}{t}x = t^3x^2; \\ x(2) = -1. \end{cases}$$

⁸Item I da seção 1.2.

Como $n = 2$, $y = x^{1-n} = x^{-1}$, cuja derivada em relação a t é $y' = -x^{-2}x'$. Logo,

$$\begin{aligned} x' + \frac{4}{t}x &= t^3x^2 \implies x^{-2}x' + \frac{4}{t}x^{-1} = t^3 \\ &\implies -y' + \frac{4}{t}y = t^3 \\ &\implies y' - \frac{4}{t}y = -t^3 \\ &\implies (t^{-4}y)' = -t^{-1} \\ &\implies t^{-4}y = -\int \frac{1}{t} dt \\ &\implies y = t^4 \left(\ln \frac{1}{t} + \text{cte} \right) \\ &\implies x = \frac{1}{t^4 \left(\ln \frac{1}{t} + \text{cte} \right)}. \end{aligned}$$

Na quarta implicação, de cima para baixo, usamos o fator integrante

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int (-4/t) dt} \\ &= e^{-4 \ln t} \\ &= t^{-4}. \end{aligned}$$

No cálculo de $\mu(t)$, $\ln|t| = \ln t$, pela condição inicial.⁹ Assim, o domínio de $x(t)$ só pode ter pontos $t > 0$ e

$$-1 = \frac{1}{2^4(\ln(1/2) + \text{cte})} \implies \text{cte} = \ln 2 - \frac{1}{16}.$$

Portanto, a solução do *pvi* é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{t^4 \left(\ln \frac{1}{t} + \ln 2 - \frac{1}{16} \right)} \\ &= \frac{1}{t^4 \left(\ln \frac{2}{t} - \frac{1}{16} \right)}, \end{aligned}$$

cujo domínio, como $t > 0$ e

$$\begin{aligned} \ln \frac{2}{t} - \frac{1}{16} &= 0 \implies \ln \frac{2}{t} = \frac{1}{16} \\ &\implies \frac{2}{t} = e^{1/16} \\ &\implies t = 2e^{-1/16}, \end{aligned}$$

é dado por $(2e^{-1/16}, \infty)$.¹⁰

⁹De fato, $t_0 = 2$ não pode ser ponto do domínio de $\ln(-t)$.

¹⁰A outra possibilidade para o domínio de $x(t)$, $(0, 2e^{-1/16})$, é descartada pela condição inicial.

$$2. \begin{cases} x' = 5x + e^{-2t}x^{-2}; \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

Como $n = -2$, $y = x^{1-n} = x^3$, cuja derivada em relação a t é $y' = 3x^2x'$. Temos, portanto,

$$\begin{aligned} x' - 5x &= e^{-2t}x^{-2} \implies x^2x' - 5x^3 = e^{-2t} \\ &\implies \frac{1}{3}y' - 5y = e^{-2t} \\ &\implies y' - 15y = 3e^{-2t} \\ &\implies (e^{-15t}y)' = 3e^{-17t} \\ &\implies e^{-15t}y = 3 \int e^{-17t} dt \\ &\implies e^{-15t}y = -\frac{3}{17}e^{-17t} + \text{cte} \\ &\implies y = e^{15t}\text{cte} - \frac{3}{17}e^{-2t} \\ &\implies x = \left(e^{15t}\text{cte} - \frac{3}{17}e^{-2t} \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Na quarta implicação, de cima para baixo, usamos o fator integrante

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int (-15)dt} \\ &= e^{-15t}. \end{aligned}$$

Agora, pela condição inicial, temos

$$2 = \left(e^0\text{cte} - \frac{3}{17}e^0 \right)^{1/3} \implies \text{cte} = \frac{139}{17}.$$

Temos, então, a solução

$$x = \sqrt[3]{\frac{139e^{15t} - 3e^{-2t}}{17}}$$

para o *pvi*, com domínio dado por $I = \mathbb{R}$.

IV. **HOMOGÊNEA**

Para esse tipo de *edo*, $f(t, x) = F\left(\frac{x}{t}\right)$ e

$$\begin{aligned} v &= \frac{x}{t} \implies x = tv \text{ e } x' = F(v) \\ &\implies v + tv' = x' = F(v) \\ &\implies tv' = F(v) - v \\ &\implies \frac{1}{F(v) - v} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{t}' \end{aligned}$$

que é uma *edo* separável. Além disso, note que, nenhuma solução $x = x(t)$ pode interceptar o eixo vertical $t = 0$.

EXEMPLO

$$\begin{cases} txx' + 4t^2 + x^2 = 0; \\ x(2) = -7. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{t}x' &= -4 - \left(\frac{x}{t}\right)^2 \implies vx' = -4 - v^2 \\ &\implies v(v + tv') = -4 - v^2 \\ &\implies vt v' = -4 - 2v^2 \\ &\implies t \frac{dv}{dt} = -\frac{4 + 2v^2}{v} \\ &\implies \frac{v}{4 + 2v^2} dv = -\frac{1}{t} dt \\ &\implies \frac{1}{4} \ln(4 + 2v^2) = -\ln t + \text{cte}_1 \\ &\implies (4 + 2v^2)^{1/4} = \text{cte}_2 \frac{1}{t} \\ &\implies 4 + 2v^2 = \frac{\text{cte}}{t^4} \\ &\implies v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{cte}}{t^4} - 4 \right) \\ &\implies x^2 = \frac{1}{2} t^2 \left(\frac{\text{cte} - 4t^4}{t^4} \right). \end{aligned}$$

Na sexta implicação, de cima para baixo, a condição inicial $t_0 = 2$ elimina a possibilidade do uso de $\ln(-t)$ e indica que o domínio de $x(t)$ só contém $t > 0$. Ainda, pela condição inicial, temos

$$(-7)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \left(\frac{\text{cte} - 4 \cdot 2^4}{2^4} \right) \implies \text{cte} = 456.$$

Portanto, como $x_0 = -7$ e $t > 0$, temos

$$x = -\sqrt{\frac{228 - 2t^4}{t^2}},$$

onde

$$\begin{aligned} 228 - 2t^4 \geq 0 &\implies t^4 \leq 114 \\ &\implies 0 < t \leq \sqrt[4]{114}. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Teoria de II ordem - equação característica

Uma *edo linear de segunda ordem* é dada por

$$a(t)\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x(t) = d(t), \quad (2.1)$$

onde as funções reais a , b , c e d são contínuas num intervalo I , $a \neq 0$ e qualquer *solução* de (2.1), ou seja, qualquer função duas vezes diferenciável $x(t)$ que satisfaça a equação (2.1), também é contínua em I .

LEI DE NEWTON

Considerando x'' , x' e x como a aceleração, a velocidade e a posição de um objeto de massa unitária m no instante t , respectivamente, e uma força

$$F(t, x, x') = -\frac{b}{a}x' - \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$$

atuando nesse objeto, a *edo* (2.1), reescrita como

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

representa a *segunda lei de Newton*.

2.1 Edo linear de II ordem homogênea

A *edo* (2.1) é dita *homogênea* se $d(t) = 0$ para cada $t \in I$, ou seja,

$$a(t)\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x(t) = 0. \quad (2.2)$$

EXEMPLO

$x'' + x' - 6x = 0$ é homogênea, com $a(t) = b(t) = 1$ e $c(t) = -6$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

2.1.1 Linearidade das soluções

Combinações lineares de soluções da equação (2.2) também são soluções dessa equação, isto é, se x_1 e x_2 satisfazem (2.2), então

$$x = cte_1 x_1 + cte_2 x_2 \quad (2.3)$$

também a satisfaz.

De fato, Se

$$ax_1'' + bx_1' + cx_1 = 0 \text{ e } ax_2'' + bx_2' + cx_2 = 0,$$

então, pela *linearidade* das derivadas do “cálculo 1”,

$$\begin{aligned} ax'' + bx' + cx &= a(cte_1 x_1 + cte_2 x_2)'' + b(cte_1 x_1 + cte_2 x_2)' + c(cte_1 x_1 + cte_2 x_2) \\ &= cte_1 (ax_1'' + bx_1' + cx_1) + cte_2 (ax_2'' + bx_2' + cx_2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, x também satisfaz (2.2).

2.1.2 LD e LI

Duas funções são ditas LD quando são múltiplas escalares uma da outra. Caso contrário, são ditas LI.

EXEMPLOS

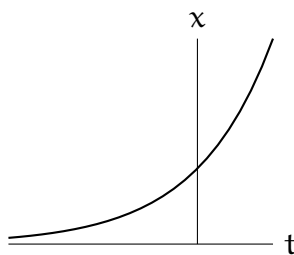
- $x_1(t) = t^2$ e $x_2(t) = \frac{t^2}{2}$ são LD pois $x_1 = 2x_2$.
- $x_1 = e^t$ e $x_2 = te^t$ são LI. De fato, supondo serem LD, existe uma constante α tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_1 = \alpha x_2 &\implies e^t = \alpha te^t \\ &\implies (\alpha t - 1)e^t = 0 \\ &\implies \alpha t = 1, \end{aligned}$$

que não é uma proposição verdadeira para, por exemplo, $t = 0$.

Note que, a terceira implicação, de cima para baixo, segue de $e^t \neq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, conforme a figura 2.1.

Figura 2.1: A reta $x = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $x = e^t$



Portanto, para quaisquer $r, t \in \mathbb{R}$, com r fixo e t variável,

$$e^{rt} = (e^t)^r \neq 0$$

e, analogamente, e^{rt} e te^{rt} são LI.

2.1.3 Solução geral

Via *álgebra linear*, demonstra-se que, se x_1 e x_2 são soluções LI da equação (2.2),¹ então qualquer outra solução dessa equação é dada por (2.3).²

Agora, sejam a, b, c e $r \neq 0$ constantes e suponha que $x(t) = e^{rt}$, para cada $t \in \mathbb{R}$, é solução da equação (2.2). Portanto, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 &\iff (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \\ &\iff ar^2 + br + c = 0, \end{aligned}$$

chamada de *equação característica* de (2.2), com raízes dadas por

$$r_{\pm} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Analisaremos os seguintes casos:

I. $b^2 - 4ac > 0$

Nesse caso, r_{\pm} são reais e distintas e $x_{\pm}(t) = e^{r_{\pm}t}$ são soluções LI de (2.2).³ Portanto, simplificando a notação dos índices via $\{+, -\} = \{1, 2\}$,

$$x(t) = cte_1e^{r_1t} + cte_2e^{r_2t}$$

é uma solução geral de (2.2), conforme (2.3).

EXEMPLOS

1. Para $x'' + x' - 6x = 0$, como $a = b = 1$ e $c = -6$, $r^2 + r - 6 = 0$. Portanto, como $r \in \{-3, 2\}$,

$$x(t) = cte_1e^{2t} + cte_2e^{-3t}$$

é uma solução geral de $x'' + x' - 6x = 0$.

¹Cf. p. 19.

²Cf. p. 20.

³De fato, supondo serem LD, existe alguma constante α tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{r_+t} = \alpha e^{r_-t} \iff e^{(r_+ - r_-)t} = \alpha,$$

que não é uma proposição verdadeira pois, como $r_+ - r_- \neq 0$, a exponencial do primeiro membro assume infinitos valores, enquanto α , no segundo membro, é constante.

2. Para $3x'' + x' - x = 0$, como $a = 3$ e $b = 1$ e $c = -1$, $3r^2 + r - 1 = 0$. Portanto, como

$$r \in \left\{ \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \right\},$$

$$x(t) = cte_1 e^{\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{6}\right)t} + cte_2 e^{\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{6}\right)t}$$

é uma solução geral de $3x'' + x' - x = 0$.

II. $b^2 - 4ac = 0$

Nesse caso, r_- e r_+ são raízes reais e iguais a

$$r = -\frac{b}{2a} \quad (2.4)$$

e $x_1(t) = e^{rt}$, $t \in \mathbb{R}$, é solução de (2.2).⁴

Verificaremos, agora, que $x_2(t) = te^{rt}$, $t \in \mathbb{R}$, também satisfaz (2.2). De fato,

$$\begin{aligned} ax_2'' + bx_2' + cx_2 &= a(2re^{rt} + r^2te^{rt}) + b(e^{rt} + rte^{rt}) + cte^{rt} \\ &= e^{rt}(2ar + b) + te^{rt}(ar^2 + br + c) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois (2.4) é raiz da equação $ar^2 + br + c = 0$. Por fim, como x_1 e x_2 são LI,⁵

$$x(t) = cte_1 e^{rt} + cte_2 te^{rt}$$

é uma solução geral de (2.2).

EXEMPLO

Para $4x'' + 12x' + 9x = 0$, como $a = 4$, $b = 12$ e $c = 9$, $4r^2 + 12r + 9 = 0$. Portanto, como $r = -\frac{3}{2}$,

$$x(t) = cte_1 e^{-3t/2} + cte_2 te^{-3t/2}$$

é uma solução geral de $4x'' + 12x' + 9x = 0$.

III. $b^2 - 4ac < 0$

Nesse caso, para obter uma solução geral, precisamos de algumas propriedades das *exponenciais complexas*,⁶ inclusive da *fórmula de Euler*, dada por

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad (2.5)$$

⁴Cf. p. 19.

⁵Conforme demonstrado na subseção 2.1.2.

⁶Tal assunto é parte importante de um curso de *variáveis complexas* e, para uma rápida revisão do conjunto \mathbb{C} dos *números complexos*, confira meu livro, *LIÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR*, disponibilizado em www.ufpr.br/~jrrb.

onde o quadrado da *unidade imaginária* é igual ao número real -1 , ou seja, $i \in \mathbb{C}$ e

$$i^2 = -1 \in \mathbb{R}.$$

Além disso, as raízes da equação característica são dadas por

$$r_{\pm} = \alpha \pm i\beta,$$

onde

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \text{ e } \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a},$$

e, analogamente ao caso I,⁷ $x_{\pm} = e^{r_{\pm}t}$ são soluções LI de (2.2),⁸ acarretando que

$$x(t) = cte_1 e^{r_1 t} + cte_2 e^{r_2 t}$$

é uma solução geral de (2.2) em \mathbb{C} .⁹ Assim, pelas propriedades supracitadas e via (2.5), uma solução geral de (2.2) em \mathbb{R} é dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= cte_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + cte_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= cte_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} + cte_2 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} \\ &= e^{\alpha t} (cte_1 e^{i\beta t} + cte_2 e^{-i\beta t}) \\ &= e^{\alpha t} (cte_1 (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) + cte_2 (\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t)) \\ &= e^{\alpha t} ((cte_1 + cte_2) \cos \beta t + i (cte_1 - cte_2) \operatorname{sen} \beta t) \\ &= e^{\alpha t} (cte_I \cos \beta t + cte_{II} \operatorname{sen} \beta t), \end{aligned}$$

onde $cte_I = cte_1 + cte_2$ e $cte_{II} = i(cte_1 - cte_2)$, e, como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, podemos considerar constantes cte_I e cte_{II} reais.

EXEMPLO

Para $x'' - 6x' + 13x = 0$, como $a = 1$, $b = -6$ e $c = 13$, $r^2 - 6r + 13 = 0$. Portanto, como $r_{\pm} = 3 \pm 2i$, ou seja, $\alpha = 3$ e $\beta = 2$,

$$x(t) = e^{3t} (cte_I \cos 2t + cte_{II} \operatorname{sen} 2t)$$

é uma solução geral de $x'' - 6x' + 13x = 0$.

TEU PARA UMA EDO LINEAR DE II ORDEM

⁷Cf. p. 21.

⁸Cf. p. 19.

⁹Como no caso I supracitado, para simplificar a notação dos índices, denotamos

$$\{-, +\} = \{1, 2\}.$$

Assim como para as equações de I ordem do capítulo 1, existe uma única solução para o seguinte *pvi*:

$$\begin{cases} a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0; \\ x(t_0) = x_0; \\ x'(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Note que, juntamente com (2.2), temos, agora, duas condições iniciais: “posição e velocidade em $t = t_0$ unidades de tempo”.

EXEMPLOS

1.

$$\begin{cases} x'' + x' - 6x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

Uma solução geral da *edo*, conforme o caso I da subseção 2.1.3,¹⁰ é dada por

$$x(t) = cte_1 e^{2t} + cte_2 e^{-3t}, t \in \mathbb{R}.$$

Essa solução, juntamente com

$$x'(t) = 2 cte_1 e^{2t} - 3 cte_2 e^{-3t}, t \in \mathbb{R},$$

e as condições iniciais do *pvi*, determinam cte_1 e cte_2 . De fato, de

$$\begin{cases} cte_1 + cte_2 = x(0) = 0, \\ 2 cte_1 - 3 cte_2 = x'(0) = 1, \end{cases}$$

temos $cte_1 = \frac{1}{5}$ e $cte_2 = -\frac{1}{5}$. Portanto, a solução do *pvi* é dada por

$$x(t) = \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{2}{5} e^{-3t}, t \in \mathbb{R}.$$

2. **SISTEMA MASSA-MOLA SEM FORÇAMENTO**¹¹

$$\begin{cases} x'' + x = 0; \\ x(0) = 2; \\ x'(0) = 3. \end{cases}$$

Como $r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i$, uma solução geral da *edo* é dada por

$$x(t) = cte_I \cos t + cte_{II} \sin t, t \in \mathbb{R}.$$

Essa solução, juntamente com

$$x'(t) = -cte_I \sin t + cte_{II} \cos t, t \in \mathbb{R},$$

e as condições iniciais do *pvi*, determinam cte_I e cte_{II} . De fato, como

$$\begin{cases} cte_I = x(0) = 2, \\ cte_{II} = x'(0) = 3, \end{cases}$$

a solução do *pvi* é dada por

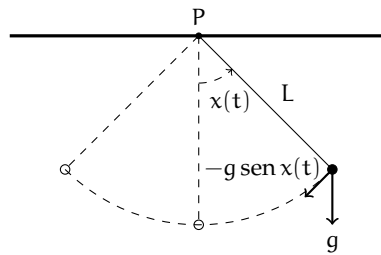
$$x(t) = 2 \cos t + 3 \sin t, t \in \mathbb{R}.$$

¹⁰Cf. p. 21.

¹¹Na figura 4.4, página 81, está ilustrado um sistema massa-mola com forçamento.

3. PÊNDULO SIMPLES

Figura 2.2: Pêndulo simples



Conforme a figura 2.2, considere um pêndulo oscilando livremente, sem sofrer resistência do ar, em torno de um ponto fixo P , onde não há atrito. O pêndulo é formado por uma haste rígida de massa desprezível, medindo L unidades de comprimento, conectada a uma massa unitária puntiforme, fixada na extremidade oposta a P , e oscila sob a ação da aceleração da gravidade g . Seja $x(t)$ a *amplitude* do pêndulo, ou seja, o ângulo entre o pêndulo e a sua posição vertical de repouso.¹² Assim, a força atuando sobre a massa supracitada é dada por

$$-g \operatorname{sen} x(t).$$

O *período* T é o tempo necessário para o pêndulo completar um *ciclo*, isto é, uma oscilação para a esquerda seguida de uma para a direita. Para oscilações “suficientemente pequenas”, temos $\operatorname{sen} x(t) \approx x(t)$, ou seja,

$$-g \operatorname{sen} x(t) \approx -gx(t),$$

e

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.¹³$$

Pela *segunda lei de Newton*, como esse movimento oscilatório depende apenas de g e L , temos a *edo*

$$Lx'' + g \operatorname{sen} x(t) = 0,$$

que, para oscilações “suficientemente pequenas”, pode ser escrita como

$$Lx'' + gx = 0,$$

ou seja,

$$x'' + \frac{g}{L}x = 0,$$

com solução geral dada por

$$x(t) = \operatorname{cte}_I \cos \left(\left(\sqrt{g/L} \right) t \right) + \operatorname{cte}_{II} \operatorname{sen} \left(\left(\sqrt{g/L} \right) t \right), t \in \mathbb{R}.$$

¹²Caso houvesse atrito e/ou resistência do ar, a amplitude diminuiria com o tempo, até que o movimento oscilatório cessasse na posição de repouso do pêndulo.

¹³Pesquise no *Google!*

Portanto, para condições iniciais x_0 “suficientemente pequenas”, podemos considerar o *pvi*

$$\begin{cases} x'' + \frac{g}{L}x = 0; \\ x(T) = x_0; \\ x'(T) = 0. \end{cases}$$

Utilizando a solução geral supracitada, juntamente com as condições iniciais desse *pvi*, temos

$$\begin{cases} \text{cte}_I \cos(T\sqrt{g/L}) + \text{cte}_{II} \sin(T\sqrt{g/L}) = x_0; \\ \sqrt{g/L}(-\text{cte}_I \sin(T\sqrt{g/L})) + \sqrt{g/L}(\text{cte}_{II} \cos(T\sqrt{g/L})) = 0, \text{ ou seja,} \\ -\text{cte}_I \sin(T\sqrt{g/L}) + \text{cte}_{II} \cos(T\sqrt{g/L}) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Multiplicando a primeira equação, de cima para baixo, de (2.6) por $\cos(T\sqrt{g/L})$, a última por $-\sin(T\sqrt{g/L})$ e somando as equações obtidas dessas multiplicações, obtemos

$$\text{cte}_I = x_0 \cos(T\sqrt{g/L}).$$

Substituindo essa constante na última equação de (2.6), temos

$$-x_0 \sin(T\sqrt{g/L}) + \text{cte}_{II} = 0.$$

Assim, a solução do *pvi* supracitado é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \left(\cos(T\sqrt{g/L}) \cos\left(\left(\sqrt{g/L}\right)t\right) + \sin(T\sqrt{g/L}) \sin\left(\left(\sqrt{g/L}\right)t\right) \right) \\ &= x_0 \cos\left((T-t)\sqrt{g/L}\right). \end{aligned}$$

2.2 Edo linear de II ordem não homogênea

Essa *edo* é dada por (2.1),¹⁴ agora com $d \neq 0$.

SOLUÇÃO GERAL

Se x_h é uma solução geral da *edo* homogênea associada à *edo* (2.1), isto é, solução geral de (2.2),¹⁵ e x_p é uma solução particular de (2.1), então

$$x = x_h + x_p \quad (2.7)$$

é uma solução geral de (2.1).

De fato,

$$\begin{aligned} ax'' + bx' + cx &= a(x_h + x_p)'' + b(x_h + x_p)' + c(x_h + x_p) \\ &= a(x_h'' + x_p'') + b(x_h' + x_p') + c(x_h + x_p) \\ &= ax_h'' + bx_h' + cx_h + ax_p'' + bx_p' + cx_p \\ &= 0 + d \\ &= d. \end{aligned}$$

¹⁴Cf. p. 19.

¹⁵Idem.

SENDO a, b E c CONSTANTES, COMO OBTER x_p ?

Considere, por exemplo, $a = 1, b = -3$ e $c = 2$, ou seja,

$$x'' - 3x' + 2x = d,$$

e $d(t)$ dada por uma das seguintes funções:

1. e^{3t} ;
2. $2t^2 + 4t + 1$;
3. $\cos t$;
4. $e^{3t} + 2t^2 + 4t + 1 + \cos t$.

Para cada d , como

$$\begin{aligned} x'' - 3x' + 2x = 0 &\iff r^2 - 3r + 2 = 0 \\ &\iff r \in \{1, 2\}, \end{aligned}$$

uma solução geral é dada por (2.7), com

$$x_h = cte_1 e^t + cte_2 e^{2t}.$$

Agora, para determinar uma solução particular x_p , dependendo da d considerada, usaremos o método seguinte:

2.2.1 Método dos coeficientes indeterminados, ou, a serem determinados

Nesse método, testamos “candidatas” para x_p , conforme o tipo de função d dada.

1. Para $d(t) = e^{3t}$, testaremos $x_p = Ae^{3t}$,¹⁶ onde A é o coeficiente a ser determinado. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_p'' - 3x_p' + 2x_p = e^{3t} &\implies (Ae^{3t})'' - 3(Ae^{3t})' + 2Ae^{3t} = e^{3t} \\ &\implies 9Ae^{3t} - 3(3Ae^{3t}) + 2Ae^{3t} = e^{3t} \\ &\implies (2A - 1)e^{3t} = 0. \end{aligned}$$

Então, $2A - 1 = 0$, ou seja, $A = \frac{1}{2}$. Portanto, uma solução geral de $x'' - 3x' + 2x = e^{3t}$ é dada por

$$x = cte_1 e^t + cte_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}, t \in \mathbb{R}.$$

¹⁶Por quê?

2. Para $d(t) = 2t^2 + 4t + 1$, testaremos $x_p = At^2 + Bt + C$,¹⁷ onde A , B e C são os coeficientes a serem determinados. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_p'' - 3x_p' + 2x_p = 2t^2 + 4t + 1 &\implies (At^2 + Bt + C)'' - 3(At^2 + Bt + C)' \\ &\quad + 2(At^2 + Bt + C) = 2t^2 + 4t + 1 \\ &\implies 2A - 3(2At + B) + 2At^2 + 2Bt + 2C = 2t^2 + 4t + 1 \\ &\implies (2A - 2)t^2 + (-6A + 2B - 4)t \\ &\quad + 2A - 3B + 2C - 1 = 0. \end{aligned}$$

Então, $2A = 2$, $-6A + 2B = 4$ e $2A - 3B + 2C = 1$, ou seja, $A = 1$, $B = 5$ e $C = 7$. Portanto, uma solução geral de $x'' - 3x' + 2x = 2t^2 + 4t + 1$ é dada por

$$x = cte_1 e^t + cte_2 e^{2t} + t^2 + 5t + 7, t \in \mathbb{R}.$$

3. Para $d(t) = \cos t$, testaremos $x_p = A \cos t + B \sin t$,¹⁸ onde A e B são os coeficientes a serem determinados. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_p'' - 3x_p' + 2x_p = \cos t &\implies (A \cos t + B \sin t)'' - 3(A \cos t + B \sin t)' \\ &\quad + 2(A \cos t + B \sin t) = \cos t \\ &\implies -A \cos t - B \sin t - 3(-A \sin t + B \cos t) \\ &\quad + 2A \cos t + 2B \sin t = \cos t \\ &\implies (A - 3B - 1) \cos t + (3A + B) \sin t = 0. \end{aligned}$$

Então, $A - 3B = 1$ e $3A + B = 0$, ou seja, $A = \frac{1}{10}$ e $B = -\frac{3}{10}$. Portanto, uma solução geral de $x'' - 3x' + 2x = \cos t$ é dada por

$$x = cte_1 e^t + cte_2 e^{2t} + \frac{1}{10} \cos t - \frac{3}{10} \sin t, t \in \mathbb{R}.$$

4. Analogamente aos itens 1, 2 e 3 da subseção 2.2.1, para $d(t) = e^{3t} + 2t^2 + 4t + 1 + \cos t$, uma "candidata" para solução particular pode ser escrita como

$$x_p = Ae^{3t} + Bt^2 + Ct + D + E \cos t + F \sin t.$$

A resolução do sistema nas variáveis A , B , C , D , E e F , fica como exercício.¹⁹

EXEMPLO

Considere a *edo*

$$x'' - 6x' + 9x = e^{3t}. \quad (2.8)$$

¹⁷Idem.

¹⁸Idem.

¹⁹Resolvendo o sistema supracitado, obtemos

$$A = \frac{1}{2}, B = 1, C = 5, D = 7, E = \frac{1}{10} \text{ e } F = -\frac{3}{10}.$$

Portanto, uma solução particular do item 4 é a soma das soluções particulares obtidas nos itens 1, 2 e 3 supracitados.

Assim, como

$$\begin{aligned}x'' - 6x' + 9x = 0 &\iff r^2 - 6r + 9 = 0 \\ &\iff r = 3,\end{aligned}$$

uma solução geral da equação homogênea associada a (2.8) é dada por

$$x_h = \text{cte}_1 e^{3t} + \text{cte}_2 t e^{3t}.$$

Agora, escolhendo $x_p = Ae^{3t}$ como “candidata” a uma solução particular de (2.8), temos, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}x_p'' - 6x_p' + 9x_p = e^{3t} &\implies 9Ae^{3t} - 6(3Ae^{3t}) + 9Ae^{3t} = e^{3t} \\ &\implies (9 - 18 + 9 - 1)e^{3t} = 0 \\ &\implies e^{3t} = 0,\end{aligned}$$

que é uma igualdade inválida. Tentaremos, então,

$$x_p(t) = y(t)e^{3t},$$

onde y é uma função a ser determinada. Logo, para cada t admissível,

$$\begin{aligned}x_p'' - 6x_p' + 9x_p = e^{3t} &\implies (y'' + 6y' + 9y)e^{3t} - 6(y' + 3y)e^{3t} + 9ye^{3t} = e^{3t} \\ &\implies (y'' - 1)e^{3t} = 0 \\ &\implies y'' = 1 \\ &\implies y'(t) = t + \text{cte}_3 \\ &\implies y(t) = \frac{t^2}{2} + \text{cte}_3 t + \text{cte}_4.\end{aligned}$$

Para uma solução particular, considere $\text{cte}_i = 0$, $i = 3, 4$. Portanto, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$x_p(t) = \frac{t^2}{2} e^{3t}. \quad (2.9)$$

Agora, estudaremos outro método para obter uma solução particular, que também funciona caso $d(t)$ admita termos que não sejam exponenciais, polinomiais ou trigonométricos.

2.2.2 Método de variação de parâmetros

WRONSKIANO DE $x_1(t)$ E $x_2(t)$

É definido como o determinante

$$W(t) := \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, com $x_1(t)$ e $x_2(t)$ diferenciáveis.

EXEMPLO

Para cada $t \in \mathbb{R}$, se $x_1(t) = e^{3t}$ e $x_2(t) = te^{3t}$, então

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t} + 3te^{3t} \end{vmatrix} \\ &= e^{3t}(e^{3t} + te^{3t}) - te^{3t}e^{3t} \\ &= e^{6t}. \end{aligned}$$

FÓRMULA DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Se x_1 e x_2 são soluções li da equação homogênea (2.2) e $W(t)$ é o wronskiano dessas funções, pode ser demonstrado que

$$x_p(t) = x_1(t) \left(\int \frac{x_2(t)(-d(t))}{a(t)W(t)} dt \right) + x_2(t) \left(\int \frac{x_1(t)d(t)}{a(t)W(t)} dt \right)$$

é uma solução particular de (2.1).²⁰

EXEMPLOS

1. Para a *edo* (2.8),²¹

$$x(t) = cte_1 e^{3t} + cte_2 te^{3t} + x_p(t)$$

é solução geral e x_p é uma de suas soluções particulares. Como $a(t) = 1$ e, pelo exemplo supracitado, $W(t) = e^{6t}$, temos

$$\begin{aligned} x_p(t) &= e^{3t} \left(\int \frac{te^{3t}(-e^{3t})}{e^{6t}} dt \right) + te^{3t} \left(\int \frac{e^{3t}e^{3t}}{e^{6t}} dt \right) \\ &= e^{3t} \left(- \int t dt \right) + te^{3t} \left(\int 1 dt \right) \\ &= e^{3t} \left(-\frac{t^2}{2} \right) + te^{3t}t \\ &= \frac{t^2}{2} e^{3t}, \end{aligned}$$

coincidindo com (2.9).²²

2. Para a *edo*

$$x'' + x = \sec t,$$

como $r^2 + 1 = 0$, isto é, $r = \pm i$, ou seja, $r = 0 \pm 1 \cdot i$,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{0 \cdot t} (cte_I \cos(1 \cdot t) + cte_{II} \sen(1 \cdot t)) + x_p(t) \\ &= cte_I \cos t + cte_{II} \sen t + x_p(t) \end{aligned}$$

²⁰Cf. p. 19.

²¹Cf. p. 28.

²²Cf. p. 29.

é solução geral e x_p é uma de suas soluções particulares. Como $a(t) = 1$ e $W(t) = 1$,²³ temos

$$\begin{aligned}x_p(t) &= \cos t \left(\int \sin t (-\sec t) dt \right) + \sin t \left(\int \cos t \sec t dt \right) \\&= \cos t \left(\int (-\tan t) dt \right) + \sin t \left(\int 1 dt \right) \\&= \cos t \ln |\cos t| + t \sin t.\end{aligned}$$

Na segunda igualdade, utilizamos $\sec t = \frac{1}{\cos t}$. Na última, de cima para baixo, utilizamos

$$\begin{aligned}\int (-\tan t) dt &= \int \frac{(-\sin t)}{\cos t} dt \quad (u = \cos t \implies du = -\sin t dt) \\&= \int \frac{1}{u} du \\&= \ln |u| + cte \\&= \ln |\cos t| + cte.\end{aligned}$$

Para uma solução particular, considere $cte = 0$.

²³Verifique!

Capítulo 3

Teoria de II ordem - séries de Taylor

3.1 Séries numéricas

Seja $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ uma sequência numérica. A expressão

$$a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (3.1)$$

é uma *série* associada à sequência supracitada. Nesse caso,

$$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

é a *n-ésima soma parcial* dessa série.

EXEMPLO

Para a *progressão geométrica* (pg)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad (3.2)$$

temos as seguintes somas parciais:

$$s_1 = \frac{1}{2} = 0,5, \quad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,75, \quad s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0,875, \quad \dots$$

OBSERVAÇÃO

O primeiro índice de uma série pode ser algum inteiro não-negativo $n_0 \neq 1$. Nesse caso, podemos representá-la por

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

EXEMPLO

Acrescentando o número 1 a (3.2), temos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Retirando o número 1/2 de (3.2), temos

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

3.1.1 Convergência ou divergência

Suponha que a sequência

$$(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$$

de somas parciais converge para o número s , ou seja, existe o limite dessa sequência e esse limite é igual a s . Nesse caso, dizemos que a série $a_1 + a_2 + \cdots$ converge (para s) e denotamos

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \cdots + a_n) \\ &=: \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Caso o limite s não exista, $a_1 + a_2 + \cdots$ é dita *divergente*.

EXEMPLO

Considere a pg

$$(a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, aq^n, \dots)$$

com razão $q \neq 0$ e primeiro termo $a_1 = a \neq 0$.¹ Temos, então, os seguintes casos:

DIVERGÊNCIA PARA $|q| \geq 1$

Nesse caso, temos os seguintes subcasos:

$$q = 1$$

Aqui, as somas parciais são dadas por

$$s_1 = a_1 = a, \quad s_2 = a_1 + a_2 = 2a, \quad \dots, \quad s_n = a_1 + \cdots + a_n = na, \quad \dots$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots &= \lim_{n \rightarrow \infty} na \\ &= \begin{cases} \infty & \text{se } a > 0; \\ -\infty & \text{se } a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

¹Assim, o n -ésimo termo é $a_n = aq^{n-1}$.

$q = -1$

Aqui, as somas parciais são dadas por

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = a, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = a + (-a) = 0, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 0 + a = a, \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a + (-a) = 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$s_n = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Obviamente, essa sequência diverge.

 $|q| > 1$

Por um lado, como

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1},$$

temos

$$qs_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Assim, da diferença $s_n - qs_n$, temos

$$(1 - q)s_n = a(1 - q^n).$$

Logo, como $q \neq 1$,

$$s_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a + aq + aq^2 + \cdots &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \end{aligned} \quad (3.3)$$

é divergente. De fato, $|q^n|$ pode assumir valores tão grandes quanto se queira.**CONVERGÊNCIA PARA $|q| < 1$**

Nesse caso, como

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n) &= 1, \\ a + aq + aq^2 + \cdots &= \frac{a}{1 - q}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

por (3.3).

EXEMPLO

Para os dois primeiros exemplos desse capítulo, temos, via (3.4),

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1/4}{1 - 1/2} = 1/2.$$

Podemos, ainda, utilizar esse exemplo para ilustrar o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 1

A convergência/divergência da série (3.1), página 33, não é alterada pela exclusão de um número finito de seus termos e nem pela inclusão de um número finito de outros termos.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 1

Seja σ_k a soma de k termos da série (3.1). Assim, se $s_{n,k} = s_n - \sigma_k$, $n = 1, 2, \dots$, a existência de $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,k}$ é equivalente a existência de $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

PROPOSIÇÃO 2

Considere α constante e um número s tal que $a_1 + a_2 + \dots = s$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha a_1 + \alpha a_2 + \dots &= \alpha s \\ &= \alpha (a_1 + a_2 + \dots). \end{aligned}$$

EXEMPLO

Pelo exemplo anterior, temos

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + \dots &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \\ &= 2 \\ &= 2 \cdot 1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right). \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 2

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha a_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \right) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ &= \alpha s. \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 3

Sejam s e S números tais que $a_1 + a_2 + \dots = s$ e $A_1 + A_2 + \dots = S$. Então,

$$\begin{aligned} a_1 + A_1 + a_2 + A_2 + \dots &= s + S \\ &= (a_1 + a_2 + \dots) + (A_1 + A_2 + \dots). \end{aligned}$$

EXEMPLO

Note que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \\ &= 1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right). \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 3

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + A_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (a_i + A_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n A_i \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \\ &= s + S. \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 4

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Portanto, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

EXEMPLO

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots$$

diverge pois

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2n+1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2} \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4

Se $S_1 = 0$ e $S_n = s_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

é igual a um (único) número s . Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - S_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= s - s \\ &= 0.\end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 5

A recíproca da proposição 4 não é verdadeira, ou seja, é possível que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja divergente.

EXEMPLO

Embora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \quad (3.5)$$

diverge. De fato, como

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \quad \text{etc,}$$

(3.5) não pode ser maior que a série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots,$$

que é divergente.

PROPOSIÇÃO 6

Considere $0 \leq a_n \leq A_n$ para cada índice $n \geq n_0$. Assim, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge se $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n$ converge.

EXEMPLO

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

converge. De fato, como $(1/n)^n \leq (1/2)^n$ para cada inteiro $n > 1$, temos

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2}.$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 6

Como $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n$ converge, existe um número S tal que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=n_0}^{\infty} A_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n_0}^n A_i. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Além disso, para cada índice $n \geq n_0$, como $0 \leq a_n \leq A_n$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq s_n = a_1 + \dots + a_n \\ &\leq A_1 + \dots + A_n =: S_n \\ &\leq S, \end{aligned}$$

por (3.6) e pela monotonicidade da sequência $(S_{n_0}, S_{n_0+1}, \dots)$.² Portanto, a sequência crescente $(s_{n_0}, s_{n_0+1}, \dots)$ também é limitada. Assim, existe um número s tal que

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \\ &= \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 7

Considere $0 \leq A_n \leq a_n$ para cada índice $n \geq n_0$. Assim, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge se $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n$ diverge.

²Essa sequência é crescente.

EXEMPLO

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$ diverge. De fato, $1/n \leq 1/\sqrt{n}$, para cada inteiro positivo n , e a série (3.5) diverge.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 7

Suponha que $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge. Logo, pela proposição 6, $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n$ converge.

PROPOSIÇÃO 8: TESTE DA RAZÃO (RESPECTIVAMENTE, RAIZ)

Sejam $a_n > 0$ para todo índice $n \geq n_0$ e L um número tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad (\text{respectivamente, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L).$$

Então,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{converge se } L < 1; \\ \text{diverge se } L > 1; \\ \text{pode convergir ou divergir se } L = 1. \end{cases}$$

EXEMPLOS

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ converge.³ De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1/(n+1)!}{1/n!} \\ &= \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{n!}{(n+1)n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

³De fato, pela proposição 6, basta observar que

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ para } n \geq 1,$$

e a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

converge.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots$ diverge.⁴ De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} \\ &= \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 2 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots$ converge. De fato,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} \\ &= \frac{n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$ converge ou diverge?

⁴De fato, pela proposição 7, basta observar que

$$\frac{1}{n} < \frac{2^n}{n}, \text{ para } n \geq 1,$$

e a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.

Aqui, o teste da razão é inconclusivo. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \\ &= \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)} \\ &= \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Então, pela proposição 4, a série é divergente.

Outro modo de verificar que a série diverge, é observar que, para cada inteiro positivo n , $a_n = \frac{n}{n+1} < 1$ e

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \\ &= 1 + \frac{1}{n^2 + 2n} \\ &> 1, \end{aligned}$$

isto é, $a_{n+1} > a_n$. Assim, como

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots < 1$$

é uma seqüência de termos positivos, estritamente crescente e limitada superiormente por 1, existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in (0, 1].$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ diverge, pela proposição 4.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$ converge ou diverge?

Aqui, o teste da razão é inconclusivo. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} \\ &= \frac{1}{\frac{n+2}{n}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} \rightarrow 1\end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, como, para cada inteiro positivo n ,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \\ &= 1,\end{aligned}$$

isto é, a série converge para 1.

PROPOSIÇÃO 9: TESTE DE LEIBNIZ

Considerem válidas as seguintes condições:

1. $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots > 0$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge para um número no intervalo $(0, a_1]$, isto é,

$$0 < a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \leq a_1.$$

EXEMPLO

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ converge para um número em $(0, 1]$. De fato, as duas condições da proposição 9 são satisfeitas para $a_n = \frac{1}{n}$.

3.2 Séries de funções

Considere uma sequência de funções, digamos $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$, e um conjunto $I \neq \emptyset$ contido no domínio de todas essas funções.

Note que, para cada $t \in I$,

$$f_1(t) + f_2(t) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

é uma série numérica. Assim, todos os resultados apresentados (para as séries numéricas) permanecem válidos para $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$, para cada $t \in I$. Portanto, caso exista um número $f(t)$, para cada $t \in I$, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = f(t),$$

diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge para f (em I) e denotaremos $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$. Nesse caso, I é dito domínio de convergência de f .

3.2.1 Exemplo fundamental: série geométrica

$$\begin{aligned} 1 + t + t^2 + \dots + t^n + \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} t^m \\ &= \frac{1}{1-t}, \end{aligned}$$

para $|t| < 1$, isto é, $t \in I = (-1, 1)$.⁵ Por outro lado, a série geométrica é divergente para $|t| \geq 1$, ou seja, $t \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.⁶

EXEMPLOS

Utilizando a série geométrica, podemos obter representações em série de funções e I para:

1. $g(t) = \frac{1}{1+t^3}$;
2. $h(t) = \frac{2t^3}{1+t^3}$;
3. $\varphi(t) = \frac{t}{5-t}$;
4. $\phi(t) = \frac{t^2}{t-5}$.

De fato:

⁵Na segunda igualdade, utilizamos a mudança de índices $m = n - 1$. Na terceira, de cima para baixo, utilizamos (3.4), página 35.

⁶Cf. (3.3), página 35.

1. Se $u = -t^3$, então

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{1 - (-t^3)} \\ &= \frac{1}{1 - u} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{3n} \\ &= 1 - t^3 + t^6 - t^9 + \dots, \end{aligned}$$

para $t \in I = (-1, 1)$.⁷

2.

$$\begin{aligned} h(t) &= 2t^3 g(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n t^{3(n+1)} \\ &= 2t^3 - 2t^6 + 2t^9 - 2t^{12} + \dots, \end{aligned}$$

para $t \in I = (-1, 1)$.⁸

3. Se $v = \frac{t}{5}$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{t}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t}{5}} \\ &= v \cdot \frac{1}{1 - v} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{5}\right)^{n+1} \\ &= \frac{t}{5} + \frac{t^2}{25} + \frac{t^3}{75} + \dots, \end{aligned}$$

7

$$\begin{aligned} |t| < 1 &\implies |t|^3 < 1 \\ &\implies |t^3| < 1 \\ &\implies |-1| |t^3| < 1 \\ &\implies |-t^3| < 1 \\ &\implies |u| < 1. \end{aligned}$$

⁸Por definição, o domínio de convergência de h é igual ao de g .

para $t \in I = (-5, 5)$.⁹

4.

$$\begin{aligned}\phi(t) &= -t\varphi(t) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+2}}{5^{n+1}} \\ &= -\frac{t^2}{5} - \frac{t^3}{25} - \frac{t^4}{75} + \dots,\end{aligned}$$

para $t \in I = (-5, 5)$.¹⁰

3.2.2 Definição de convergência absoluta

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge absolutamente (em I), isto é, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ converge absolutamente, para todo $t \in I$, quando $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ converge (em I).

EXEMPLO

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen } nt}{2^n}$ converge absolutamente, para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, como, para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$|\text{sen } nt| \leq 1 \implies \left| \frac{\text{sen } nt}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n},$$

e $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ converge,

$$\left| \frac{\text{sen } t}{2} \right| + \left| \frac{\text{sen } 2t}{4} \right| + \dots$$

converge, para todo $t \in \mathbb{R}$, pela proposição 6 da seção 3.1.

Pode ser demonstrado que convergência absoluta implica em convergência.¹¹ Contudo, a recíproca não é verdadeira.

EXEMPLO

9

$$\begin{aligned}|t| < 5 &\implies \left| \frac{t}{5} \right| < 1 \\ &\implies |v| < 1.\end{aligned}$$

¹⁰Por definição, o domínio de convergência de ϕ é igual ao de φ .

¹¹Assim, a série do exemplo anterior converge.

No último exemplo da seção 3.1, vimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 1/n$ converge. Contudo, a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} 1/n|$ diverge.¹²

3.3 Séries de potências

Uma série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ é uma *série de potências em torno de t_0* quando

$$f_n(t) = a_n (t - t_0)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

isto é, quando a série é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = a_0 + a_1 (t - t_0) + a_2 (t - t_0)^2 + \dots$$

Nesse caso, I é chamado de *intervalo de convergência* se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = f(t) \quad \forall t \in I.$$

EXEMPLO

Para a série geométrica, página 44, temos $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ com $I = (-1, 1)$. Aqui, $f(t) = \frac{1}{1-t}$, $t_0 = 0$ e $a_n = 1$, para cada índice inteiro não negativo n .

OBSERVAÇÃO

Demonstra-se que, para $|t - t_0| < R$, se

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n \\ &= a_0 + a_1 (t - t_0) + a_2 (t - t_0)^2 + \dots, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t - t_0)^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2 (t - t_0) + 3a_3 (t - t_0)^2 + \dots \end{aligned} \tag{3.7}$$

EXEMPLO

¹²Confira (3.5), página 38.

Seja $x(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-t} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} (t^n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} \\ &= 1 + 2t + 3t^2 + \dots, \end{aligned}$$

para cada $t \in (-1, 1)$.

TEOREMA DE CONVERGÊNCIA

Se, para todo $t \in I$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$ converge, então I é, exatamente, um dos seguintes conjuntos:

1. $\{t_0\}$;
2. \mathbb{R} ;
3. $(t_0 - R, t_0 + R)$;
4. $[t_0 - R, t_0 + R)$;
5. $(t_0 - R, t_0 + R]$;
6. $[t_0 - R, t_0 + R]$.

Nesse caso, R é dito *raio de convergência* da série de potências e, por abuso de notação, $R = 0$ e $R = \infty$ para as condições 1 e 2, respectivamente.

EXEMPLO

Para a série geométrica, página 44, como $I = (0 - 1, 0 + 1)$, temos $t_0 = 0$ e $R = 1$.

TESTE DA RAZÃO

Considere que:

- $a_n \neq 0$, para $n \geq n_0$;
- $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (t - t_0)^{n+1}}{a_n (t - t_0)^n} \right| = |t - t_0| \cdot L.$$

Então, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$:

- converge absolutamente, para $|t - t_0| < \frac{1}{L}$;
- diverge, para $|t - t_0| > \frac{1}{L}$;
- pode convergir ou divergir, se $|t - t_0| = \frac{1}{L}$.

Note que, aqui, $R = \frac{1}{L}$.

EXEMPLOS

1. Considere a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n$. Assim, por um lado, como

$$\begin{aligned} \left| \frac{(-1)^{n+2}(n+1)(t-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}n(t-2)^n} \right| &= |-1| \left| \frac{n+1}{n} \right| |t-2| \\ &= |t-2| \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &\rightarrow |t-2| \cdot 1 \end{aligned}$$

se $n \rightarrow \infty$, segue que $L = 1$, $R = 1$ e a série dada converge em $(2-1, 2+1) = (1, 3)$ e diverge em $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$. Por outro lado, a série também diverge em $\{1, 3\}$. De fato:

- $t = 1$ acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} n \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} n \\ &= -(1 + 2 + 3 + 4 + \dots); \end{aligned}$$

- $t = 3$ acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n \\ &= 1 - 2 + 3 - 4 + \dots \end{aligned}$$

Pela proposição 4, seção 3.1, essas séries numéricas divergem.

Portanto, $I = (1, 3)$.

2. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n}$. Assim, por um lado, como

$$\begin{aligned} \left| \frac{(t+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{(t+1)^n} \right| &= \left| \frac{t+1}{2} \right| \cdot \left| \frac{n}{n+1} \right| \\ &= \frac{|t+1|}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &\rightarrow |t+1| \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

se $n \rightarrow \infty$, segue que $L = \frac{1}{2}$, $R = 2$ e a série dada converge em $(-1 - 2, -1 + 2) = (-3, 1)$ e diverge em $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$. Por outro lado, a série converge para $t = -3$ e diverge para $t = 1$. De fato:

- $t = -3$ acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \end{aligned}$$

que converge, pelo teste de Leibniz;

- $t = 1$ acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

que chamamos de série harmônica e verificamos ser divergente.

Portanto, $I = [-3, 1)$.

3. Considere a série $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)!(t-2)^n$. Assim, se $n \rightarrow \infty$, então

$$\begin{aligned} \left| \frac{(2(n+1))!(t-2)^{n+1}}{(2n)!(t-2)^n} \right| &= |t-2| \cdot \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\ &= |t-2| \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)((2n)!)}{(2n)!} \\ &= |t-2|(2n+2)(2n+1) \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

somente em $t = 2$. Portanto, $I = \{2\}$.

3.4 Séries de Taylor e funções analíticas

Se a função $f(t)$ pode ser representada por uma série de potências em torno de $t = t_0$, isto é, existe $R > 0$ tal que

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n \\ &= a_0 + a_1 (t-t_0) + a_2 (t-t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

para $|t-t_0| < R$, e tem derivadas de todas as ordens num intervalo contendo $(t_0 - R, t_0 + R)$, então:

- $f(t_0) = a_0 \implies a_0 = \frac{f^{(0)}(t_0)}{0!};$
- Como, via (3.7),¹³

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t - t_0)^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2 (t - t_0) + 3a_3 (t - t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

para $|t - t_0| < R$, temos

$$f'(t_0) = a_1 \implies a_1 = \frac{f^{(1)}(t_0)}{1!};$$

- Como, via (3.7),

$$\begin{aligned} f''(t) &= (f')'(t) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (t - t_0)^{n-2} \\ &= 2a_2 + 6a_3 (t - t_0) + 12(t - t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

para $|t - t_0| < R$, temos

$$f''(t_0) = 2a_2 \implies a_2 = \frac{f^{(2)}(t_0)}{2!};$$

- Como, via (3.7),

$$\begin{aligned} f'''(t) &= (f'')'(t) \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (t - t_0)^{n-3} \\ &= 6a_3 + 24(t - t_0) + 60(t - t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

para $|t - t_0| < R$, temos

$$f'''(t_0) = 6a_3 \implies a_3 = \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!};$$

- Repetindo esse procedimento para a n -ésima derivada de f , demonstra-se, por *indução finita*, que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n \\ &= \frac{f(t_0)}{0!} + \frac{f'(t_0)}{1!} (t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!} (t - t_0)^2 + \dots \end{aligned} \tag{3.8}$$

¹³Cf. p. 47.

é a série de Taylor de f em torno de $t = t_0$ ou, especificamente, em $I = (t_0 - R, t_0 + R)$,¹⁴ e $f(t)$ é dita analítica em I .

EXEMPLOS

- Para a série geométrica,¹⁵ $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, para $|t| < 1$. Podemos confirmar esse resultado, verificando que $f(t) = \frac{1}{1-t}$ é analítica em $I = (-1, 1)$,¹⁶ via:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{1-0} = 1 = a_0; \\ f'(0) &= \frac{1}{(1-0)^2} = 1 = a_1; \\ \frac{f''(0)}{2} &= \frac{\frac{2}{(1-0)^3}}{2} = 1 = a_2; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que, utilizamos $f'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$, $f''(t) = \frac{2}{(1-t)^3}$, etc.

- $f(t) = e^t$ é analítica em $I = \mathbb{R}$,¹⁷ com

$$\begin{aligned} e^t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0 = 1 = a_0; \\ f'(0) &= e^0 = 1 = a_1; \\ \frac{f''(0)}{2} &= \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} = a_2; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que, utilizamos $f^{(n)}(t) = e^t$, $n = 0, 1, 2, \dots$

- $f(t) = \ln(1+t)$ é analítica em $I = (-1, 1)$,¹⁸ com

$$\begin{aligned} \ln(1+t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} \\ &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} f(0) &= \ln(1+0) = 0 = a_0; \\ f'(0) &= \frac{1}{1+0} = 1 = a_1; \\ \frac{f''(0)}{2} &= \frac{-\frac{1}{(1+0)^2}}{2} = -\frac{1}{2} = a_2; \\ \frac{f'''(0)}{3!} &= \frac{\frac{1}{(1+0)^3}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} = a_3; \\ &\vdots \end{aligned}$$

¹⁴Se $t = 0$, (3.8) é a série de Maclaurin de f .

¹⁵Cf. p. 44.

¹⁶Aqui, $t_0 = 0$ e $R = 1$.

¹⁷Aqui, $t_0 = 0$ e $R = \infty$.

¹⁸Aqui, $t_0 = 0$ e $R = 1$.

Note que, utilizamos $f'(t) = \frac{1}{1+t}$, $f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$, $f'''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$, etc.

EXERCÍCIO

Verifique que as funções seno e cosseno são analíticas em $I = \mathbb{R}$, com

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} t &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{cos} t &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots\end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO

A analiticidade, em $I = \mathbb{R}$, das funções seno, cosseno e exponencial, pode ser utilizada para demonstrar a *fórmula de Euler*,

$$e^{it} = \operatorname{cos} t + i \operatorname{sen} t,^{19}$$

observando que

$$\begin{array}{cccc}i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = -i, \\ i^4 = 1, & i^5 = i, & i^6 = -1, & i^7 = -i, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{array}$$

3.4.1 Séries de potências e edo**OBSERVAÇÕES**

- O índice de uma série é invariante por permutação de letras, ou seja,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f_n &= \sum_{m=0}^{\infty} f_m \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f_i \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j \\ &= \dots\end{aligned}$$

¹⁹Cf. página 22.

- A igualdade de duas séries de Taylor em torno de $t_0 = 0$ implica na igualdade dos seus coeficientes de mesmos índices,²⁰ ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t - t_0)^n = 0 \implies a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = 0 \implies a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

- Seja

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 \quad (3.10)$$

como na página 19, com a , b e c analíticas em $I = (t_0 - R, t_0 + R)$. Demonstra-se que suas soluções também são analíticas em I . Portanto, para obter uma solução geral de (3.10), via séries de Taylor em torno de $t_0 = 0$, considere as seguintes etapas:

- Assuma que $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ é solução de (3.10).
- Substitua x , $x' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ e $x'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n a_n t^{n-2}$ em (3.10).
- Caso seja necessário, reindexe alguma série.²¹
- Determine a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, utilizando (3.9).

EXEMPLOS

²⁰De fato, para cada índice n , após ter obtido $a_n = b_n$ via $t = t_0$, calcule a derivada de ordem $n + 1$ das duas séries e repita o processo.

²¹EXEMPLOS

- Para $m = n - 2$,

$$x'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2)a_{m+2}t^m.$$

- Para $m = n + 1$,

$$\begin{aligned} tx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} t^m. \end{aligned}$$

1. $x'' + x = 0$.

$$\begin{aligned}
 x'' + x = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\
 &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\
 &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n] t^n = 0 \\
 &\implies (n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\
 &\implies a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

onde, na segunda implicação, de cima para baixo, reindexamos n (via $m = n - 2$, na primeira série) e, depois, trocamos m por n . Então, para a_0 e a_1 constantes, temos:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -\frac{a_0}{1 \cdot 2}; \\
 a_3 &= -\frac{a_1}{2 \cdot 3}; \\
 a_4 &= -\frac{a_2}{3 \cdot 4} = \frac{a_0}{4!}; \\
 a_5 &= -\frac{a_3}{4 \cdot 5} = -\frac{a_1}{5!}; \\
 a_6 &= -\frac{a_4}{5 \cdot 6} = -\frac{a_0}{6!}; \\
 a_7 &= -\frac{a_5}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{7!}; \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Assim, para $n = 0, 1, 2, \dots$, temos

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{(2n)!} \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)!}.$$

Portanto, a solução de $x'' + x = 0$ é dada por

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} t^{2n+1} \\
 &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= a_0 \cos t + a_1 \sin t.
 \end{aligned}$$

$$2. x'' - tx = 0.$$

$$\begin{aligned} x'' - tx = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n = 0 \\ &\implies (1)(2)a_2 t^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n = 0 \\ &\implies 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_{n-1}] t^n = 0 \\ &\implies a_2 = 0, a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

onde, na segunda implicação, de cima para baixo, reindexamos n (via $m = n - 2$, na primeira série, e $i = n + 1$, na segunda) e, depois, trocamos m e i por n . Logo, como $a_2 = 0$, se a_0 e a_1 são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_0}{(2)(3)}; \\ a_4 &= \frac{a_1}{(3)(4)}; \\ a_5 &= \frac{a_2}{(4)(5)} = 0; \\ a_6 &= \frac{a_3}{(5)(6)} = \frac{a_0}{(2)(3)(5)(6)}; \\ a_7 &= \frac{a_4}{(6)(7)} = \frac{a_1}{(3)(4)(6)(7)}; \\ a_8 &= \frac{a_5}{(7)(8)} = 0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Então, para $n = 1, 2, 3, \dots$, temos

$$a_{3n} = \frac{a_0}{(2)(3)(5)(6) \cdots (3n-1)(3n)} \quad \text{e} \quad a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3)(4)(6)(7) \cdots (3n)(3n+1)},$$

enquanto que, para $n = 0, 1, 2, \dots$, temos

$$a_{3n+2} = 0.$$

Portanto, a solução de $x'' - tx = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n} t^{3n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n+1} t^{3n+1} \\ &= a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n}}{(2)(3)(5)(6) \cdots (3n-1)(3n)} \right] \\ &\quad + a_1 \left[t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n+1}}{(3)(4)(6)(7) \cdots (3n)(3n+1)} \right]. \end{aligned}$$

$$3. x'' - t^2x = 0.$$

$$\begin{aligned} x'' - t^2x = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2} = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 0 \\ &\implies (1)(2)a_2 t^0 + (2)(3)a_3 t^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 0 \\ &\implies 2a_2 + 6a_3 t + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_{n-2}] t^n = 0 \\ &\implies a_2 = a_3 = 0, a_{n+2} = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}, n = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

onde, na segunda implicação, de cima para baixo, reindexamos n (via $m = n - 2$, na primeira série, e $i = n + 2$, na segunda) e, depois, trocamos m e i por n . Logo, como $a_2 = a_3 = 0$, se a_0 e a_1 são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{a_0}{(3)(4)}; \\ a_5 &= \frac{a_1}{(4)(5)}; \\ a_6 &= \frac{a_2}{(5)(6)} = 0; \\ a_7 &= \frac{a_3}{(6)(7)} = 0; \\ a_8 &= \frac{a_4}{(7)(8)} = \frac{a_0}{(3)(4)(7)(8)}; \\ a_9 &= \frac{a_5}{(8)(9)} = \frac{a_1}{(4)(5)(8)(9)}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Então, para $n = 1, 2, 3, \dots$, temos

$$a_{4n} = \frac{a_0}{(3)(4)(7)(8) \cdots (4n-1)(4n)} \quad \text{e} \quad a_{4n+1} = \frac{a_1}{(4)(5)(8)(9) \cdots (4n)(4n+1)},$$

enquanto que, para $n = 0, 1, 2, \dots$, temos

$$a_{4n+2} = a_{4n+3} = 0.$$

Portanto, a solução de $x'' - t^2x = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_{4n} t^{4n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{4n+1} t^{4n+1} \\ &= a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n}}{(3)(4)(7)(8) \cdots (4n-1)(4n)} \right] \\ &\quad + a_1 \left[t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n+1}}{(4)(5)(8)(9) \cdots (4n)(4n+1)} \right]. \end{aligned}$$

$$4. (t^2 + 1)x'' - 4tx' + 6x = 0.$$

$$\begin{aligned} t^2x'' + x'' - 4tx' + 6x = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} 4na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} 4na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n-1)na_n + (n+1)(n+2)a_{n+2} - 4na_n + 6a_n] t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n^2 - 5n + 6) a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2} \right] t^n = 0 \\ &\implies a_{n+2} = -\frac{(n-2)(n-3)a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Portanto, se a_0 e a_1 são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= -3a_0; \\ a_3 &= -\frac{a_1}{3}; \\ a_4 &= -\frac{0 \cdot a_2}{12} = 0; \\ a_5 &= -\frac{0 \cdot a_3}{20} = 0; \\ a_6 &= -\frac{2 \cdot a_4}{30} = 0; \\ a_7 &= -\frac{6 \cdot a_5}{42} = 0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, a solução de $(t^2 + 1)x'' - 4tx' + 6x = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ &= a_0 (1 - 3t^2) + a_1 \left(t - \frac{1}{3} t^3 \right). \end{aligned}$$

$$5. \begin{cases} (t^2 + 1)x'' + tx' - x = 0 \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t^2x'' + x'' + tx' - x = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} na_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} na_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n-1)na_n + (n+1)(n+2)a_{n+2} + na_n - a_n] t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n^2 - 1)a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2}] t^n = 0 \\ &\implies a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, se a_0 e a_1 são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}a_0; \\ a_3 &= 0; \\ a_4 &= -\frac{1}{4}a_2 = -\frac{1}{2 \cdot 4}a_0; \\ a_5 &= -\frac{2}{5}a_3 = 0; \\ a_6 &= -\frac{3}{6}a_4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}a_0; \\ a_7 &= -\frac{4}{7}a_5 = 0; \\ a_8 &= -\frac{5}{8}a_6 = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}a_0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)} a_0, \quad n = 2, 3, \dots, \\ a_{2n+1} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

e, assim, a solução de $(t^2 + 1)x'' + tx' - x = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} t^{2n} \\ &= a_0 \left(1 + \frac{t^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)} t^{2n} \right) + a_1 t. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $a_0 = x(0) = 0$ e $a_1 = x'(0) = 1$, a solução do PVI é apenas $x(t) = t$.

$$6. \begin{cases} x'' - 2tx' + x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x'' - 2tx' + x = 0 &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - (2n-1)a_n] t^n = 0 \\ &\Rightarrow a_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, se a_0 e a_1 são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{(1)(2)} a_0; \\ a_3 &= \frac{1}{(2)(3)} a_1; \\ a_4 &= \frac{3}{(3)(4)} a_2 = -\frac{3}{4!} a_0; \\ a_5 &= \frac{5}{(4)(5)} a_3 = \frac{1 \cdot 5}{5!} a_1; \\ a_6 &= \frac{7}{(5)(6)} a_4 = -\frac{3 \cdot 7}{6!} a_0; \\ a_7 &= \frac{9}{(6)(7)} a_5 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} a_1; \\ a_8 &= \frac{11}{(7)(8)} a_6 = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} a_0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_{2n} &= -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-5)}{(2n)!} a_0, \quad n = 2, 3, \dots, \\ a_{2n+1} &= \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{(2n+1)!} a_1, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

e, assim, a solução de $(t^2 + 1)x'' - 2tx' + x = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} t^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} t^{2n+1} \\ &= a_0 \left\{ 1 - \frac{t^2}{2!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-5)] t^{2n}}{(2n)!} \right\} + a_1 \left\{ t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)] t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\} \\ &= a_0 x_1(t) + a_1 x_2(t). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $a_0 = x(0) = 0$ e $a_1 = x'(0) = 1$, a solução do *pvi* é apenas $x(t) = x_2(t)$.

OBSERVAÇÃO

Esse método de resolução, via séries, também é válido para toda *edo* de primeira ordem

com coeficientes analíticos. De fato, basta considerar $a = 0$ em (3.10)

EXEMPLOS

1. $x' - x = 0$.

$$\begin{aligned} x' - x = 0 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - a_n] t^n = 0 \\ &\implies a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, para a_0 constante, temos:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0}{1} = \frac{a_0}{1!}; \\ a_2 &= \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2!}; \\ a_3 &= \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!}; \\ a_4 &= \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{4!}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, esses coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{a_0}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e a solução de $x' - x = 0$ pode ser representada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= a_0 e^t. \end{aligned}$$

2. $x' = t^2 x$.

$$\begin{aligned} x' - t^2 x = 0 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2} = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 0 \\ &\implies a_1 + 2a_2 t + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 0 \\ &\implies a_1 + 2a_2 t + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - a_{n-2}] t^n = 0 \\ &\implies a_1 = a_2 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_{n-2}}{n+1}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Assim, para a_0 constante, temos:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_0}{3} = \frac{a_0}{3^1(1!)}; \\ a_4 &= \frac{a_1}{4} = 0; \\ a_5 &= \frac{a_2}{5} = 0; \\ a_6 &= \frac{a_3}{6} = \frac{a_0}{3^2(2!)}; \\ a_7 &= \frac{a_4}{7} = 0; \\ a_8 &= \frac{a_5}{8} = 0; \\ a_9 &= \frac{a_6}{9} = \frac{a_0}{3^3(3!)}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto, esses coeficientes são dados por

$$a_{3n} = \frac{a_0}{3^n(n!)} \quad \text{e} \quad a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e a solução de $x' - t^2x = 0$ pode ser representada por

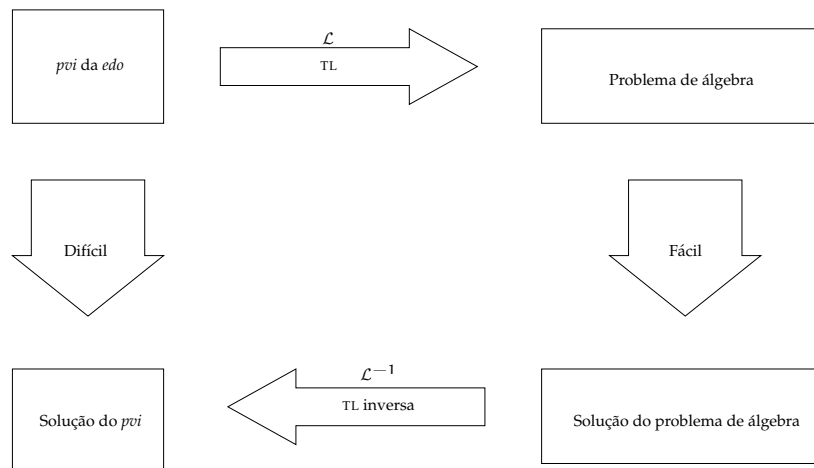
$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n} t^{3n} \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n}}{3^n(n!)} \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^3/3)^n}{n!} \\ &= a_0 e^{t^3/3}. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Transformada de Laplace (TL) e edo

4.1 TL

Figura 4.1: Problema a ser resolvido



A figura 4.1 ilustra a passagem, via TL, do *problema* de uma *EDO*, para um problema algébrico. Resolvido esse problema, aplicamos a TL inversa em sua solução, para obtermos a a solução do *problema* original.

DEFINIÇÃO

A TL de uma função $f(t)$, $t \in [0, \infty)$, é uma função $F(s)$ calculada pelo operador \mathcal{L} tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt \\ &= F(s).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Nesse caso, $f(t)$ é a TLI de $F(s)$ e denotamos

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t).$$

Além disso, o domínio de F , por (4.1), é formado por todo número s tal que $e^{-st}f(t)$ é integrável em $[0, \infty)$.

EXEMPLOS

1. Para s_0 fixo, se $s > s_0$,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{e^{s_0 t}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{s_0 t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{t=0}^{t=L} e^{-(s-s_0)t} dt \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)} \right]_{t=0}^{t=L} \\
 &= -\frac{1}{s-s_0} \lim_{L \rightarrow \infty} (e^{-(s-s_0)L} - 1) \\
 &= \frac{1}{s-s_0}.
 \end{aligned}$$

Na quarta igualdade, de cima para baixo, utilizamos a integral

$$\int_a^b e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \Big|_a^b, \tag{4.2}$$

que pode ser tanto real quanto complexa.

Assim, para $s > s_0$,

$$\mathcal{L}\{e^{s_0 t}\} = \frac{1}{s-s_0} \iff \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-s_0}\right\} = e^{s_0 t}. \tag{4.3}$$

2. Se $s > 0$, temos, por (4.3),

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{1\} &= \mathcal{L}\{e^{0 \cdot t}\} \\
 &= \frac{1}{s-0} \\
 &= \frac{1}{s}.
 \end{aligned}$$

Assim, para $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \iff \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1. \tag{4.4}$$

3. Se $s > 0$, temos, via integração por partes,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} t dt \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{t=0}^{t=L} t e^{-st} dt \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left(t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{t=L} - \int_{t=0}^{t=L} \frac{e^{-st}}{-s} dt \right) \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{Le^{-sL}}{s} + \frac{1}{s} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{t=L} \right\} \\
 &= \frac{1}{s^2},
 \end{aligned}$$

onde aplicamos L'hôpital em $Le^{-sL} = \frac{L}{e^{sL}}$. Logo, se $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \iff \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = t.$$

4. Sejam n um inteiro positivo e $s > 0$. Assim, via integração por partes,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt \\
 &= \left[-t^n \cdot \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} n t^{n-1} \frac{e^{-st}}{-s} dt \\
 &= \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}.
 \end{aligned}$$

Portanto, como $\mathcal{L}\{t^1\} = \frac{1}{s^2}$,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^2\} &= \frac{2}{s} \mathcal{L}\{t^1\} \\
 &= \frac{2!}{s^3}.
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^3\} &= \frac{3}{s} \mathcal{L}\{t^2\} \\
 &= \frac{3!}{s^4}.
 \end{aligned}$$

Logo, supondo que

$$\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{(n-1)!}{s^n},$$

prova-se, por indução, que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \tag{4.5}$$

para cada inteiro positivo n .¹

ADMISSIBILIDADE

Em relação a (4.1), $f(t)$ é dita *admissível* quando existe sua TL $F(s)$.²

LINEARIDADE

Para cte_1 e cte_2 constantes, se $f(t)$ e $g(t)$ são admissíveis com transformadas $F(s)$ e $G(s)$, respectivamente, então:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{cte_1 f(t) + cte_2 g(t)\} &= cte_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + cte_2 \mathcal{L}\{g(t)\} \\ &= cte_1 F(s) + cte_2 G(s)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{cte_1 F(s) + cte_2 G(s)\} &= cte_1 \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + cte_2 \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \\ &= cte_1 f(t) + cte_2 g(t).\end{aligned}$$

EXEMPLOS

1. Seja $p(t) = -t^4 + 2t^3 + t - 7$. Portanto, para $s > 0$,

$$\begin{aligned}P(s) &= \mathcal{L}\{p(t)\} \\ &= -\mathcal{L}\{t^4\} + 2\mathcal{L}\{t^3\} + \mathcal{L}\{t\} - 7\mathcal{L}\{1\} \\ &= -\frac{4!}{s^5} + \frac{2(3!)}{s^4} + \frac{1}{s^2} - \frac{7}{s} \\ &= \frac{-24 + 12s + s^3 - 7s^4}{s^5},\end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade, de baixo para cima, utilizamos a equação (4.5).

2. Por um lado, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{it}\} &= \mathcal{L}\{\cos t + i \sin t\} \\ &= \mathcal{L}\{\cos t\} + i\mathcal{L}\{\sin t\},\end{aligned}$$

¹Na verdade, essa fórmula também é válida para $n = 0$. De fato, por (4.4),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^0\} &= \mathcal{L}\{1\} \\ &= \frac{1}{s} \\ &= \frac{0!}{s^{0+1}}.\end{aligned}$$

²Embora não sejam apresentadas, nesse texto, condições suficientes para a existência de uma $F(s)$ associada à uma $f(t)$ arbitrária, em cada exemplo, para $f(t)$ ser admissível, basta que o domínio da $F(s)$ associada seja não vazio.

por linearidade. Por outro, por definição, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{it}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{it} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(i-s)t} dt \\ &= \left. \frac{e^{(i-s)t}}{i-s} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s-i} \\ &= \frac{s}{s^2+1} + i \frac{1}{s^2+1},\end{aligned}$$

caso s seja positivo. De fato, na terceira, quarta e quinta igualdades, de cima para baixo, utilizamos, respectivamente, a equação (4.2),

$$\begin{aligned}e^{(i-s)t} &= e^{-st} e^{it} \\ &= e^{-st} (\cos t + i \sin t) \\ &\rightarrow 0,\end{aligned}$$

para $t \rightarrow \infty$,³ e que

$$\frac{s}{s^2+1} + i \frac{1}{s^2+1}$$

é o inverso multiplicativo de $s - i$.⁴ Então, para $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$



$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t.$$

3. Seja $s > \omega$, onde ω é uma constante positiva.⁵ Como $\frac{\omega}{s^2-\omega^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega} \right)$,⁶ temos, por linearidade e pela equação (4.3),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2-\omega^2}\right\} &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\omega}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\omega}\right\} \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \\ &= \sinh(\omega t).\end{aligned}$$

³ $\cos t$ e $\sin t$ são limitadas e $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$.

⁴De fato, se $i^2 = -1$ e $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, então

$$(a + ib) \left(\frac{a - ib}{a^2 + b^2} \right) = 1.$$

⁵Assim, também, $s > -\omega$.

⁶Utilizamos, aqui, a *técnica das frações parciais*, estudada no *cálculo de funções reais de uma variável real*.

Analogamente, para $s > \omega > 0$, temos

$$\mathcal{L}\{\cosh(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 - \omega^2}.$$

4. Para $s > 1$,⁷ como

$$\frac{s+3}{s(s-1)(s+2)} = -\frac{3}{2s} + \frac{4}{3(s-1)} + \frac{1}{6(s+2)},$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s-1)(s+2)}\right\} &= -\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{4}{3}e^t + \frac{1}{6}e^{-2t}, \end{aligned}$$

por (4.3), página 64.

5. Se $s > 2$,⁸ então

$$\begin{aligned} \frac{s-1}{s^2+2s-8} &= \frac{s-1}{(s+4)(s-2)} \\ &= \frac{1}{6(s-2)} + \frac{5}{6(s+4)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+2s-8}\right\} = \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{5}{6}e^{-4t},$$

por (4.3).

MUDANÇA DE VARIÁVEL

Para qualquer constante cte positiva, se $f(t)$ é admissível, temos

$$\mathcal{L}\{f(\text{cte } t)\} = \frac{1}{\text{cte}}F\left(\frac{s}{\text{cte}}\right).$$

De fato, como $f(\text{cte } t)$ é função de t , temos, por definição,⁹

$$\mathcal{L}\{f(\text{cte } t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f(\text{cte } t)dt.$$

Agora, se $\tau = \text{cte } t$, essa integral é igual a

$$\frac{1}{\text{cte}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{\text{cte}}\tau}f(\tau)d\tau = \frac{1}{\text{cte}}F\left(\frac{s}{\text{cte}}\right).$$

⁷Assim, $s > -2$.

⁸Portanto, $s > -4$.

⁹Cf. página 63.

EXEMPLO

Utilizando as transformadas do seno e do cosseno e a mudança de variável supracitada, sendo ω uma constante positiva e $s > 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} &= \frac{1}{\omega} \frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{\frac{s}{\omega^2}}{\frac{s^2 + \omega^2}{\omega^2}} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (4.6)$$

DESLOCAMENTO-I

Seja cte constante e $f(t)$ admissível,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{cte t} f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{cte t} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-cte)t} f(t) dt \\ &= F(s - cte),\end{aligned}$$

para $s > cte$.¹⁰

EXEMPLOS

1. Por (4.5), temos

$$f(t) = t^n \iff F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ para } s > 0 \text{ e } n = 0, 1, 2, \dots$$

Portanto, para $s > cte$,

$$\mathcal{L}\{t^n e^{cte t}\} = \frac{n!}{(s - cte)^{n+1}}$$

e, assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s - cte)^{n+1}}\right\} = t^n e^{cte t}.$$

2. Seja $s > -3$. Assim, como

$$\frac{s^2}{(s+3)^3} = \frac{1}{s+3} - \frac{6}{(s+3)^2} + \frac{9}{(s+3)^3},$$

¹⁰Cf. o caso para $f(t) = 1$, página 64.

temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s+3)^3}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 6\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} + 9\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s+3)^3}\right\} \\ &= e^{-3t} - 6te^{-3t} + \frac{9}{2}t^2e^{-3t}.\end{aligned}$$

3. Sejam s e ω positivos. Como, por (4.6),

$$f(t) = \text{sen}(\omega t) \iff F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

temos, para $s > \text{cte}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{\text{cte}t} \text{sen}(\omega t)\} &= F(s - \text{cte}) \\ &= \frac{\omega}{(s - \text{cte})^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\mathcal{L}\{e^{\text{cte}t} \cos(\omega t)\} = \frac{s - \text{cte}}{(s - \text{cte})^2 + \omega^2}.$$

4. Como podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{3s+7}{s^2-2s+5} &= \frac{3s+7}{s^2-2s+1+4} \\ &= \frac{3s+7}{(s-1)^2+4} \\ &= \frac{3s-3+3+7}{(s-1)^2+4} \\ &= \frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2+4}.\end{aligned}$$

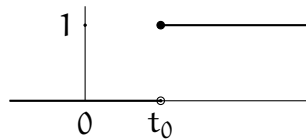
temos, para $s > 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s+5}\right\} &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+4}\right\} \\ &= 3e^t \cos(2t) + 5e^t \text{sen}(2t).\end{aligned}$$

FUNÇÃO DE HEAVISIDE DE PASSO UNITÁRIO

Para $t_0 \geq 0$, define-se

$$H(t - t_0) := \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0, \\ 1 & \text{se } t \geq t_0, \end{cases}$$

Figura 4.2: Gráfico de $H(t - t_0)$ 

cujo gráfico está ilustrado na figura 4.2. Nesse caso, note que, se $s > 0$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(t - t_0)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} H(t - t_0) dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t_0}^{\infty} \\ &= \frac{e^{-t_0 s}}{s}. \end{aligned}$$

Essa transformada pode ser generalizada pela seguinte propriedade:

DESLOCAMENTO-II

Se $s > 0$ e $f(t)$ é admissível, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(t - t_0)f(t - t_0)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} H(t - t_0)f(t - t_0) dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t - t_0) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s(u+t_0)} f(u) du \\ &= e^{-t_0 s} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \\ &= e^{-t_0 s} F(s). \end{aligned}$$

Na terceira igualdade, de cima para baixo, utilizamos a mudança de variável $u = t - t_0$.¹¹

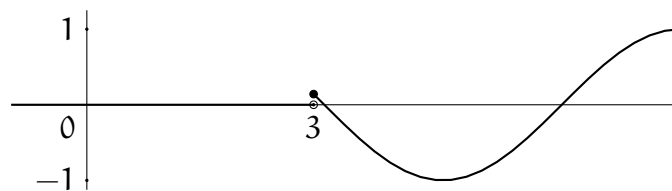
EXEMPLOS

1. Determine a TL da função seno “acionada” em $t = 3$, conforme a figura 4.3.

Essa função é dada por

$$S(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 3; \\ \text{sen } t & \text{se } t \geq 3. \end{cases}$$

¹¹Note que, a função de Heaviside “aciona” outras funções, a partir de $t = t_0$.

Figura 4.3: Gráfico de $S(t)$ 

Como $S(t) = H(t-3) \operatorname{sen} t$ e

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t-3+3) = \operatorname{sen}(t-3) \cos 3 + \operatorname{sen} 3 \cos(t-3),$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{S(t)\} &= \cos 3 \mathcal{L}\{H(t-3) \operatorname{sen}(t-3)\} + \operatorname{sen} 3 \mathcal{L}\{H(t-3) \cos(t-3)\} \\ &= \cos 3 e^{-3s} \frac{1}{s^2+1} + \operatorname{sen} 3 e^{-3s} \frac{s}{s^2+1}, \end{aligned}$$

caso s seja positivo.

2. Considere $s > 3$. Logo, como

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-3)^3} \right\} = \frac{1}{2} t^2 e^{3t},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-7s}}{(s-3)^3} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-7s} \frac{1}{(s-3)^3} \right\} \\ &= \frac{1}{2} H(t-7) (t-7)^2 e^{3(t-7)}. \end{aligned}$$

TL E DERIVADAS DE $f(t)$

Para $s > 0$ e cada inteiro não-negativo n tais que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f^{(n)}(t) = 0,$$

temos

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f^{(0)}(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).^{12}$$

De fato:

- $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$;

¹²Aqui, $f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}(f(t))$.

- $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$, pois, via integração por partes,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \\ &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) (-se^{-st}) dt \\ &= s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \\ &= sF(s) - f(0);\end{aligned}$$

- $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, pois

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \mathcal{L}\{(f')'(t)\} \\ &= s \mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0);\end{aligned}$$

Podemos aplicar, agora, indução finita sobre n .

EXEMPLOS

1. É possível reobter a TL de $\cos(\omega t)$, utilizando a fórmula (4.6).¹³ De fato, basta observar que

$$\begin{aligned}\omega (\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}) &= \mathcal{L}\{\omega \cos(\omega t)\} \\ &= \mathcal{L}\{\text{sen}'(\omega t)\} \\ &= s \mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\} - \text{sen } 0 \\ &= s \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= \omega \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right).\end{aligned}$$

$$2. \mathcal{L}\{\text{sen}^2 t\} = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$

De fato, seja $f(t) = \text{sen}^2 t$. Então, $f(0) = 0$ e

$$\begin{aligned}f'(t) &= 2 \text{sen } t \cos t \\ &= \text{sen } 2t.\end{aligned}$$

Por sua vez, a TL dessa derivada é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \mathcal{L}\{\text{sen } 2t\} \\ &= \frac{2}{s^2 + 4}.\end{aligned}$$

Agora, basta utilizar a fórmula

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

¹³Cf. página 69.

TLI E DERIVADAS DE $F(s)$

Para cada inteiro n não-negativo onde exista a n -ésima derivada em relação a s , temos

$$\mathcal{L}^{-1} \{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t), \quad (4.7)$$

ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = f(t); \quad \mathcal{L}^{-1} \{F'(s)\} = -tf(t); \quad \mathcal{L}^{-1} \{F''(s)\} = t^2 f(t); \quad \text{etc.}$$

A fórmula (4.7) é (trivialmente) válida para $n = 0$ e, como

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \left(\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} (e^{-st}) f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} (-te^{-st}) f(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt \\ &= -\mathcal{L} \{t f(t)\}, \end{aligned}$$

também é válida para $n = 1$. Além disso, caso (4.7) seja válida para o inteiro não negativo $n = \ell$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{t^{\ell+1} f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\ell+1} f(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} (-te^{-st}) t^{\ell} f(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} (e^{-st}) t^{\ell} f(t) dt \\ &= - \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\ell} f(t) dt \\ &= - \frac{d}{ds} \left(\mathcal{L} \{t^{\ell} f(t)\} \right) \\ &= (-1) \frac{d}{ds} \left((-1)^{\ell} \frac{d^{\ell}}{ds^{\ell}} F(s) \right) \\ &= (-1)^{\ell+1} \frac{d^{\ell+1}}{ds^{\ell+1}} F(s), \end{aligned}$$

ou seja, (4.7) também é válida para $n = \ell + 1$. Portanto, por indução finita, (4.7) é válida para todo inteiro n não negativo.

EXEMPLOS

1. É fácil ver que, se $s > 0$, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t \cos t\} &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) \\ &= -\frac{1 \cdot (s^2 + 1) - s \cdot 2s}{(s^2 + 1)^2} \\ &= \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}.\end{aligned}$$

2. Note que,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2 \cos(3t)\} &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{s}{s^2 + 9} \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + 9} \right) \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{9 - s^2}{(9 + s^2)^2} \right),\end{aligned}$$

cuja resolução fica como exercício.

CONVOLUÇÃO

Se $f(t)$ e $g(t)$ são admissíveis, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &:= f(t) * g(t) \\ &= g(t) * f(t).\end{aligned}$$

De fato, considere os domínios de integração

$$D_{uv} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, v > 0\} \quad \text{e} \quad D_{t\tau} = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid t > \tau > 0\}$$

e a mudança de variáveis

$$\begin{cases} t = u + v, \\ \tau = u. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-su}f(u)du \int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv \\ &= \iint_{D_{uv}} e^{-s(u+v)}f(u)g(v)dudv \\ &= \iint_{D_{t\tau}} e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] dt \\ &= \mathcal{L}\{f(t) * g(t)\}.\end{aligned}$$

EXEMPLOS

1. Qual é a TLI de $H(s) = \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$?

Primeiramente, note que,

$$F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \implies f(t) = g(t) = \frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t).$$

Assim, por convolução, temos:

$$\begin{aligned} h(t) &= (f * g)(t) \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t \text{sen}(\omega(t - \tau)) \text{sen}(\omega\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t \text{sen}(\omega t - \omega\tau) \text{sen}(\omega\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t (\text{sen}(\omega t) \cos(\omega\tau) \text{sen}(\omega\tau) - \text{sen}(\omega\tau) \cos(\omega t) \text{sen}(\omega\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega^2} \left(\text{sen}(\omega t) \int_0^t \text{sen}(\omega\tau) \cos(\omega\tau) d\tau - \cos(\omega t) \int_0^t \text{sen}^2(\omega\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\omega^3} \left(\text{sen}(\omega t) \int_0^{\omega t} \text{sen} u \cos u du - \cos(\omega t) \int_0^{\omega t} \text{sen}^2 u du \right) \\ &= \frac{1}{2\omega^3} (\text{sen}(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)). \end{aligned}$$

TL DA FUNÇÃO ERRO

2.

Seja $\text{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx$. Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}(s-1)} \right\} = e^t \cdot \text{erf}(\sqrt{t}).$$

De fato, para $F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ e $G(s) = \frac{1}{s-1}$, temos $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ e $g(t) = e^t$, se $\tau = x^2$, então

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{t-\tau} d\tau \\ &= \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau \\ &= \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{e^{-x^2}}{x} 2x dx \\ &= e^t \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Veamos, agora, como $f(t)$ foi calculada:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u^2} \cdot \frac{\sqrt{s}}{u} \cdot \frac{2u}{s} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{s}},\end{aligned}$$

onde, na segunda e quarta igualdades, de cima para baixo, efetuamos, respectivamente, a mudança de variáveis $st = u^2$ e os cálculos seguintes:

Para $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, temos

$$\begin{aligned}a \rightarrow \infty \implies I &= \iint_{D_{xy}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint_{D_{r\theta}} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^a e^{-r^2} r dr \right] d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^a e^{-r^2} (-2)r dr \right] \\ &= -\frac{\pi}{4} \int_0^{-a^2} e^u du \\ &= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2}) \\ &\rightarrow \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Por outro lado, para α qualquer, temos

$$\begin{aligned}\alpha \rightarrow \infty \implies I_\alpha &= \int_0^\alpha \int_0^\alpha e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \left(\int_0^\alpha e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^\alpha e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left(\int_0^\alpha e^{-x^2} dx \right)^2 \\ &\rightarrow \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2.\end{aligned}$$

Seja, então, $\alpha \in \{a, a/\sqrt{2}\}$. Como $I_{a/\sqrt{2}} < I < I_a$,¹⁴ temos

$$a \rightarrow \infty \implies I \rightarrow \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2.$$

¹⁴No primeiro quadrante, o quarto da circunferência de centro $(0,0)$ e raio a , está inscrito num quadrado de lado a e circunscrito num de lado $a/\sqrt{2}$.

Portanto, pela unicidade do limite,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Para concluir a seção 4.1, seguem mais duas propriedades e uma tabela onde estão elencadas algumas transformadas calculadas nesse capítulo. Nessa tabela, figuram, por exemplo, as transformadas das funções $\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t)$ e $\delta(t)$, dita *delta de Dirac* e estudada na seção 4.2. Além disso, a apresentação das três últimas linhas da tabela objetiva estabelecer que *existem inúmeras outras transformadas que podem ser obtidas utilizando os resultados desse capítulo.*

VALORES INICIAIS E FINAIS

Se $f'(t)$ é admissível, ou seja,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

então

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s), \quad (4.8)$$

caso esses limites existam.

EXEMPLO

Seja $X(s) = \frac{1}{s(s+2)}$. Então, por um lado,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-2t}) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

TL DE FUNÇÃO T-PERIÓDICA

Se $f(t+T) = f(t)$, $t \in [0, \infty)$, com f admissível e contínua por partes num período T , então

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

EXEMPLO

Seja $f(t) = \text{sen } \omega t$, $\omega > 0$. Logo, f tem período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-st} \text{sen}(\omega t) dt \\ &= \frac{\left[-\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-st} \cos(\omega t) - \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{-st} \text{sen}(\omega t) \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \\ &= \frac{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left(1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}} \right)}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

TABELA DE TRANSFORMADAS

Pode ser conveniente alocar os resultados das transformadas em algum tipo de tabela ou planilha, para utilização posterior. Na verdade, existem muitos livros dedicados apenas a essas tabelas. Segue, agora, uma delas, onde coletamos, no lado esquerdo, algumas funções admissíveis estudadas nesse livro, enquanto que, no lado direito, suas respectivas transformadas.¹⁵ Além disso, o significado das três últimas linhas da tabela é o seguinte: existe um número infinito de transformadas e, muitas delas, podem ser obtidas com as apresentadas nesse capítulo.

¹⁵Nas duas linhas da tabela relacionadas ao limite (finito) ℓ , a segunda coluna decorre da primeira, como consequência da proposição “Se ..., então ...” da página 78.

$f(t)$	$F(s)$
$t^n e^{cte t}, n = 0, 1, 2, \dots$	$n! / (s - cte)^{n+1}$ para $s > cte$
$e^{cte t} \text{sen}(\omega t)$	$\omega / ((s - cte)^2 + \omega^2)$ para s e ω positivos e $s > cte$
$e^{cte t} \text{cos}(\omega t)$	$(s - cte) / ((s - cte)^2 + \omega^2)$ para s e ω positivos e $s > cte$
$\text{senh}(\omega t)$	$\omega / (s^2 - \omega^2)$ para $s > \omega > 0$
$\text{cosh}(\omega t)$	$s / (s^2 - \omega^2)$ para $s > \omega > 0$
$\delta(t - cte)$	$e^{-cte s}$
$\text{erf}(cte t)$	$\frac{e^{s^2/4cte^2}}{s} \cdot \text{erfc}(s/2cte)$
$\text{erf}(\sqrt{cte t})$	$\frac{\sqrt{cte}}{s\sqrt{s+cte}}$
$\text{erfc}(cte/2\sqrt{t})$	$e^{-cte\sqrt{s}}/s$
$\frac{cte}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-cte^2/4t}$	$e^{-cte\sqrt{s}}$
$f(cte t)$	$\frac{1}{cte} F\left(\frac{s}{cte}\right)$ para $cte > 0$
$e^{cte t} f(t)$	$F(s - cte)$ para $s > cte$
$H(t - t_0) f(t - t_0)$	$e^{-st_0} F(s)$
$f(t) * g(t) := \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$
$f'(t)$ com $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \ell$	$sF(s) - f(0)$ com $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \ell$
$f'(t)$ com $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \ell$	$sF(s) - f(0)$ com $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \ell$
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
$f(t + T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$
\vdots	\vdots
$\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-cte^2/4t} - cte \cdot \text{erfc}(cte/2\sqrt{t})$	$\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-cte\sqrt{s}}$
\vdots	\vdots

4.2 Edo e TL

Para resolver um *pvi* via TL, siga, em sequência, os passos seguintes:

1. Aplique a TL em ambos os membros da *edo* a ser resolvida;
2. Resolva o problema de álgebra resultante do passo 1;
3. Aplique a TLI em ambos os lados da solução obtida no passo 2.

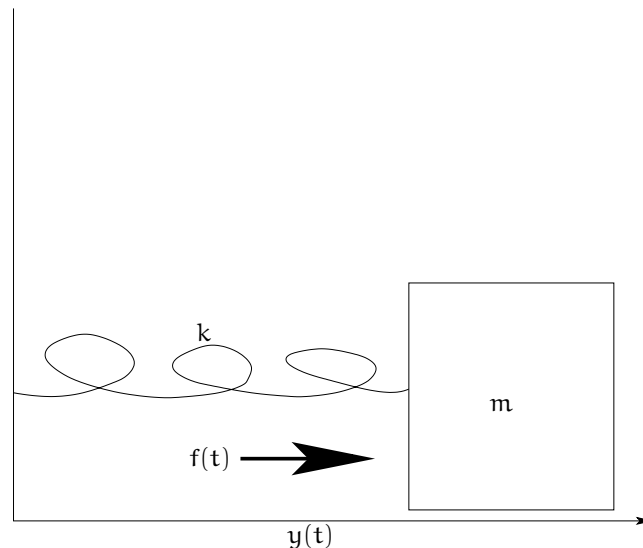
EXEMPLO: SISTEMA MASSA-MOLA COM FORÇAMENTO

Sejam m e k a massa e a constante de Hooke, respectivamente, de um corpo sob a ação de uma força $f(t)$ horizontal.¹⁶ Considere, agora, o seguinte *pvi*:

$$\begin{cases} my''(t) + ky(t) = f(t); \\ y(0) = y_0; \\ y'(0) = y'_0. \end{cases}$$

Para uma ilustração desse sistema mecânico, confira a figura 4.4.

Figura 4.4: Sistema massa-mola com forçamento



Logo, seguindo os passos supracitados, temos:

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{my''(t) + ky(t)\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \implies m\mathcal{L}\{y''(t)\} + k\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \\ &\implies ms^2Y(s) - msy_0 - my'_0 + kY(s) = F(s); \end{aligned}$$

2.

$$Y(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + k} + \frac{msy_0}{ms^2 + k} + \frac{my'_0}{ms^2 + k};$$

¹⁶O uso de "horizontal" com $y(t)$ e não $x(t)$ é proposital!

3.

$$y(t) = \frac{1}{m} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s^2 + k/m} \right\} + y_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + k/m} \right\} + y'_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + k/m} \right\}.$$

Agora, se $\omega = \sqrt{k/m}$, como

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{\text{sen } \omega t}{\omega} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} = \cos \omega t,$$

então

$$y(t) = \frac{1}{m} \mathcal{L}^{-1} \left\{ F(s) \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} + y_0 \cos \omega t + \frac{y'_0}{\omega} \text{sen } \omega t.$$

Portanto, via convolução, temos:

$$y(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t f(\tau) \text{sen}(\omega(t - \tau)) d\tau + y_0 \cos \omega t + \frac{y'_0}{\omega} \text{sen } \omega t.$$

Por exemplo, seja $f(t) = \text{sen } \omega t$. Assim, procedendo como no primeiro exemplo dado após a definição de convolução,¹⁷ temos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2m\omega^2} (\text{sen}(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)) + y_0 \cos(\omega t) + \frac{y'_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) \\ &= \left(\frac{2my'_0\omega + 1}{2m\omega^2} \right) \text{sen}(\omega t) + \left(\frac{2my_0\omega^2 - \omega t}{2m\omega^2} \right) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

EXEMPLO

Considere o seguinte *pvi*:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 15y = 2 \text{sen } 3t; \\ y(0) = -1; \\ y'(0) = -4. \end{cases}$$

Aplicando \mathcal{L} na *edo* desse sistema, temos:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6(sY(s) - y(0)) + 15Y(s) = 2 \cdot \frac{3}{s^2 + 3^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) + s + 4 - 6sY(s) - 6 + 15Y(s) &= \frac{6}{s^2 + 9} \implies (s^2 - 6s + 15) Y(s) = \frac{6}{s^2 + 9} - s + 2 \\ \implies Y(s) &= \frac{-s^3 + 2s^2 - 9s + 24}{(s^2 + 9)(s^2 - 6s + 15)}. \end{aligned}$$

Via frações parciais, como

$$\begin{aligned} \frac{-s^3 + 2s^2 - 9s + 24}{(s^2 + 9)(s^2 - 6s + 15)} &= \frac{As + B}{s^2 + 9} + \frac{Cs + D}{s^2 - 6s + 15} \\ &= \frac{(A + C)s^3 + (-6A + B + D)s^2 + (15A - 6B + 9C)s + 15B + 9D}{(s^2 + 9)(s^2 - 6s + 15)}, \end{aligned}$$

¹⁷Cf. seção 4.1.

obtemos $A = B = \frac{1}{10}$, $C = -\frac{11}{10}$ e $D = \frac{25}{10}$. Logo

$$Y(s) = \frac{1}{10} \left(\frac{s+1}{s^2+9} + \frac{-11s+25}{s^2-6s+15} \right).$$

Para a primeira parcela da soma entre parênteses, como

$$\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s^2+9} = \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{s^2+9},$$

sua TLI é dada por

$$\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t.$$

Para a segunda, como

$$\begin{aligned} \frac{-11s+25}{s^2-6s+15} &= \frac{-11s+25}{s^2-6s+9+6} \\ &= \frac{-11s+25}{(s-3)^2+6} \\ &= \frac{-11(s-3)-8}{(s-3)^2+6} \\ &= -11 \cdot \frac{s-3}{(s-3)^2+6} - \frac{8}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{6}}{(s-3)^2+6}, \end{aligned}$$

sua TLI é dada por

$$-11e^{3t} \cos \sqrt{6}t - \frac{8}{\sqrt{6}} e^{3t} \sin \sqrt{6}t.$$

Portanto,

$$y(t) = \frac{1}{10} \left(\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t - 11e^{3t} \cos \sqrt{6}t - \frac{8}{\sqrt{6}} e^{3t} \sin \sqrt{6}t \right)$$

é a solução do *pvi* supracitado.

EXEMPLO

Considere o seguinte *pvi*:

$$\begin{cases} y'' + 3ty' - 6y = 2; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Assim, como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty'\} &= -\frac{d}{ds} (\mathcal{L}\{y'\}) \\ &= -\frac{d}{ds} (sY(s) - y(0)) \\ &= -sY'(s) - Y(s), \end{aligned}$$

a aplicação de \mathcal{L} (a ambos os membros da *edo* do *pvi*) resulta em

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(-sY'(s) - Y(s)) - 6Y(s) = \frac{2}{s},$$

para $s > 0$, conforme a tabela de transformadas apresentada no final da seção 4.1. Portanto,

$$-3sY'(s) + (s^2 - 9)Y(s) = \frac{2}{s},$$

ou seja,

$$Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right)Y(s) = -\frac{2}{3s^2}, \quad (4.9)$$

cujos fator integrante é dado por

$$\begin{aligned} \mu(s) &= e^{\int \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right) ds} \\ &= e^{\ln(s^3) - \frac{s^2}{6}} \\ &= s^3 e^{-\frac{s^2}{6}}, \end{aligned}$$

conforme visto no capítulo 1. Então, multiplicando os dois membros de (4.9) por $\mu(s)$ e integrando, temos:

$$\begin{aligned} s^3 e^{-\frac{s^2}{6}} Y(s) &= 2 \int e^{-\frac{s^2}{6}} \left(-\frac{s}{3}\right) ds \\ &= 2e^{-\frac{s^2}{6}} + \text{cte}. \end{aligned}$$

Logo,

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{\text{cte} e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3}.$$

Por outro lado, como $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0$, temos $\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = 0$, por (4.8).¹⁸ Contudo,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{s^2} + \frac{\text{cte} e^{\frac{s^2}{6}}}{s^2} \right) = 0$$

apenas para $\text{cte} = 0$. Assim,

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} \implies y(t) = t^2.$$

4.2.1 Função delta de Dirac ($\delta(t)$)

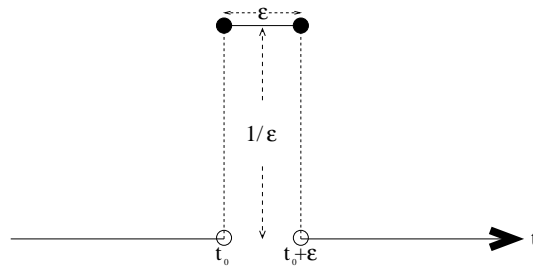
O *impulso* I de uma força $f(t)$, num intervalo de tempo $[t_0, t_0 + \varepsilon]$, é definido como

$$I = \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} f(t) dt,$$

caso essa força seja integrável nesse intervalo de tempo. Caso o impulso seja intenso mas de curta duração, no lugar de $f(t)$, consideramos a força

$$f_\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & \text{para } t \in [t_0, t_0 + \varepsilon], \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

¹⁸Cf. página 78.

Figura 4.5: Força $f_\varepsilon(t - t_0)$ 

conforme a figura 4.5. Assim, para $0 < \varepsilon \ll 1$,¹⁹ o *impulso instantâneo* é definido (e calculado) da forma seguinte:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_0^\infty f_\varepsilon(t - t_0) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [t]_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \\ &= 1 \text{ u.i. (unidades de impulso)} \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$f_\varepsilon(t - t_0) = \frac{1}{\varepsilon} [H(t - t_0) - H(t - (t_0 + \varepsilon))],$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_\varepsilon(t - t_0)\} &= \frac{1}{\varepsilon s} (e^{-t_0 s} - e^{-(t_0 + \varepsilon)s}) \\ &= e^{-t_0 s} \cdot \frac{1 - e^{\varepsilon s}}{\varepsilon s}. \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DE $\delta(t)$

A função $\delta(t)$ modela pulsos de curtíssima duração, como na figura 4.5, caso $\varepsilon \rightarrow 0$, ou seja,

$$\delta(t - t_0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t - t_0).$$

Demonstra-se que:

- $\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & \text{para } t = t_0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Para $t \neq t_0$, considere $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $t \notin [t_0, t_0 + \varepsilon]$;

- $\int_0^\infty \delta(t - t_0) dt = 1$;²⁰

¹⁹Isto é, ε é um número positivo, arbitrariamente pequeno.

²⁰De fato, $\varepsilon \rightarrow 0 \implies I_\varepsilon \rightarrow 1$.

- Se $t_0 \in [t_1, t_2]$ está contido no domínio de $f(t)$, com $f(t)$ contínua em t_0 , então

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t-t_0) dt &= \int_{t_1}^{t_2} f(t_0)\delta(t-t_0) dt \\ &= f(t_0); \end{aligned}$$

- $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-t_0s}$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{f_\varepsilon(t-t_0)\} &= e^{-t_0s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} \\ &= e^{-t_0s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{se^{-\varepsilon s}}{s} \\ &= e^{-t_0s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\varepsilon s}. \end{aligned}$$

Note que, utilizamos L'hôpital na segunda igualdade, de cima para baixo.

EXEMPLO

Para o sistema massa-mola da página 81, considere $m = 1$, $k = 2$, $f(t) = \delta(t-1)$ e $y_0 = y'_0 = 0$. Além disso, ao primeiro membro de sua *edo*, adicione o triplo da derivada de sua função incógnita. Em suma, considere

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t-1); \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Ao aplicarmos \mathcal{L} aos dois membros da *edo* desse sistema, temos

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) &= e^{-s} \implies s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = e^{-s} \\ \implies Y(s) &= e^{-s}F(s), \end{aligned}$$

onde, via frações parciais,

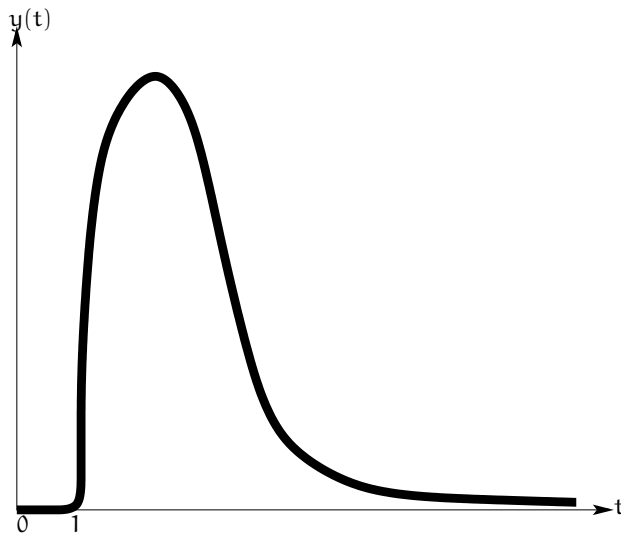
$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}. \end{aligned}$$

Portanto, como

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \\ &= e^{-t} - e^{-2t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}F(s)\} \\ &= f(t-1)H(t-1) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < 1; \\ e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}, & \text{se } t \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

A figura 4.6 é uma representação qualitativa da solução desse sistema mecânico.

Figura 4.6: Representação qualitativa da solução $y(t)$ 

4.2.2 TL e Sistemas

Nos dois exemplos seguintes, vamos obter as soluções $x(t)$ e $y(t)$ de cada sistema dado.

1.

$$\begin{cases} x' = 2x + y; & x(0) = 1; \\ y' = 3x + 4y; & y(0) = 0. \end{cases}$$

Aplicando \mathcal{L} em cada *edo* desse sistema, temos:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 2X(s) + Y(s); \\ sY(s) - y(0) = 3X(s) + 4Y(s). \end{cases}$$

A substituição das condições iniciais dadas em cada equação algébrica desse sistema, resulta em:

$$\begin{cases} sX(s) - 1 = 2X(s) + Y(s); \\ sY(s) = 3X(s) + 4Y(s). \end{cases}$$

Manipulando algebricamente esse sistema, temos:

$$\begin{cases} (s-2)X(s) - Y(s) = 1; \\ -3X(s) + (s-4)Y(s) = 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$X(s) = \frac{s-4}{(s-1)(s-5)} \quad \text{e} \quad Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s-5)}.$$

Então, via frações parciais,

$$X(s) = \frac{3/4}{s-1} + \frac{1/4}{s-5} \quad \text{e} \quad Y(s) = \frac{-3/4}{s-1} + \frac{3/4}{s-5}.$$

Assim, aplicando \mathcal{L}^{-1} em cada uma das duas equações anteriores,

$$x(t) = \frac{3}{4} \cdot e^t + \frac{1}{4} \cdot e^{5t} \quad \text{e} \quad y(t) = -\frac{3}{4} \cdot e^t + \frac{3}{4} \cdot e^{5t}.$$

2.

$$\begin{cases} x' = 3x - 3y + 2; & x(0) = 1; \\ y' = -6x - t; & y(0) = -1. \end{cases} \quad (4.10)$$

Aplicando \mathcal{L} em cada *edo* de (4.10), temos:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 3X(s) - 3Y(s) + \frac{2}{s}; \\ sY(s) - y(0) = -6X(s) - \frac{1}{s^2}. \end{cases}$$

Substituindo as condições iniciais em cada equação algébrica desse sistema, resulta em:

$$\begin{cases} (s-3)X(s) + 3Y(s) = \frac{2+s}{s}; \\ 6X(s) + sY(s) = -\frac{s^2+1}{s^2}. \end{cases}$$

Agora, multiplique a equação de cima, desse sistema linear, por s , a de baixo por -3 e adicione as equações resultantes, desses produtos, para obter:

$$(s^2 - 3s - 18)X(s) = 2 + s + \frac{3s^2 + 3}{s^2}.$$

Assim, via frações parciais,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s^3 + 5s^2 + 3}{s^2(s+3)(s-6)} \\ &= \frac{1}{108} \left(\frac{133}{s-6} - \frac{28}{s+3} + \frac{3}{s} - \frac{18}{s^2} \right). \end{aligned}$$

Aplicando \mathcal{L}^{-1} em ambos os membros dessa equação, temos:

$$x(t) = \frac{1}{108} \left(133e^{6t} - 28e^{-3t} + 3 - 18t \right).$$

Por outro lado, a equação de baixo do sistema (4.10) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} y &= \int (-6x - t) dt \\ &= -\frac{1}{18} \int \left(133e^{6t} - 28e^{-3t} + 3 \right) dt \\ &= -\frac{1}{108} \left(133e^{6t} + 56e^{-3t} + 18t \right) + \text{cte}. \end{aligned}$$

Substituindo a condição inicial, associada à equação supracitada, nessa última, temos:

$$-1 = -\frac{1}{108}(133 + 56) + \text{cte} \implies \text{cte} = \frac{3}{4}.$$

Portanto,

$$y(t) = -\frac{1}{108} \left(133e^{6t} + 56e^{-3t} + 18t - 81 \right).$$

Capítulo 5

Exercícios para os capítulos anteriores

Aqui, cada exercício desacompanhado de resposta/solução está resolvido como exemplo, no capítulo relativo a esse exercício. Sugiro que o leitor tente resolver cada um desses exercícios, sem consultar seu exemplo associado e, somente após um esforço genuíno, caso não consiga resolvê-lo, que tal exemplo seja revisado.

1. Nos itens seguintes, obtenha a solução geral de cada *edo* e a solução particular de cada *pvi*. Além disso, quando possível, determine o domínio I de cada solução obtida.

(a) LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

i.
$$\begin{cases} x' = \cos t; \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t}; \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

iii.
$$x' = \frac{t}{1+t^2}x.$$

iv.
$$\begin{cases} x' = 2tx; \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

v.
$$\begin{cases} tx' = -x + t^2; \\ x(1) = x_0. \end{cases}$$

(b) NÃO-LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

i. SEPARÁVEIS

A.
$$\begin{cases} x' = 1 + x^2; \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

B.
$$x' = \frac{t^2}{x^2}.$$

C.
$$xx' = -t, x > 0.$$

ii. EXATAS¹

A.
$$(2tx - 3t^2) + (t^2 - 2x) \frac{dx}{dt} = 0.$$

B.
$$\begin{cases} (\cos t - t \operatorname{sen} t + x^2) + (2tx) \frac{dx}{dt} = 0; \\ x(\pi) = 1. \end{cases}$$

iii. BERNOULLI

A.
$$\begin{cases} x' + \frac{4}{t}x = t^3x^2; \\ x(2) = -1. \end{cases}$$

¹Primeiramente, utilize a condição necessária para ser exata.

$$B. \begin{cases} x' = 5x + e^{-2t}x^{-2}; \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

iv. HOMOGÊNEA

$$A. \begin{cases} txx' + 4t^2 + x^2 = 0; \\ x(2) = -7. \end{cases}$$

(c) LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

$$i. \begin{cases} x'' + x' - 6x = 0; \\ x(0) = 1; \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

$$ii. 3x'' + x' - x = 0.$$

$$iii. 4x'' + 12x' + 9x = 0.$$

$$iv. x'' - 6x' + 13x = 0.$$

$$v. \begin{cases} x'' + x = 0; \\ x(0) = 2; \\ x'(0) = 3. \end{cases}$$

vi. Podemos modelar oscilações “suficientemente pequenas” para um pêndulo simples, rígido, de massa desprezível e comprimento L u.c. (unidades de comprimento), oscilando livremente, sem atrito em torno de um ponto fixo P , sem sofrer resistência do ar, conectado a uma massa unitária puntiforme na extremidade oposta à P , sob a ação da aceleração da gravidade g , pelo *pvi*:²

$$\begin{cases} x'' + \frac{g}{L}x = 0; \\ x(T) = x_0; \\ x'(T) = 0. \end{cases}$$

vii. $x'' - 3x' + 2x = d(t)$, para:

$$A. d(t) = e^{3t};$$

$$B. d(t) = 2t^2 + 4t + 1;$$

$$C. d(t) = \cos t;$$

$$D. d(t) = e^{3t} + 2t^2 + 4t + 1 + \cos t.$$

viii. $x'' - 6x' + 9x = e^{3t}$.ix. $x'' + x = \sec t$.

2. Para cada item abaixo, obtenha a solução de cada *edo/pvi* e, caso seja possível, seu respectivo domínio I .³

$$(a) \begin{cases} x' + 3t^2x = t^2; \\ x(1) = \frac{1}{3e}. \end{cases} \quad \text{SOLUÇÃO: } x = \frac{1}{3} + \frac{1-e}{e^{t^3}}; I = \mathbb{R}.$$

$$(b) \begin{cases} x' - \frac{1}{t}x = \frac{1}{t} \operatorname{sen} \frac{1}{t}; \\ x\left(\frac{-1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}. \end{cases} \quad \text{SOLUÇÃO: } x = t \cos \frac{1}{t}; I = (-\infty, 0).$$

$$(c) \begin{cases} x' + x = t; \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad \text{SOLUÇÃO: } x = t - 1 + \frac{2}{e^t}; I = \mathbb{R}.$$

$$(d) \begin{cases} x' = 6x^2t; \\ x(1) = \frac{1}{25}. \end{cases} \quad \text{SOLUÇÃO: } x = \frac{1}{28-3t^2}; I = \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}, \sqrt{\frac{28}{3}}\right).$$

²Aqui, T representa o período do pêndulo.

³Lembre-se: $I = \mathbb{R}$ para cada *edo* linear homogênea de segunda ordem com coeficientes contantes.

- (e) $3t^2 - x^3 + (2x - 3tx^2)x' = 0$. SOLUÇÃO: $t^3 - tx^3 + x^2 = cte$.
- (f) $2tx - 3t^2 + (t^2 - 2x)x' = 0$. SOLUÇÃO: $t^2x - t^3 - x^2 = cte$.
- (g) $x' = 5x - 5tx^3$. SOLUÇÕES: $x = \pm \frac{\sqrt{10}e^{5t}}{\sqrt{cte + e^{10t}(10t-1)}}$.
- (h) $6x' - 2x = tx^4$. SOLUÇÃO: $x = -\frac{2^{1/3}e^{t/3}}{(cte + e^t(t-1))^{1/3}}$.
- (i) $x' = 1 + \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2$. SOLUÇÃO: $x = t \tan(\ln|t| + cte)$.
- (j) $4x'' + x' = 0$. SOLUÇÃO: $x = cte_1 + cte_2e^{-t/4}$.
- (k) $x'' + 4x = 8t^2 - 20t + 8 + 5 \sin 3t - 5 \cos 3t + 24e^{-2t} + 8 \cos 2t$. SOLUÇÃO: $x = cte_1 \cos 2t + cte_2 \sin 2t + 2t^2 - 5t + 1 + \cos 3t - \sin 3t + 3e^{-2t} + 2t \sin 2t + \frac{\cos 2t}{2}$.
- (l) $x'' + 2x' = 6e^{-2t} + 12t^2$. SOLUÇÃO: $x = cte_1e^{-2t} + cte_2 - 3te^{-2t} + 2t^3 - 3t^2 + 3t$.
- (m) $x'' - 6x' - 7x = 13 \cos 2t + 34 \sin 2t + 8e^{-t} - 7t - 6$.
SOLUÇÃO: $x = cte_1e^{-t} + cte_2e^{7t} + \cos 2t - 2 \sin 2t + t - te^{-t}$.
- (n) $\begin{cases} x'' - 4x' + 4x = 2e^{2t} - 12 \cos 3t - 5 \sin 3t; \\ x(0) = -2; \\ x'(0) = 4. \end{cases}$
SOLUÇÃO: $x = -2e^{2t} + 5te^{2t} + t^2e^{2t} + \sin 3t$.

RESOLUÇÃO DO ITEM (k)

Por (2.7), página 26, basta obter $x = x_h + x_p$, onde x_h é a solução geral de $x'' + 4x = 0$ e x_p é uma solução particular da *edo*

$$\begin{aligned} x'' + 4x &= d \\ &= d_1 + d_2 + d_3 + d_4; \\ d_1(t) &= 8t^2 - 20t + 8, \\ d_2(t) &= 5 \sin 3t - 5 \cos 3t, \\ d_3(t) &= 24e^{-2t}, \\ d_4(t) &= 8 \cos 2t. \end{aligned}$$

Por um lado, $r^2 + 4 = 0$ acarreta $r_{\pm} = 0 \pm 2i$, onde $i^2 = -1$. Assim,

$$\begin{aligned} x_h &= e^{0 \cdot t} (cte_I \cos 2t + cte_{II} \sin 2t) \\ &= cte_I \cos 2t + cte_{II} \sin 2t. \end{aligned}$$

Por outro, determinando um solução particular x_{p_i} de $x'' + 4x = d_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, temos uma solução particular

$$x_p = x_{p_1} + x_{p_2} + x_{p_3} + x_{p_4}$$

de $x'' + 4x = d$.⁴ Portanto:

⁴Verifique!

i = 1

Para A e B constantes,

$$\begin{aligned}x_{p_1}(t) = At^2 + Bt + C &\implies x'_{p_1}(t) = 2At + B \\ &\implies x''_{p_1}(t) = 2A\end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{aligned}x''_{p_1} + 4x_{p_1} = d_1 &\implies 4At^2 + 4Bt + 4C + 2A = 8t^2 - 20t + 8 \\ &\implies A = 2, B = -5 \text{ e } C = 1.\end{aligned}$$

Assim,

$$x_{p_1}(t) = 2t^2 - 5t + 1;$$

i = 2

Para D e E constantes,

$$\begin{aligned}x_{p_2}(t) = D \cos 3t + E \sin 3t &\implies x'_{p_2}(t) = -3D \sin 3t + 3E \cos 3t \\ &\implies x''_{p_2}(t) = -9D \cos 3t - 9E \sin 3t\end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{aligned}x''_{p_2} + 4x_{p_2} = d_2 &\implies -5D \cos 3t - 5E \sin 3t = -5 \cos 3t + 5 \sin 3t \\ &\implies D = 1 \text{ e } E = -1.\end{aligned}$$

Assim,

$$x_{p_2}(t) = \cos 3t - \sin 3t.$$

i = 3

Para F constante,

$$\begin{aligned}x_{p_3}(t) = Fe^{-2t} &\implies x'_{p_3}(t) = -2Fe^{-2t} \\ &\implies x''_{p_3}(t) = 4Fe^{-2t}\end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{aligned}x''_{p_3} + 4x_{p_3} = d_1 &\implies 8e^{-2t} = 24e^{-2t} \\ &\implies F = 3.\end{aligned}$$

Assim,

$$x_{p_3}(t) = 3e^{-2t}.$$

i = 4

Para G e H constantes,

$$\begin{aligned}x_{p_4}(t) = G \cos 2t + H \sin 2t &\implies x'_{p_4}(t) = -2G \sin 2t + 2H \cos 2t \\ &\implies x''_{p_4}(t) = -4G \cos 2t - 4H \sin 2t\end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{aligned}x''_{p_4} + 4x_{p_4} &= 0 \\ &\neq d_4.\end{aligned}$$

Logo, como G e H não podem ser constantes, podemos considerar

$$x_{p_4}(t) = g(t) \cos 2t + h(t) \operatorname{sen} 2t,$$

onde g e h são funções a serem determinadas. Contudo, utilizaremos outro procedimento para obter x_{p_4} : a fórmula da variação de parâmetros da subseção 2.2.2. Assim, como

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ -2 \operatorname{sen} 2t & 2 \cos 2t \end{vmatrix} \\ &= 2(\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 2t) \\ &= 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{p_4}(t) &= \cos 2t \int \frac{\operatorname{sen} 2t(-8 \cos 2t)}{1 \cdot 2} dt + \operatorname{sen} 2t \int \frac{\cos 2t(8 \cos 2t)}{1 \cdot 2} dt \\ &= -4 \cos 2t \int \operatorname{sen} 2t \cos 2t dt + 4 \operatorname{sen} 2t \int \cos^2 2t dt. \end{aligned}$$

Então, para $u = 2t$,⁵

$$\begin{aligned} x_{p_4}(t) &= -2 \cos 2t \int \operatorname{sen} u \cos u du + 2 \operatorname{sen} 2t \int \cos^2 u du \\ &= -\cos 2t \int \operatorname{sen} 2u du + 2 \operatorname{sen} 2t \int \cos^2 u du \\ &= \cos 2t \left(\frac{\cos 2u}{2} \right) + 2 \operatorname{sen} 2t \left(\frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4} \right) \\ &= \frac{\cos 2t \cos 4t}{2} + \operatorname{sen} 2t \left(2t + \frac{\operatorname{sen} 4t}{2} \right) \\ &= 2t \operatorname{sen} 2t + \frac{\cos 4t \cos 2t + \operatorname{sen} 4t \operatorname{sen} 2t}{2} \\ &= 2t \operatorname{sen} 2t + \frac{\cos 2t}{2}. \end{aligned}$$

Note que, na segunda (respectivamente, última) igualdade, de cima para baixo, utilizamos a fórmula do “seno da soma” (respectivamente, “cosseno da diferença”). Além disso, como

$$\begin{aligned} x'_{p_4}(t) &= 2 \operatorname{sen} 2t + 4t \cos 2t - \operatorname{sen} 2t \\ &= \operatorname{sen} 2t + 4t \cos 2t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x''_{p_4}(t) &= 2 \cos 2t + 4 \cos 2t - 8t \operatorname{sen} 2t \\ &= 6 \cos 2t - 8t \operatorname{sen} 2t \end{aligned}$$

e, portanto,

$$x''_{p_4} + 4x_{p_4} = d_4.$$

⁵Logo, $dt = \frac{1}{2} du$.

3. Quais das seguintes séries convergem/divergem? Justifique suas respostas e apresente os domínios e raios de convergência para as séries de potências convergentes.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n};$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n};$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n};$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}};$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3+3n}{7n^3-2n^2+n};$

RESPOSTA: A série diverge.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n};$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}};$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!};$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n};$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1};$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)};$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n};$

(o) $\sum_{n=0}^{\infty} t^n;$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nt}{2^n};$

(q) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n;$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n}.$

(s) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)!(t-2)^n.$

4. Utilizando a série geométrica, obtenha representações em série de funções e I para:

(a) $g(t) = \frac{1}{1+t^3};$

(b) $h(t) = \frac{2t^3}{1+t^3};$

(c) $\varphi(t) = \frac{t}{5-t};$

(d) $\phi(t) = \frac{t^2}{t-5};$

(e) $x(t) = \frac{1}{(1-t)^2};$

(f) $y(t) = \frac{2}{(1-t)^3}.$ ⁶ RESPOSTA: $y(t) = 2 + 6t + 12t^2 + \dots$ para cada $t \in I = (-1, 1)$.

5. Verifique a analiticidade de $f(t)$ em $I = (-R, R)$ escrevendo a série de Maclaurin de f em I se:

(a) $f(t) = \frac{1}{1-t}, R = 1;$

(b) $f(t) = e^t, R = \infty;$

(c) $f(t) = \ln(1+t), R = 1;$

(d) $f(t) = \text{sen } t, R = \infty;$

(e) $f(t) = \text{cos } t, R = \infty.$

6. Resolva as *edos* seguintes via séries de Taylor em torno de zero.

(a) $x' - x = 0.$

(b) $x' = t^2x.$

(c) $x'' + x = 0.$

(d) $x'' - tx = 0.$

(e) $x'' - t^2x = 0.$

(f) $(t^2 + 1)x'' - 4tx' + 6x = 0.$

(g)
$$\begin{cases} (t^2 + 1)x'' + tx' - x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

(h)
$$\begin{cases} x'' - 2tx' + x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

7. Nos itens seguintes, dada uma função na variável t , obtenha a sua TL na variável s e, reciprocamente, dada uma função na variável s , determine a sua TLI na variável t .

(a) $p(t) = -t^4 + 2t^3 + t - 7.$

(b) $F(s) = \frac{s+3}{s(s-1)(s+2)}.$

(c) $G(s) = \frac{s-1}{s^2+2s-8}.$

(d) $X(s) = \frac{s^2}{(s+3)^3}.$

⁶Note que $\frac{dx}{dt} = y.$

(e) $Y(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s+5}$.

(f) $S(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 3; \\ \text{sen } t, & \text{se } t \geq 3. \end{cases}$

(g) $A(s) = \frac{e^{-7s}}{(s-3)^3}$.

(h) $x(t) = \text{sen}^2 t$.

(i) $g(t) = t \cos t$.

(j) $h(t) = t^2 \cos(3t)$.

(k) $H(s) = \frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$.

8. Resolva, usando uma tabela de transformadas de Laplace, os sistemas seguintes:

(a) Sistema massa-mola com forçamento horizontal $f(t)$, massa m e constante de Hooke k :

$$\begin{cases} my''(t) + ky(t) = f(t); \\ y(0) = y_0; \\ y'(0) = y'_0. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y'' - 6y' + 15y = 2 \text{sen } 3t; \\ y(0) = -1; \\ y'(0) = -4. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y'' + 3ty' - 6y = 2; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t-1); \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x' = 2x + y; & x(0) = 1; \\ y' = 3x + 4y; & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x' = 3x - 3y + 2; & x(0) = 1; \\ y' = -6x - t; & y(0) = -1. \end{cases}$$