que aqui representa a posição de uma partícula no instante de tempo t u.t. (unidades de tempo).[33] Considere que queremos obter a velocidade de tal partícula no instante t u.t., isto é, queremos saber quão rapidamente a posição varia em relação ao tempo. Nesse caso, a velocidade é calculada pela derivada

$$s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

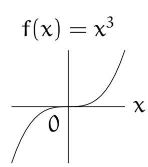
no instante t u.t. Assim, $s'(t) = 2t$ u.v. (unidades de velocidade) é a medida de tal velocidade instantânea. Por exemplo, caso a posição seja medida em metros e o tempo em segundos, passados $t = 10$ segundos, a partícula fica sujeita a uma velocidade (neste instante) de $s'(t) = 20\ m/s$.[34]

- *Otimização (maximização-minimização)*
  Um ponto α *de máximo* (respectivamente, *de mínimo*) *local* de uma função f satisfaz a condição $\boxed{f(\alpha) \geq f(x)}$ (respectivamente, $\boxed{f(\alpha) \leq f(x)}$) para cada x pertencente a algum intervalo aberto centrado em α. Um *extremo local* de f é um máximo local ou um mínimo local de f.[35]
  Na figura 1.1, considere que $P_i = (x_i, f(x_i))$ pertence ao gráfico de uma função f, $i = 0, \ldots, 6$. As abscissas de tais pontos são extremos locais de f.
  Qualquer função que tenha extremos locais similares a x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, muda de crescente para decrescente ou de decrescente para crescente.
  Um ponto *interior* ao domínio de uma função pertence a algum intervalo aberto inteiramente contido no domínio de tal função.
  Na figura 1.1, apenas x_0 e x_6 não são interiores ao domínio de $f(x)$.
  Demonstra-se que:[36]

  > *Se $f(x)$ tem extremo local num ponto α interior ao seu domínio e tem derivada $f'(\alpha)$ nesse ponto, então tal ponto é crítico, isto é, $f'(\alpha) = 0$.*

  Na figura 1.1, embora as abscissas de índices pares sejam pontos de máximo locais e as de índices ímpares sejam pontos de mínimo locais, apenas x_1, x_2 e x_5 são interiores ao domínio de $f(x)$ e existe $f'(x)$ em cada um desses pontos. Note que $f'(x_i) = 0$ para $i = 1, 2, 5$, corroborando o resultado anterior.

  Contudo, a recíproca desse resultado não é verdadeira: Para $f(x) = x^3$, por exemplo, $x = 0$ é um ponto interior com $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, mas não é extremo local (conforme pode ser visto na próxima figura). Um ponto como esse é chamado de *ponto de sela*.



Linha com margem vertical direita desalinhada

[33]Por exemplo, desconsiderando as dimensões, uma bola de boliche lisa descendo, sem atrito, um plano inclinado com inclinação adequada, varia a sua posição (no tempo) aproximadamente via tal $s(t)$.

[34]Confira Gonick (2014) para mais exemplos.

[35]Um ponto do gráfico de uma função cuja abscissa é um ponto de máximo local representa o "cume de uma montanha", enquanto aquele cuja abscissa é um ponto de mínimo local representa o "fundo de um vale".

[36]Confira Gonick (2014).

Resultados análogos são válidos para funções reais de três variáveis reais que sejam contínuas.

Exemplo

A função $w = f(x, y, z) = \sqrt{\frac{\pi x^3 y^2 z + y^5 z^7 + 2z^6}{z^2+1}}$ é contínua.

3.2.3 Derivação parcial para funções de duas/três variáveis reais[14]

Para calcular a derivada parcial de uma função em relação a uma de suas variáveis independentes, digamos y, consideram-se todas as suas outras variáveis independentes, digamos x e z, como constantes e, em sendo possível, deriva-se a função apenas em relação a y. Por exemplo, se $w = f(x, y, z)$, a *derivada parcial de* f *em relação a* y é denotada por f_y e pode ser obtida derivando-se f (como no cálculo de funções reais de *uma* variável real) apenas em relação à variável y, sendo x e z constantes em tal derivação.
Além de f_y, podemos utilizar também, por exemplo, as notações $\frac{\partial f}{\partial y}$ ou $\frac{\partial w}{\partial y}$.
Agora, seja f *simétrica*, isto é, a permutação de duas ou três de suas variáveis independentes não modifica a função. Suponha, por exemplo, que tal simetria tenha lugar nas variáveis x e y, como nos exercícios 1(a), 1(b) e 1(d), 2(a) e 2(b) e 3(c), dados a seguir. Assim, f_y é obtida simplesmente permutando-se as variáveis x e y da f_x. Em outras palavras, c cálculo só precisa ser feito para f_x; f_y segue via permutação simples.

o

Exercícios

1. Obtenha f_x e f_y para:

   (a) $f(x, y) = xy$;

   (b) $f(x, y) = e^{xy}$;

   (c) $f(x, y) = x \cos x \cos y$;

   (d) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$.

2. Calcule as derivadas parciais $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ das funções dadas nos pontos indicados.

   (a) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $(0, 0)$, $(a/2, a/2)$;

   (b) $z = \ln \sqrt{1 + xy}$, $(1, 2)$, $(0, 0)$;

   (c) $z = e^{ax} \cos(bx + y)$, $(2\pi/b, 0)$.

3. Em cada um dos casos seguintes, obtenha as derivadas parciais $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$.

   (a) $w = xe^{x^2+y^2}$;

   (b) $w = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;

   (c) $w = e^{xy} \ln(x^2 + y^2)$;

   (d) $w = x/y$;

   (e) $w = \cos(ye^{xy}) \operatorname{sen} x$.

[14] É necessário o conceito de *limites* para uma definição formal dessas *derivadas*.

Demonstração da existência da área mínima para o exercício anterior

Aqui é requerido um grau de sofisticação matemática fora do escopo de um curso de cálculo. Portanto, sugere-se que a leitura dessa demonstração seja postergada.[45]
Para facilitar a discussão, considere o caso $V = 1$ e denote $x = x_1$ e $y = y_1$. Considere ainda

Escreva x_2 no lugar de y_1

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$$

e a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}.$$

Agora, note que o ponto crítico obtido anteriormente é dado por

$$P = \left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)$$

e que $f(P) < 5$. Usaremos esse resultado, de modo heurístico, para verificar que f tem um minimizador global.
Primeiro, afirmamos que se $f(x_1, x_2) \leq 5$, então $\frac{2}{5} \leq x_i \leq 4$, $i = 1, 2$. De fato, se $x_1 < \frac{2}{5}$ ou $x_2 < \frac{2}{5}$, então

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 x_2 + \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} \\ &> \frac{2}{x_i} \\ &> 5. \end{aligned}$$

Além disso, se $x_1 > 4$ ou $x_2 > 4$, então

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 x_2 + \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} \\ &> x_1 x_2 + \frac{8}{x_1 x_2} = \frac{\left(x_1 x_2 - 2\sqrt{2}\right)^2}{x_1 x_2} + 4\sqrt{2} \\ &> 5. \end{aligned}$$

Isto prova a afirmação. Agora, considere o conjunto

$$L = \{(x_1, x_2) \in D \mid f(x_1, x_2) \leq 5\}.$$

L é fechado, pois, se uma sequência em L converge para um ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, então $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ com $f(\bar{x}, \bar{y}) \leq 5$. Além disso, L é limitado em decorrência da afirmação provada anteriormente. Portanto, por (O_2), existe um minimizador $P_0 \in L$ para f restrita a L. Agora, caso $(x_1, x_2) \in D - L$, temos

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &> 5 \\ &\geq f(P_0), \end{aligned}$$

[45] Para mais detalhes, cf. Ribeiro e Barbosa (2021).

(a) Sendo $f(x,y) = (xe^y)^8$, $f_x = 8(xe^y)^7e^y$, $f_y = 8(xe^y)^8$, $x = 0,99$, $x_0 = 1$, $\Delta x = x - x_0 = -0,01$, $y = 0,002$, $y_0 = 0$ e $\Delta y = y - y_0 = 0,002$, temos que

$$\begin{aligned}
(0,99e^{0,002})^8 &= f(0,99,\ 0,002) \\
&\approx f(1,0) + f_x(1,0)\cdot\Delta x + f_y(1,0)\cdot\Delta y \\
&\approx 1 + 8(-0,01) + 8(0,002) \\
&\approx 0{,}936.
\end{aligned}$$

Note que, numa calculadora $(0,99e^{0,002})^8 \approx 0{,}938$. Portanto, o erro é aproximadamente $0,002$.
(b) Sendo $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$, $f_x = 3x^2 - 6y$, $f_y = 3y^2 - 6x$, $x = 0,99$, $x_0 = 1$, $\Delta x = x - x_0 = -0,01$, $y = 2,01$, $y_0 = 2$ e $\Delta y = 0,01$, temos que

$$\begin{aligned}
(0,99)^3 + (2,01)^3 - 6(0,99)(2,01)7 &= f(0,99,\ 2,01) \\
&\approx f(1,2) + f_x(1,2)\cdot\Delta x + f_y(1,2)\cdot\Delta y \\
&\approx -3 + (-9)(-0,01) + 6(0,01) \\
&\approx -2,8500.
\end{aligned}$$

Deletar esse "7"

Note que, numa calculadora $(0,99)^3 + (2,01)^3 - 6(0,99)(2,01) \approx -2{,}8485$. Portanto, o erro é aproximadamente $0,0015$.

5. Considere um cilindro cujo raio mede aproximadamente 2 metros e cuja altura mede aproximadamente 3 metros. Determine a precisão das medidas do raio e da altura para que o erro estimado do volume via aproximação linear não ultrapasse $0,1$ metros cúbicos. Suponha ainda que o possível erro cometido ao se medir o raio seja igual ao possível erro cometido ao se medir a altura.

Resolução
$V(r,h) = \pi r^2 h$ é o volume do cilindro de raio r e altura h. Suas derivadas parciais são dadas por $V_r = 2\pi rh$ e $V_h = \pi r^2$. Assim, por aproximação linear,

$$V(r_0 + \Delta r, h_0 + \Delta h) \approx V(r_0, h_0) + V_r(r_0, h_0)\cdot\Delta r + V_h(r_0, h_0)\cdot\Delta h, \tag{3.5}$$

onde $r_0 = 2$, $h_0 = 3$ e $\Delta r = \Delta h \ll 1$ é o erro cometido nas aproximações do raio e da altura. Logo, o erro estimado do volume é dado por

$$\begin{aligned}
|\Delta V| &= |V(2 + \Delta r, 3 + \Delta h) - V(2,3)| \\
&\approx |V_r(2,3)\cdot\Delta r + V_h(2,3)\cdot\Delta h| \\
&\approx |(V_r(2,3) + V_h(2,3))\cdot\Delta r| \\
&\approx 16\pi|\Delta r|.
\end{aligned}$$

Então, para que $|\Delta V|$ seja majorado por $0,1$ m^3, basta que $16\pi|\Delta r|$ o seja. Assim,

$$16\pi|\Delta r| \leq 0,1 \Leftrightarrow |\Delta r| \leq \frac{1}{160\pi} \approx 0,001989.$$

Portanto, a precisão requerida é da ordem de 2 mm tanto no raio quanto na altura.

Além disso, tal interseção implicaria na existência de algum ponto x de mesma imagem pelas funções dadas, isto é, $x^2+1=x-2$, ou seja, $x^2-x+3=0$, que é uma equação sem solução real.

Seguem duas resoluções. A primeira utiliza "cálculo II". A segunda, "cálculo I".

Primeira resolução

Seja $f(x,y)$ o quadrado da distância $d(x,y)$ entre o ponto $\left(x,x^2+1\right)$ da parábola e o ponto $(y,y-2)$ da reta. Assim, $f(x,y)=(x-y)^2+\left(x^2-y+3\right)^2$ e todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ são interiores ao domínio de f. Agora, como d e f são positivas (pois seus gráficos não se interceptam), temos $d_{\text{mín}}=\sqrt{f_{\text{mín}}}$, caso exista a distância mínima.[75] Ainda, observando os gráficos supracitados, não existe $d_{\text{máx}}$.

Leia-se: "pois os gráficos supracitados não se interceptam"

- Cálculo dos pontos críticos

  I. $f_x=2(x-y)+4x(x^2-y+3)=0$,

  II. $f_y=-2(x-y)-2(x^2-y+3)=0$.

  Adicionando I a II, temos $2(2x-1)(x^2-y+3)=0$. Logo, $x=\frac{1}{2}$ ou $x^2-y+3=0$. Então, por um lado, substituindo $x=\frac{1}{2}$ em I ou II, temos

$$2\left(\frac{1}{2}-y\right)+2\left(\frac{1}{4}-y+3\right)=1-2y+\frac{1}{2}-2y+6=0.$$

  Portanto, $y=\frac{15}{8}$. Por outro lado, substituindo $x^2-y+3=0$ em I ou II, temos $x=y$. Logo, $x^2-x+3=0$, que é uma equação sem solução real. Assim, o único ponto crítico (candidato a ponto de mínimo) de f, por ($O_{1'}$), é $(1/2,\ 15/8)$.

- Teste da derivada II

  De $f_{xx}=14+12x^2-4y$, $f_{yy}=4$ e $f_{xy}=-2-4x$, temos $f_{xx}(1/2,15/8)>0$ e $H(1/2,15/8)>0$. Então, $(1/2,15/8)$ é ponto de mínimo local para f. Como não existe outro ponto de mínimo local interior a Dom(f), pois esse ponto anularia ∇f,[76] $(1/2,15/8)$ é mínimo global.

Portanto, a distância mínima ocorre entre os pontos $(1/2,\ 5/4)$ e $(15/8,\ -1/8)$ e é dada por $d_{\text{mín}}=\sqrt{f_{\text{mín}}}=\frac{11\sqrt{2}}{8}$ u.c.

Segunda Resolução

Determinaremos o ponto da parábola $f(x)=x^2+1$ onde a inclinação da reta tangente é a mesma da reta $y=x-2$.[77] Nesse caso, $2x=f'(x)=1$, isto é, $x=\frac{1}{2}$. Então, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$.

[75] d pode não atingir um valor mínimo?
Ou seja, pode existir um limite inferior $\ell>0$ para d tal que $d(x,y)>\ell$ para todo (x,y)?
Na segunda resolução dessa questão, verificaremos que existe $d_{\text{mín}}=\ell$.

[76] Cf. (O_1).

[77] Note que essas retas são paralelas.

4.2.3 Mudança de variáveis nas integrais triplas

Integração por substituição

Para uma função $f(x,y,z)$ contínua num domínio D_{xyz}, sendo que entre D_{xyz} e um domínio D_{uvw} existe uma correspondência biunívoca dada por $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ e $z = z(u,v,w)$, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas e *jacobiano*

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0$$

Correção na footnote
(Cf. pé da página)

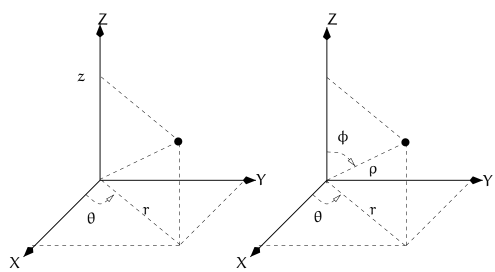
em D_{uvw}, temos

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{D_{uvw}} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw.$$ [22]

Mudança para coordenadas cilíndricas e esféricas: de D_{xyz} para $D_{r\theta z}$ e $D_{\rho\phi\theta}$

Primeiramente, objetivando relacionar coordenadas cartesianas e cilíndricas (respectivamente, esféricas), considere a figura 4.6.

Figura 4.6: Coordenadas cilíndricas e esféricas



Integração em coordenadas cilíndricas

De $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ e $z = z$, temos

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

e

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{D_{r\theta z}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\,r dr d\theta dz.$$

[22] Para uma aplicação, confira o exercício resolvido da página 132.

140, no lugar de 132.

Nas segunda e terceira igualdades da demonstração, foram utilizadas, respectivamente, a regra da cadeia apresentada na seção 3.2.7 e o teorema fundamental do cálculo para funções do "cálculo I".

Observações

- Na equação (5.2), no lugar da curva Γ e de sua parametrização γ, considere uma outra curva Λ parametrizada por λ, mas mantenha todas as outras hipóteses inalteradas. Então,

$$\int_\Gamma \nabla f \cdot d\gamma = \int_\Lambda \nabla f \cdot d\lambda,$$

  pois a integral depende apenas de f e dos pontos A e B.

- Se $F = \nabla f$ para alguma f como a utilizada em (5.2), então $\int_\gamma F \cdot d\gamma$ só depende dessa f e dos pontos A e B, mas não da curva Γ que liga esses pontos. " Escreva Γ no lugar desse γ

Exercícios

1. Calcule $\int\limits_\Gamma \nabla f \cdot d\gamma$ para $f(x, y) = \cos(xy\pi)$ e qualquer curva Γ cuja parametrização tenha derivada contínua e pontos inicial e final em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ e $(2, 1)$, respectivamente.[7]

2. Considerando a função $F(x, y) = (y, x)$, responda às seguintes questões:[8]

   (a) Existe alguma função f diferenciável, com derivadas parciais f_x e f_y contínuas, tal que $F = \nabla f$?

   (b) Existe alguma relação entre o teorema fundamental supracitado e o cálculo da integral de linha de F ao longo de uma curva arbitrária?

5.2 Teorema de Green

Seja Γ uma curva parametrizada no sentido anti-horário por $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ contínua. Considere que Γ é:

- *fechada*, isto é, $\gamma(a) = \gamma(b)$;
- *simples*, isto é, Γ não tem autointerseção;[9]
- C^1 *por partes*, isto é, existe uma partição de $[a, b]$ em um número finito de subintervalos fechados tal que γ tem derivada contínua em cada um desses subintervalos.

Por fim, sejam $f, g : \Gamma \to \mathbb{R}$ contínuas com derivadas g_x, f_y contínuas num domínio $D = D_{xy}$ aberto cuja fronteira seja a curva Γ. Demonstra-se, assim, a *equação de Green*:

$$\begin{aligned}\iint_D (g_x - f_y)\, dxdy &= \oint_\Gamma (f, g) \cdot d\gamma \\ &= \oint_\Gamma f dx + g dy.\end{aligned} \tag{5.3}$$

[7] Resolução na seção 5.4.
[8] *Idem.*
[9] Isto é, $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ para $t_1, t_2 \in]a, b]$ com $t_1 \neq t_2$.