

TEORIA DE BIFURCAÇÕES

A EDO (AUTÔN.)

BIFURCAÇÃO

Ocorre q^{do} o sist. din. associado

$$\dot{x} = f(\lambda, x) \quad (*)$$

APRESENTA UMA MUDANÇA QUALITATIVA NO SEU ESPAÇO DE FASE (ESPAÇO DAS ÓRBITAS) P/ $\lambda = \lambda_0$.

EX: A QUANTIDADE OU A ESTABILIDADE DAS SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO x^* DE $(*)$ SÃO ALTERADAS P/ $\lambda = \lambda_0$. (CF. MEET E CTH P/ EXS.)

OBS:

- λ REPRESENTA UM OU MAIS PARÂMETROS: $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ONDE k PODE SER = 1.
- COMO ANTES, x^* SÃO OBTIDAS FAZENDO $f(\lambda, x) = 0$.
- A EXISTÊNCIA E A ESTABILIDADE DE x^* AGORA TAMBÉM DEPENDEM DE λ .

POR ENQUANTO, POR SIMPLICIDADE, CONSIDERE $(*)$ ESCALAR:

$$\dot{x} = f(\lambda, x). \quad (*)'$$

∴ SE

$\varphi: t \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}$ É SOL. DE $(*)'$,

$$\dot{\varphi}(t) = f(\lambda, \varphi(t))$$

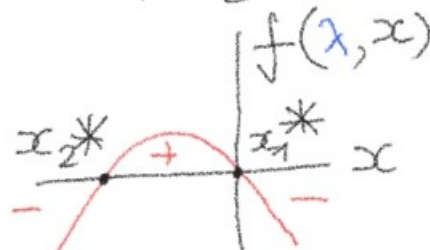
∀ t ADMISSÍVEL.

BIFURCAÇÃO TRANSCRÍTICA

EX: $f(\lambda, x) = \lambda x - x^2 = x(\lambda - x)$
 $\therefore f(\lambda, x) = 0 \Rightarrow x^* \in \{0, \lambda\}$

CASO 1: $\lambda < 0$

AQUI, $x_2^* < x_1^*$.

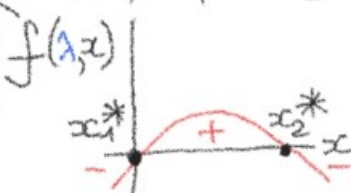


$$\begin{aligned} \varphi(t) < x_2^* &\Rightarrow f(\lambda, \varphi(t)) < 0 \\ &\Rightarrow \dot{\varphi}(t) < 0 \\ &\Rightarrow \varphi(t) \text{ DECRESC.;} \\ \varphi(t) \in (x_2^*, x_1^*) &\Rightarrow f(\lambda, \varphi(t)) > 0 \\ &\Rightarrow \dot{\varphi}(t) > 0 \\ &\Rightarrow \varphi(t) \text{ CRESC.;} \\ \varphi(t) > x_1^* &\Rightarrow f(\lambda, \varphi(t)) < 0 \\ &\Rightarrow \dot{\varphi}(t) < 0 \\ &\Rightarrow \varphi(t) \text{ DECRESC..} \end{aligned}$$

∴ x_1^* É EST. E x_2^* É INST.

CASO 2: $\lambda > 0$

AQUI, $x_1^* < x_2^*$.



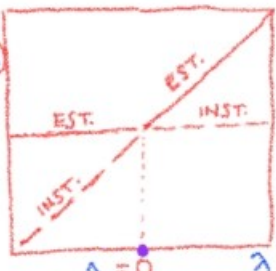
$$\begin{aligned} \varphi(t) < x_1^* &\Rightarrow f(\lambda, \varphi(t)) < 0 \\ &\Rightarrow \dot{\varphi}(t) < 0 \\ &\Rightarrow \varphi \text{ DECRESCENTE;} \\ \varphi(t) \in (x_1^*, x_2^*) &\Rightarrow f(\lambda, \varphi(t)) > 0 \\ &\Rightarrow \dot{\varphi}(t) > 0 \\ &\Rightarrow \varphi \text{ CRESCENTE;} \\ \varphi(t) > x_2^* &\Rightarrow f(\lambda, \varphi(t)) < 0 \\ &\Rightarrow \dot{\varphi}(t) < 0 \\ &\Rightarrow \varphi \text{ DECRESCENTE.} \end{aligned}$$

∴ x_1^* É INST. E x_2^* É EST.

CASO 3: $\lambda = 0$

$\varphi(t) < x^* \Rightarrow f(\lambda, \varphi(t)) < 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) < 0 \Rightarrow \varphi(t) \text{ DECRESC..}$
 $\therefore x^* \text{ É INST.}$

DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO



GRÁFICOS DE
 $x_1^*: \lambda \mapsto x_1^*(\lambda) = 0$
 $x_2^*: \lambda \mapsto x_2^*(\lambda) = \lambda$

DEF: PARTES DO DIAG. DE BIF. ONDE $x^* = x^*(\lambda)$ SÃO OS "RAMOS DE SOLUÇÕES", ISTO É,

EX: P/A BIF. TRANSC. ANT.:
 $\{(\lambda, x^*) / x^* = 0, \lambda < 0\} \cup \{(\lambda, x^*) / x^* = \lambda, \lambda < 0\}$
 $\cup \{(\lambda, x^*) / x^* = 0, \lambda > 0\} \cup \{(\lambda, x^*) / x^* = \lambda, \lambda > 0\}$

UM "RAMO DE SOL." É UM SUBCONJ. DE

$$\{(\lambda, x) / f(\lambda, x) = 0\}$$

QUE PODE SER ESCRITO DA FORMA

$$\{(\lambda, g(\lambda)) / \lambda \in (a, b)\}$$

c/g SUAVE EM (a, b) .

OBS: A EXISTÊNCIA DE TAL g DECORRE DO "TEO. DA Fc. IMPLÍCITA" P/ P.TOS SUFIC. PRÓXIMOS DE (λ, x^*) TAIS QUE

$$\begin{cases} f(\lambda, x^*) = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, x^*) \neq 0. \end{cases}$$

ALÉM DISSO, RAMOS DE SOLÇS. PODEM SE INTERCEPTAR QDO:

$$\begin{cases} f(\lambda, x^*) = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, x^*) = 0. \end{cases}$$

P.TOS (λ, x^*) ONDE TAL CONDIÇÃO OCORRA SÃO CANDIDATOS A P.TOS DE BIF.!

EX: P/A BIF. TRANSC. ANT.:

$$\begin{cases} f(\lambda, x^*) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, x^*) = \lambda - 2x^* = 0 \end{cases}$$

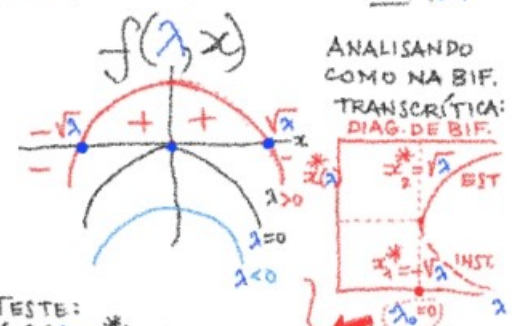
P/ $(\lambda, x^*) = (0, 0)$.

BIFURC. NO-SELA

EX: $f(\lambda, x) = \lambda - x^2$.

SEJA $f(\lambda, x) = 0$.

$$\therefore \begin{cases} \lambda < 0 \Rightarrow \nexists x^*; \\ \lambda = 0 \Rightarrow x^* = 0; \\ \lambda > 0 \Rightarrow x^* = \pm\sqrt{\lambda}. \end{cases}$$



TESTE:
 $\begin{cases} f(\lambda, x^*) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, x^*) = -2x^* = 0 \end{cases}$
 QDO $(\lambda, x^*) = (\lambda, 0) \forall \lambda > 0$

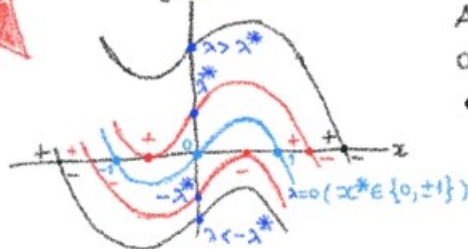
RAMOS DE SOLÇS $\rightarrow \{(\lambda, -\sqrt{\lambda}) / \lambda > 0\} \cup \{(\lambda, \sqrt{\lambda}) / \lambda > 0\}$.

CONT. →

BIFURCAÇÕES

"HYSTERESIS"

EX: $f(\lambda, x) = \lambda + x - x^3$



- $f(\lambda, x) = 0$ PODE ACARRETAR UMA, DUAS OU TRÊS SOLUÇÕES DE EQUIL. x^*
- $\exists \lambda^*$ TAL QUE:
 - $\rightarrow \lambda < -\lambda^*$ OU $\lambda > \lambda^* \Rightarrow (+)$ TEM UMA x^*
 - $\rightarrow \lambda = \pm \lambda^* \Rightarrow (+)$ TEM DUAS x^*
 - $\rightarrow \lambda \in (-\lambda^*, \lambda^*) \Rightarrow (+)$ " TRÊS "

(21)

"CANDIDATOS" P/ P^{TOS} DE BIFURCAÇÕES $\pm (\lambda^*, x^*)$:

$$\begin{cases} f(\lambda, x) = \lambda + x - x^3 = 0 \Rightarrow \lambda = x^3 - x \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

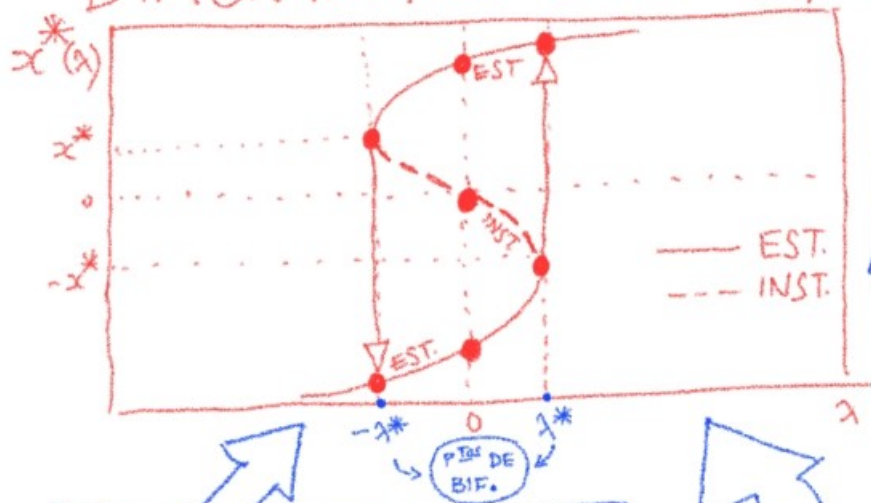
$$\therefore \lambda = \frac{+1}{3\sqrt{3}} - \left(\frac{+1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{+1-3}{3\sqrt{3}} = +\left(\frac{2}{\sqrt{27}}\right) = +\sqrt{\frac{4}{27}} \sim +0,385$$

$$\therefore x^3 - x - \lambda = 0 \Rightarrow x^3 - x - \left(-\sqrt{\frac{4}{27}}\right) = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

(DE FATO: $+\frac{1}{\sqrt{27}} + \frac{3}{\sqrt{27}} + \frac{2}{\sqrt{27}} = 0$!)

DE FATO, PODE SER VERIFICADO QUE $\lambda^* = \sqrt{\frac{4}{27}}$ E $x^* = \sqrt{\frac{1}{3}}$!

DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO



COMO FIZEMOS P/ AS BIFURCAÇÕES TRANS. E NO-SELA, ESTUDANDO O SINAL DE $f(\lambda, x)$ PRÓX. DE x^* , PODEMOS DETERMINAR A ESTABILIDADE DE x^*

VIMOS TAL COMPORTAMENTO QDO ESTUDAMOS O MEET C/ EQUILÍBRIOS MÚLTIPLOS ONDE λ LA' ERA Q/Q_0 (CTE SOLAR!)

O "SALTO" DO λ ULTRAPASSANDO P/ A ESQ. (RESP., DIR.) λ^* (RESP., λ^*) É CONHECIDO COMO "HYSTERESIS"

TAREFA: ESTUDAR BIFURCAÇÕES FORQUILHA (PITCHFORK) E "CUSP", § 5.2.4-5

CONT.

BIFURCAÇÕES DE CAMPOS VETORIAIS PLANARES

$$\dot{X} = f(\lambda, X)$$

$$C/ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

EX: $\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda - x_1^2 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 \end{cases}$

P^{TOS} FIXOS, ISTO É,
 $X^* \text{ p/ } f(\lambda, X^*) = 0:$

$$\begin{cases} \lambda - x_1^2 + x_1 x_2 = 0 \\ x_1^2 - 2x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 x_2 = \lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda - x_1^2 + \lambda = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \pm \sqrt{2\lambda} \\ \text{p/ } \lambda > 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = \pm \frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda}}$$

$$= \pm \frac{1}{2} \sqrt{2\lambda}$$

$$\therefore X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \sqrt{2\lambda} \\ \frac{1}{2} \sqrt{2\lambda} \end{bmatrix}$$

(• NOTE QUE OS RAMOS DE SOLUÇÕES SE INTERCEPTAM P/ $\lambda = 0$!

• COMO VISTO EM AULAS PASSADAS, RAMOS DE SOLÇ PODEM SE ENCONTRAR EM P^{TOS} (λ, x^*)

TAIS QUE

$$\begin{cases} f(\lambda, x^*) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, x^*) = 0. \end{cases}$$



TAIS P^{TOS} SÃO "CANDIDATOS" P/ P^{TOS} DE BIF..

AGORA, P/ $f(\lambda, X)$ PLANAR,

OS POSSÍVEIS P^{TOS} DE BIF. PODEM SER OBTIDOS VIA

$$\begin{cases} f(\lambda, X) = 0, \\ \det(Df(\lambda, X)) = 0. \end{cases}$$

LINEARIZANDO $f(\lambda, X)$:

$$Df(\lambda, X^*) = \begin{pmatrix} -2x_1^* + x_2^* & x_1^* \\ 2x_1^* - 2x_2^* & -2x_1^* \end{pmatrix}$$

$$\therefore \det(Df(\lambda, X^*)) = 2(x_1^*)^2$$

$= 4\lambda$ SE ANULA

$$x_1^* = \pm \sqrt{2\lambda}$$

APENAS P/ $\lambda = 0$, ISTO É, APENAS P/

$$(x_1^*, x_2^*) = \pm \left(\sqrt{2\lambda}, \frac{1}{2} \sqrt{2\lambda} \right)$$

$$= (0, 0).$$

GEOMETRIA DO ESPAÇO DE FASE DEPENDENDO DE λ :



SEJAM T E D COMO NA SEÇÃO 4.6.

DAÍ:

$$T = \text{TRACO}(Df(\lambda, X^*))$$

$$= -4x_1^* + x_2^*$$

$$= -4\left(\pm \sqrt{2\lambda}\right) + \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{2\lambda}\right)$$

$$= \pm \frac{7}{2} \sqrt{2\lambda} < 0,$$

$$D = \det(Df(\lambda, X^*))$$

$$= 4\lambda > 0$$

$$E \quad T^2 - 4D = \left(\frac{49}{2} - 16\right)\lambda > 0 \quad \text{CONT.} \rightarrow$$

∴ COMO $D > 0$, OS AUTOVALS

$$T \pm \sqrt{T^2 - 4D}$$

DE $Df(\lambda, X^*)$ SÃO REAIS DE MESMO SINAL E OS P^{TOS} CRÍTICOS SÃO NÓS:

$\begin{cases} X^* \text{ É ESTÁVEL } (T < 0); \\ X^* \text{ INST. } (T > 0). \end{cases}$

(CF. FIG. 4.1.2, PÁG. 57)

EX. DE BIF. DE HOPE

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\lambda - x_1^2 - x_2^2) + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2(\lambda - x_1^2 - x_2^2) - x_1. \end{cases}$$

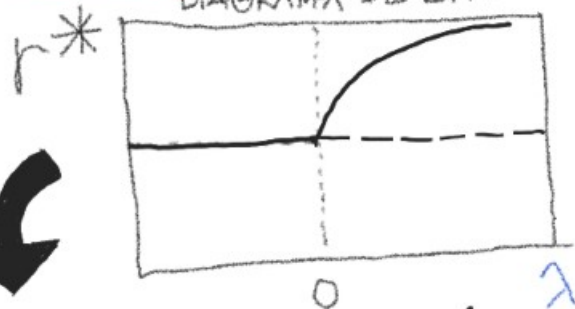
$$\therefore f(\lambda, X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1(\lambda - x_1^2 - x_2^2) + x_2 = 0, \\ x_2(\lambda - x_1^2 - x_2^2) - x_1 = 0. \end{cases}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r^2(\lambda - r^2) = 0.$$

$$\therefore \text{PTOS FIXOS: } \begin{cases} r^* = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \\ r^* = 0 \text{ É ÚNICO P/ } \lambda < 0; \\ r^* \in \{0, \sqrt{\lambda}\} \text{ P/ } \lambda > 0. \end{cases}$$

$r \geq 0 \Rightarrow \tilde{N}$ CONSIDERE A RAIZ < 0

DIAGRAMA DE BIF.



A ESTABILIDADE É OBTIDA VIA:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \\ \theta = \arctan(x_2/x_1). \end{cases} \quad (\text{COORDS POLARES})$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{d}{dt}((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}) \\ &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} (2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2) \\ &= \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} \cdot (x_1^2 + x_2^2)(\lambda - x_1^2 - x_2^2) = \frac{r^2(\lambda - r^2)}{r} \\ \therefore \dot{r} &= \lambda r - r^3 \end{aligned}$$

POR OUTRO LADO,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{d}{dt}(\arctan(x_2/x_1)) \\ &= \frac{1}{1+(x_2/x_1)^2} \cdot \frac{\dot{x}_2 x_1 - x_2 \dot{x}_1}{x_1^2} \\ &= \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \frac{-x_1^2 - x_2^2}{x_1^2} = -1. \end{aligned}$$

$$\therefore \theta(t) = -t + \text{cte.}$$

DAÍ, VOLTANDO P/ COORDS. CARTESIANAS,

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta, \\ x_2 = r \sin \theta, \end{cases}$$

$$\text{TEMOS } X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{\lambda} \begin{bmatrix} \cos(-t + \text{cte}) \\ \sin(-t + \text{cte}) \end{bmatrix}$$

E A ORIGEM P/ $\lambda = 0$ (TAMBÉM JÁ SABEMOS SER A ORIGEM P/ $\lambda < 0$) É UMA CIRCUNF. (ÓRBITA FECHADA) DE CENTRO NA ORIGEM E RAIO $\sqrt{\lambda}$.

P/ ANALISAR AS ÓRBITAS PRÓXIMAS A SOLÇS DE EQUIL., LINEARIZE $f(\lambda, X)$:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= Df(\lambda, X^*) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ TEM} \end{aligned}$$

DOIS AUTOVALORES COMPLEXOS CONJUGADOS:

$$\frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4(\lambda^2 + 1)}}{2} = \lambda \pm i.$$

P/ $X^* = (0, 0)$, CF. SEÇÃO 4.6.2.

P/ $X^* = \sqrt{\lambda}(\cos(t + \text{cte}), \sin(t + \text{cte}))$.

CF. FIG. 5.8, PÁG. 73.

BIF. FORQUILHA, PÁGS. 67-8

DE VOLTA AO

"2-BOX MODEL"

P/A

$$\begin{cases} \dot{T}_1 = c(-T_1^* - T_1) + 1q_1 \Delta T, \\ \dot{T}_2 = c(T_1^* - T_2) - 1q_1 \Delta T, \\ \dot{S}_1 = -H + d(-S_1^* - S_1) + 1q_1 \Delta S, \\ \dot{S}_2 = H + d(S_1^* - S_2) - 1q_1 \Delta S. \end{cases}$$

$$q = b(\alpha \Delta T - \beta \Delta S),$$

FLUXO NO "CANO DE CAPILARIDADE" QUE CONECTA A CAIXA 1 (POLAR A DIR.) A CAIXA 2 (TROPICAL A ESQ.), COMPENSADO C/O FLUXO NO "CANO DE TRANSBORDAMENTO" QUE CONECTA A CX. 2 A CX. 1.

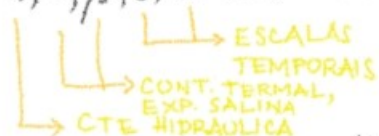
• H = FLUXO VIRTUAL DE SAL NA SUPERFÍCIE P/ COMPENSAR EVAPORAÇÃO NA CX. 2 ($\downarrow$), PRECIPITAÇÃO " " 1 ($\uparrow$) E TROCA C/ CONTINENTES;

• T_i^* E S_i^* SÃO "ANOMALIAS"

$$L \rightarrow S_i^* = S_i - S_0^*$$

$$L \rightarrow T_i^* = T_i - T_0^*$$

DE TEMP. E SALIN., $i=1,2$, b, α, β, c, d SÃO CTES POS.;



$$T_0^* = \frac{T_1^* + T_2^*}{2} \text{ E } S_0^* = \frac{S_1^* + S_2^*}{2}$$

TEMPERATURA E SALINIDADE DE EQUILÍBRIO DAS "BACIAS QUE CERCAM AS CAIXAS";

$$\begin{aligned} T_2^* &= T_2^* - T_0^* \\ &= T_2^* - \frac{1}{2}(T_1^* + T_2^*) \\ &= \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) \\ &:= T^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1^* &= T_1^* - T_0^* \\ &= T_1^* - \frac{1}{2}(T_1^* + T_2^*) \\ &= \frac{1}{2}(T_1^* - T_2^*) \\ &= -T^* \end{aligned}$$

$$S_2^* = S^* \text{ E } S_1^* = -S^*$$

SÃO AS ANOMALIAS DE TEMP. E SAL. DAS BACIAS QUE CERCAM AS CXS..

OBS: $H=0$ (STOMMEL, 1961, CONSIDEROU APENAS TROCAS DE SAL. (E TEMP.) C/ BACIAS. $\therefore d > 0$ (E $c > 0$)).

$$\therefore \text{CTH FICA } \begin{cases} \dot{T}_1 = c(-T_1^* - T_1) + 1q_1 \Delta T, \\ \dot{T}_2 = c(T_1^* - T_2) - 1q_1 \Delta T, \\ \dot{S}_1 = d(-S_1^* - S_1) + 1q_1 \Delta S, \\ \dot{S}_2 = d(S_1^* - S_2) - 1q_1 \Delta S. \end{cases}$$

QUEREMOS USAR A TEORIA DE SIST. DIN. PLANARES E BIFURCAÇÃO:

1ª TENTATIVA: MÉDIAS DAS ANOMALIAS:

$$\frac{T_1 + T_2}{2} \text{ E } \frac{S_1 + S_2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (T_1 + T_2) \right) = \frac{1}{2} (\dot{T}_1 + \dot{T}_2) = -c \left(\frac{1}{2} (T_1 + T_2) \right)$$

E

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (S_1 + S_2) \right) = \frac{1}{2} (\dot{S}_1 + \dot{S}_2) = -d \left(\frac{1}{2} (S_1 + S_2) \right)$$



$$\frac{1}{2} (T_1 + T_2) = \text{CTE} e^{-ct} \rightarrow 0 \text{ E}$$

$$\frac{1}{2} (S_1 + S_2) = \text{CTE} e^{-dt} \rightarrow 0$$

$$Q \gg 0 \quad T \rightarrow \infty.$$

2ª TENTATIVA: ΔT E ΔS

CONT.

∴ CTHS FICA

$$\begin{cases} \frac{d\Delta T}{dt} = \dot{T}_2 - \dot{T}_1 \\ = c(2T^* - \Delta T) - 2\lambda q \Delta T, \\ \frac{d\Delta S}{dt} = \dot{S}_2 - \dot{S}_1 \\ = d(2S^* - \Delta S) - 2\lambda q \Delta S. \end{cases}$$

VAMOS ADIMENSIONALIZAR * VIA

$$x := \frac{\Delta S}{2S^*} \cdot y := \frac{\Delta T}{2T^*};$$

VAMOS RESCALONAR t VIA

$$t' := ct.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt'} \\ = \frac{1}{2cS^*} \left(\frac{d\Delta S}{dt} \right) \\ = \frac{d}{c} (1-x) - \left| \frac{2q}{c} \right| x, \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt'} \\ = \frac{1}{2cT^*} \left(\frac{d\Delta T}{dt} \right) \\ = 1-y - \left| \frac{2q}{c} \right| y \\ = 1-y - |f|y. \end{cases}$$

$(\delta = \frac{d}{c}, f = -\frac{2q}{c})$

OBS:

$$\lambda = \frac{c}{4\alpha k T^*} \quad \text{E} \quad R = \frac{\beta S^*}{\alpha T^*}$$

$$\Downarrow \\ Rx - y = \lambda f (= \lambda f(x, y))$$

$$\begin{aligned} DJ \\ Rx - y &= \frac{\beta S^*}{\alpha T^*} \cdot \frac{\Delta S}{2S^*} - \frac{\Delta T}{2T^*} \\ &= \frac{\beta \Delta S - \alpha \Delta T}{2\alpha T^*} \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \lambda f &= \frac{c}{2\alpha k T^*} \left(-\frac{2q}{c} \right) \\ &= -\frac{1}{2\alpha k T^*} (\alpha \Delta T - \beta \Delta S). \end{aligned}$$

OBS: O CAMPO DE VETORES DE

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta(1-x) - |f|x \\ \dot{y} = 1-y - |f|y \end{cases}$$

E' LIPSCHITZ. TAL EDO TEM 3 PARÂMETROS: $\delta, \lambda \in \mathbb{R}$.

AQUI ASSUMIMOS $\delta \in (0, 1]$. (ESCALA DE TEMPO DE TROCA THERMAL (C) É BEM MAIOR QUE A DE TROCA SALINA (d) ∇)
ASSUMIMOS TAMBÉM QUE $S^* \cdot T^* > 0$.
∴ $R > 0$. (VIMOS ANT. QUE QDO ISSO OCORRE, DIFERENÇAS DE SALIN. (RESP. TEMP.) DOMINAM P/ $R > 1$ (RESP. $R < 1$)).

OBS: P^{Tos} FIXOS DE (+):

$$\begin{cases} x^* = \frac{\delta}{\delta + |f^*|}, \\ y^* = \frac{1}{1 + |f^*|}, \end{cases}$$

$$c / \lambda f^* = Rx^* - y^*.$$

NOTE QUE:

$$\begin{aligned} \lambda f^* &= \frac{\delta R}{\delta + |f^*|} - \frac{1}{1 + |f^*|} \\ &= \phi(f^*; R, \delta). \end{aligned}$$

CONT.



25

(RECAPITULANDO: CTHS) $c/$
 $\Delta S = 2S^*x$ e $\Delta T = 2T^*y$
 ADMENSIONALIZADAS E $x = \frac{1}{c}x'$ RESCALONADO.

(+) $\begin{cases} \dot{x} = \delta(1-x) - 1f|x, \\ \dot{y} = 1-y - 1f|y. \end{cases}$

$\delta = \frac{d}{c},$
 $f = f(x,y)$
 $= \frac{1}{\lambda}(Rx-y),$
 $\lambda = \frac{c}{4\alpha k T^*}$ E $R = \frac{\beta S^*}{\alpha T^*}.$

TRES PARÂMETROS

P^{TOS} FIXOS
 DE (+)

$\begin{cases} x^* = \frac{\delta}{\delta + 1f^*}, \\ y^* = \frac{1}{1 + 1f^*}; \end{cases}$

NOTE QUE: $\lambda f^* = \frac{\delta R}{\delta + 1f^*} - \frac{1}{1 + 1f^*}$
 $= \phi(f^*; R, \delta).$

(CF. FIG. 6.1, PÁG. 79)

ANÁLISE DA
 ESTABILIDADE
 DE (x^*, y^*)

$P/ f^* \geq 0:$

$A = Df(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} -(\delta + 1f^*) + \frac{Rx^*}{\lambda} & + \frac{x^*}{\lambda} \\ + \frac{Ry^*}{\lambda} & -(1 + 1f^*) + \frac{y^*}{\lambda} \end{bmatrix}$

DE FATO, POR EX.,

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta(1-x) + \frac{1}{\lambda}(Rx-y)x \right) =$
 $-\delta + \frac{1}{\lambda}(2Rx - y) =$
 $-\delta + \frac{1}{\lambda}[(Rx-y) + Rx] =$
 $-\delta - \left[-\frac{Rx-y}{\lambda} \right] + \frac{Rx}{\lambda} =$
 $-(\delta + 1f) + \frac{Rx}{\lambda}.$

(VERIFIQUE AS OUTRAS
 ENTRADAS DE A!)

OBS: $P/ f^* \geq 0:$ **26**

T = TRAÇO DE A

$= -\delta - 1 - 2|f^*| -$
 $(+ \frac{(Rx^* - y^*)}{\lambda})$
 $= -\delta - 1 - 2|f^*| - 1f^*|$
 $= -(1 + \delta + 3|f^*|);$

D = DET. DE A

$= (\delta + 1f^*|)(1 + 1f^*|)$
 $+ (1 + 1f^*|) \frac{Rx^*}{\lambda}$
 $+ (\delta + 1f^*|) \frac{y^*}{\lambda}$
 $- \frac{Rx^*y^*}{\lambda^2} + \frac{Rx^*y^*}{\lambda^2}$
 $= \delta + \delta 1f^*| + 1f^*| + 2|f^*|^2$
 $+ \left(\frac{Rx^*}{\lambda} - \frac{\delta y^*}{\lambda} \right) + \left(-\frac{y^*}{\lambda} + \frac{y^*}{\lambda} \right)$
 $= \delta + \delta 1f^*| + 1f^*| + 2|f^*|^2$
 $+ \left(\frac{Rx^* - y^*}{\lambda} \right) + (1 - \delta) \frac{y^*}{\lambda}$
 $= \delta + \delta 1f^*| + 2|f^*|^2 + 2|f^*|^2$
 $+ (1 - \delta) \frac{y^*}{\lambda}$
 $= (\delta + 2|f^*|)(1 + 1f^*|) + (1 - \delta) \frac{y^*}{\lambda};$

$T^2 - 4D = (1 + \delta)^2 + 6(1 + \delta)|f^*| +$
 $9|f^*|^2 - 4(1 + \delta)|f^*|$
 $- 8|f^*| - 8|f^*|^2$
 $+ (1 - \delta) \frac{y^*}{\lambda}$

VERIFIQUE $= \dots$
 $= (1 - \delta + f^*)^2 - \frac{4(1 - \delta)}{2(1 + f^*)} \leq 0.$
 CONT. $\rightarrow$