Notas de Aula: Parcelamento/Divisão do Solo Visão Geométrica

Luis Augusto Koenig Veiga

Fevereiro de 2015

1.2 - VERSÃO PRELIMINAR

Notas de Aula: Parcelamento/Divisão do Solo

Visão Geométrica

1. Introdução

O parcelamento visa divisão de uma área S em duas ou mais áreas (S_1, S_2, ...,Sn), sendo a somatória destas demais áreas igual a área original. Cada uma destas novas áreas corresponderá a uma parte proporcional da área original, tal que:

$$S_1:S_2:S_3: \ldots = p : q : r : \ldots$$

S_i = áreas i;

p, q, r = proporções/partes da área original;

Sabendo-se que:

$$S_1, + S_2 + \ldots + Sn = S$$

então

$$p + q + r + \ldots = s$$

Assim cada área poderá ser definida por:

$$S_1 = p.\frac{S}{s}$$

$$S_2 = q.\frac{S}{s}$$

$$S_3 = r.\frac{S}{s}$$

Por exemplo, deseja-se dividir uma área de $400m^2$ em outras 3 áreas, respeitando a proporção de 1:3:4 (a primeira área terá uma parte da área original, a segunda três e a terceira quatro partes). Desta forma:

$S = 400m^2$

$s = 1 + 3 + 4 = 8$

$$S_1 = 1.\frac{400}{8} = 50\ m^2$$

$$S_2 = 3.\frac{400}{8} = 150\ m^2$$

$$S_3 = 4.\frac{400}{8} = 200\ m^2$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = 400m^2$$

É possível definir a seguinte relação:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{p}{p+q+r}$$

e também estabelecer uma relação entre as áreas divididas:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{p}{q}$$

Uma vez estabelecidos quais os tamanhos das áreas, resta definir a forma geométrica de cada parcela para atender ao imposto anteriormente. Logicamente esta será uma ação que dependerá de vários fatores, como por exemplo a testada mínima de um lote, a obrigatoriedade de passagem da divisa por determinado ponto ou a definição de que a divisa deve ser paralela a um dos lados da parcela. Na figura 1.1[1], a parcela foi dividida em duas áreas iguais, sendo que no primeiro caso a linha de divisa passa pelo ponto médio do lateral AD e no segundo caso, a divisa (definida pelos pontos A1 e B1) é paralela ao lado AB.

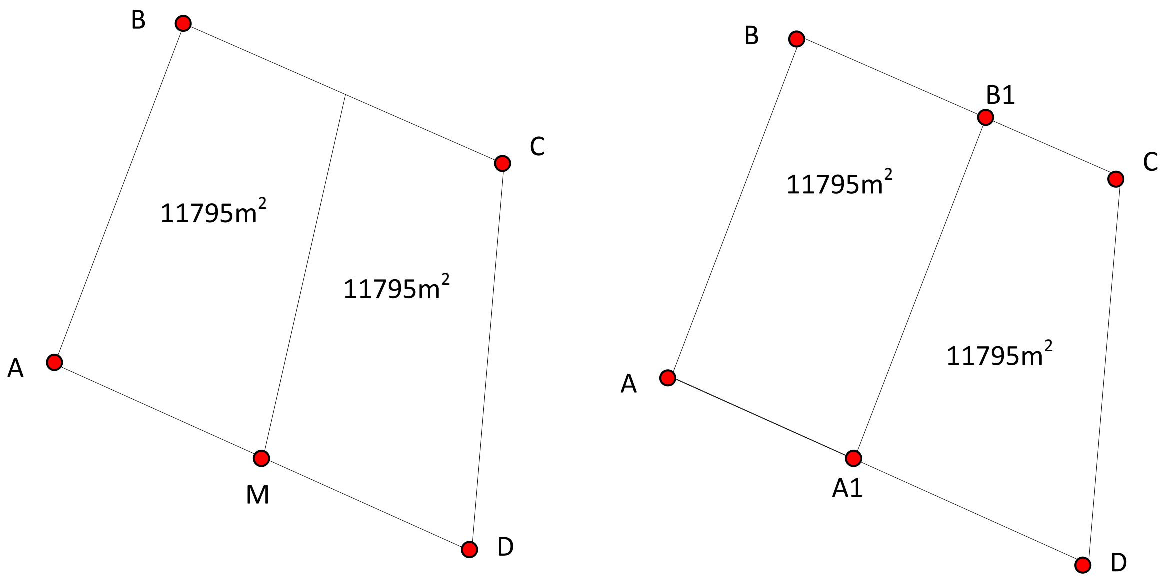


Figura 1.1 – Divisão de uma parcela em duas áreas iguais.

Todo este processo pode ser feito deforma gráfica ou numérica/analítica, e atualmente é facilitado em função do uso das ferramentas CAD.

[1] Para fazer os cálculos deste exemplo: Ponto A (X=100m;Y=100m), Ponto B (X=152m;Y=236m), Ponto C (X=280m;Y=180m) e Ponto D (X=267m;Y=25m).

2 - Divisão de parcelas triangulares

Problema 1 - Dividir uma área triangular em duas partes, que estejam entre si segundo uma dada relação, por meio de uma reta paralela a um dos lados.

Tomando o triângulo apresentado na figura 2.1.

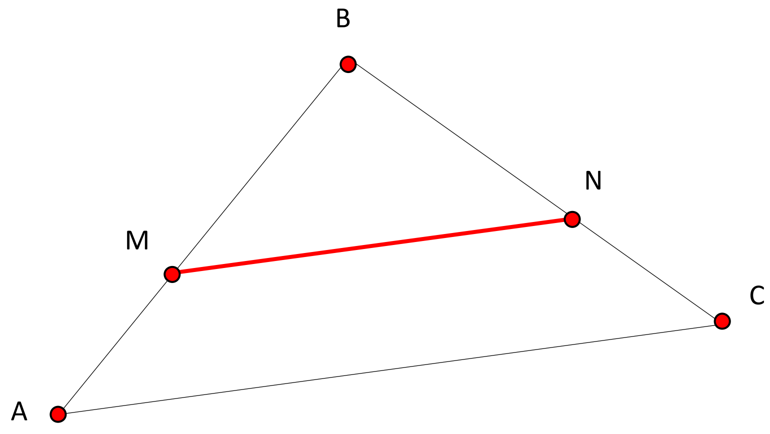


Figura 2.1 – Triângulos ABC e MBN.

Sejam:

S: área do ΔABC;

S_1: área do ΔMBN;

MN é paralelo a AC e desta forma os triângulos ABC e MBN são semelhantes.

A razão de semelhança k é dada por:

$$\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN} = k$$

Lembrando que para figuras semelhantes (figura 2.2):

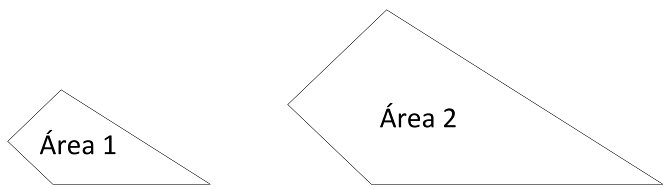


Figura 2.2 – Figuras semelhantes.

$$\frac{\text{Área1}}{\text{Área2}} = k^2$$

Para o caso da figura 2:

$$\frac{S}{S_1} = k^2$$

e

$$\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN} = k$$

então:

$$\frac{S}{S_1} = \left(\frac{AB}{MB}\right)^2$$

$$MB = AB.\sqrt{\frac{S_1}{S}}$$

Por analogia

$$BN = BC.\sqrt{\frac{S_1}{S}}$$

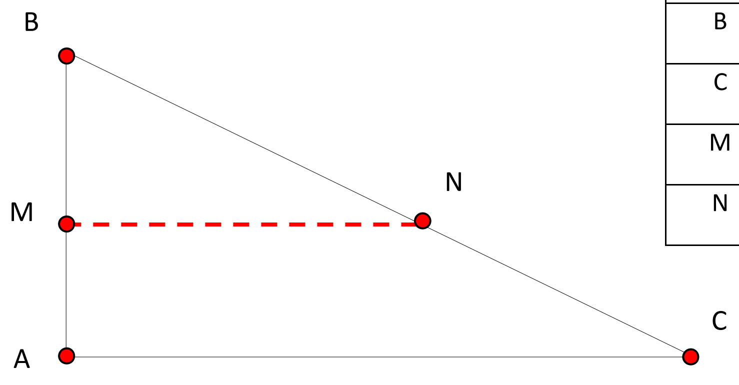
BN também pode ser calculado pela razão:

$$\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN}$$

$$BN = \frac{BC \cdot MB}{AB}$$

Exercício 2.1 - Dada a parcela triangular abaixo, dividir em duas áreas de forma que a área MBN seja igual a 100m^2 e a linha de divisa seja paralela ao lado AC. Determinar as coordenadas dos pontos M e N.

Ponto	X (m)	Y (m)
A	100,00	100,00
B	100,00	114,35
C	131,12	100,00
M	100,00	104,747
N	120,825	104,747



Problema 2 - Dividir uma área triangular em duas partes equivalentes, sendo que a reta de divisa parte de um ponto P qualquer. O problema neste caso é calcular qual a distância do ponto B ao R de forma que a reta PR divida a área de duas partes iguais.

Tomando o triangulo apresentado na figura 2.3.

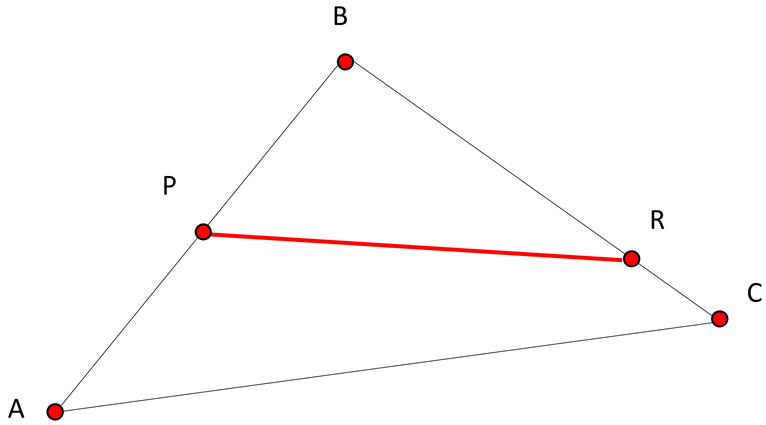


Figura 2.3 – Triângulos ABC e PBR.

Sejam:

S: área do ΔABC;

S_1: área do ΔPBR;

Para o resolução do problema será utilizado o princípio de que, dado um triangulo qualquer ABC, qualquer outro triangulo tendo lado AC e o terceiro vértice pertencente a reta r, paralela a AC, passando por B terá área igual do triângulo ABC (figura 2.4).

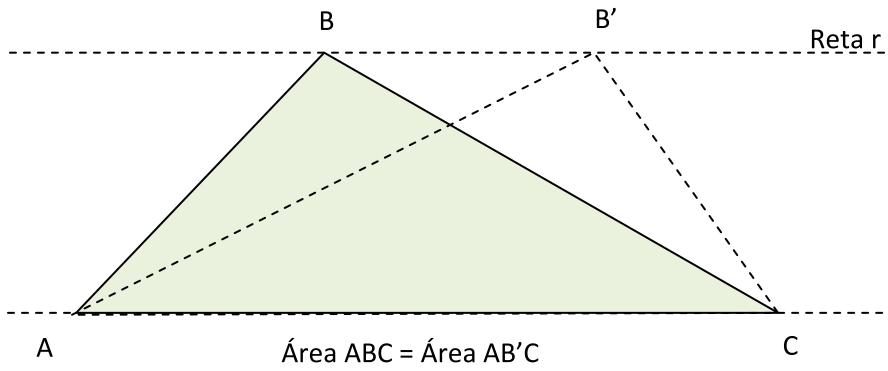


Figura 2.4 – Áreas ABC e AB´C.

Etapa 1 – Definir a posição do ponto P sobre o alinhamento AB.

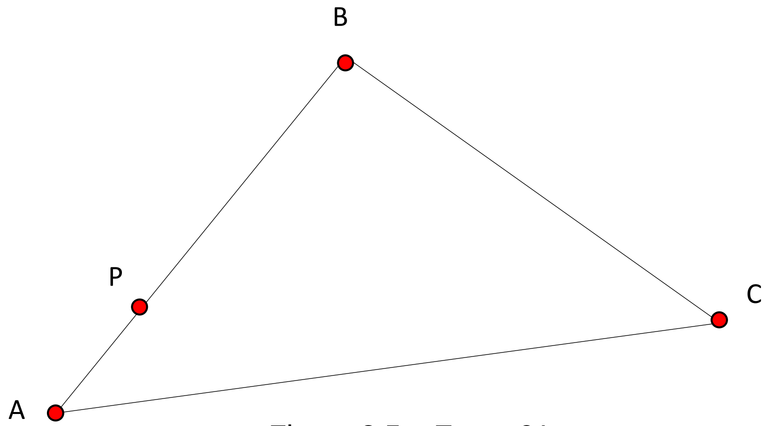


Figura 2.5 – Etapa 01.

Etapa 2 – Marcar um ponto M, na metade do alinhamento BC e traçar uma reta ligando este ponto ao ponto P.

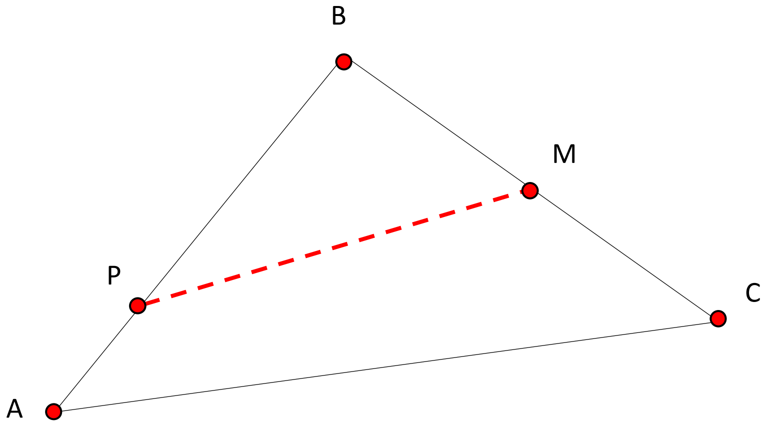


Figura 2.6 – Etapa 02.

Etapa 3 – Traçar uma reta paralela a reta PM, passando pelo ponto A, que definirá o ponto R no alinhamento BC.

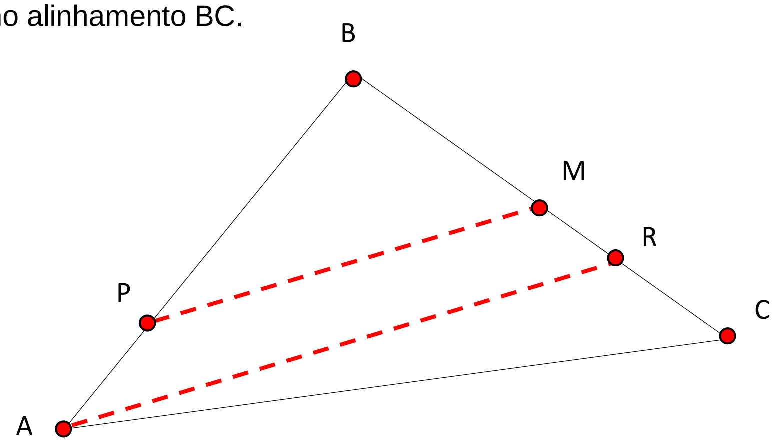


Figura 2.7 – Etapa 03.

Da figura anterior é possível visualizar que os triângulos APR e AMR possuem a mesma área, pois a base dos dois é igual (AR) e a altura também.

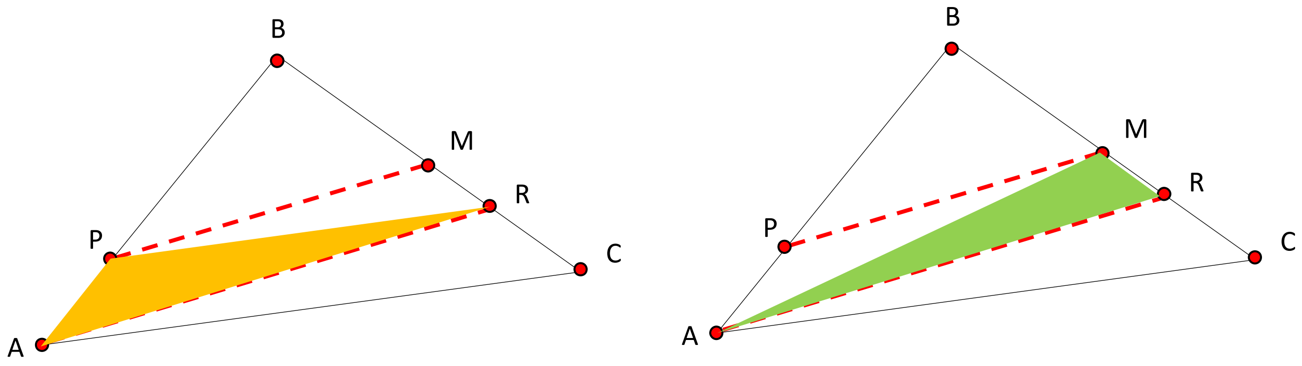


Figura 2.8 – Etapa 04.

A área do triângulo AMC é igual a metade da área do triângulo ABC, visto que BM é igual a MC.

A área do polígono APRC é igual a área do triângulo AMC

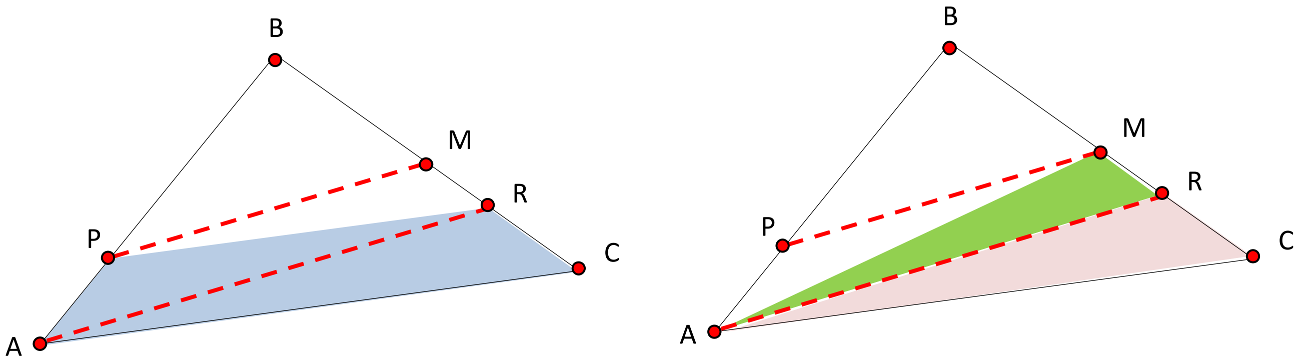


Figura 2.9 – Etapa 05.

$$BM = \frac{1}{2} \cdot BC$$

Por semelhança dos triângulos ABR e PBM:

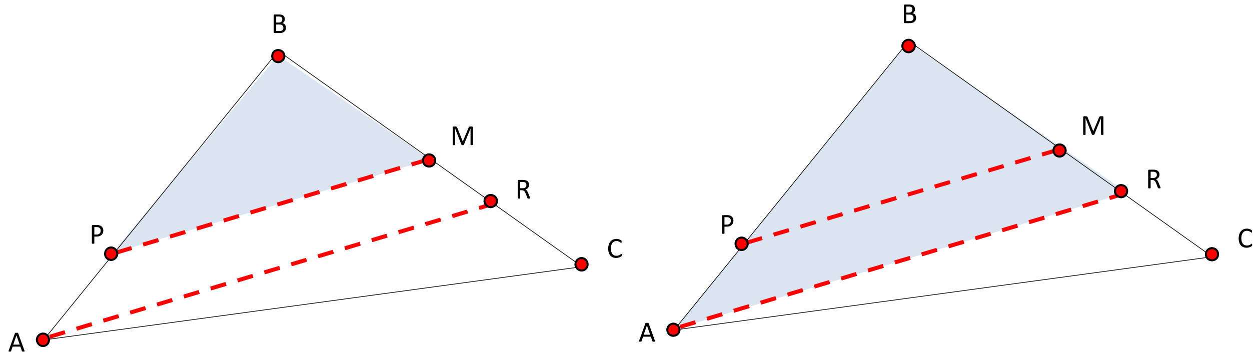


Figura 2.10 – Etapa 06.

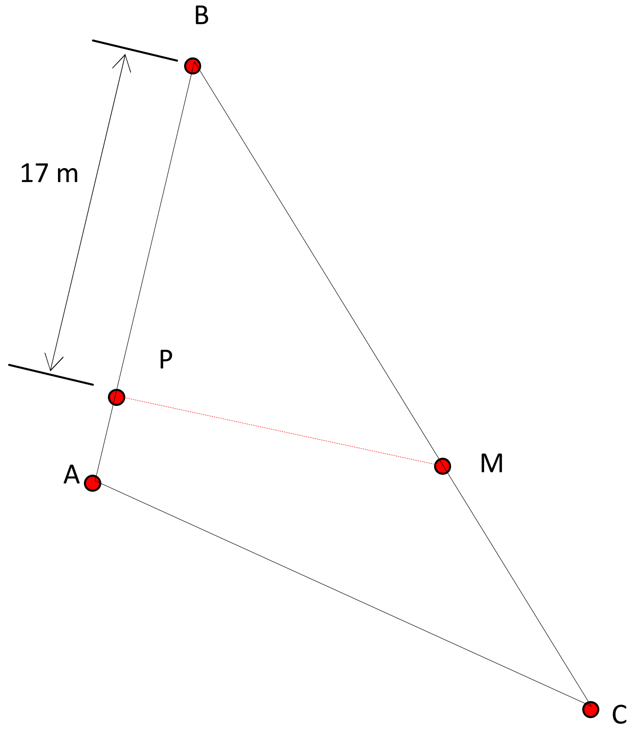
$$\frac{BA}{BP} = \frac{BR}{BM}$$

$$BR = \frac{BA \cdot BM}{BP}$$

ou

$$BR = \frac{BC}{2} \cdot \frac{BA}{BP}$$

Exercício 2.2 - Dada a parcela triangular abaixo, dividir em duas áreas iguais, sendo que a divisa deve passar pelo ponto P, distância 17m do pontos B (sobre o alinhamento AB). Determinar as coordenadas dos pontos P e M.



Ponto	X (m)	Y (m)
A	100,00	100,00
B	104,922	120,744
C	124,587	88,843
P	100,997	104,203
M	117,254	100,739

3 - Divisão de parcelas trapezoidais

Problema 1 - Dividir uma área em formato de um quadrilátero em duas partes, sendo que a reta de divisa parte de um ponto E qualquer e é paralela a um dos lados. Tomando o quadrilátero apresentado na figura 3.1.

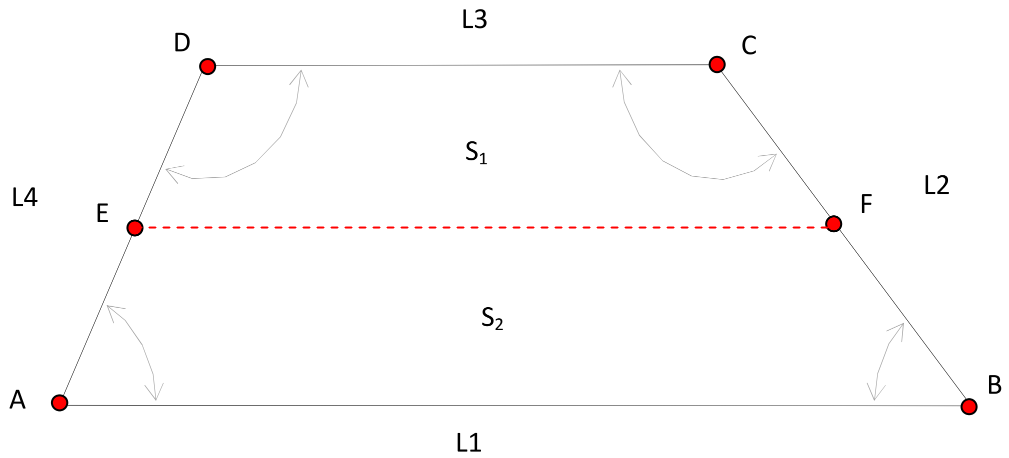


Figura 3.1 – Divisão de parcela trapezoidal.

Onde:

L1 = lado AB (base maior);

L2 = lado BC;

L3 = Lado DC (base menor);

L4 = lado AD;

S_1 e S_2 = áreas;

$S = S_1 + S_2$

Neste caso, deve-se calcular qual a distância entre os pontos E e F em relação, por exemplo, aos pontos B e C respectivamente, tornando possível a locação dos mesmos.

Etapa 1 – Inicialmente será traçada uma reta paralela ao lado CB passando pelo ponto D, definindo os pontos G e H, e outra pelo ponto E, definindo o ponto I.

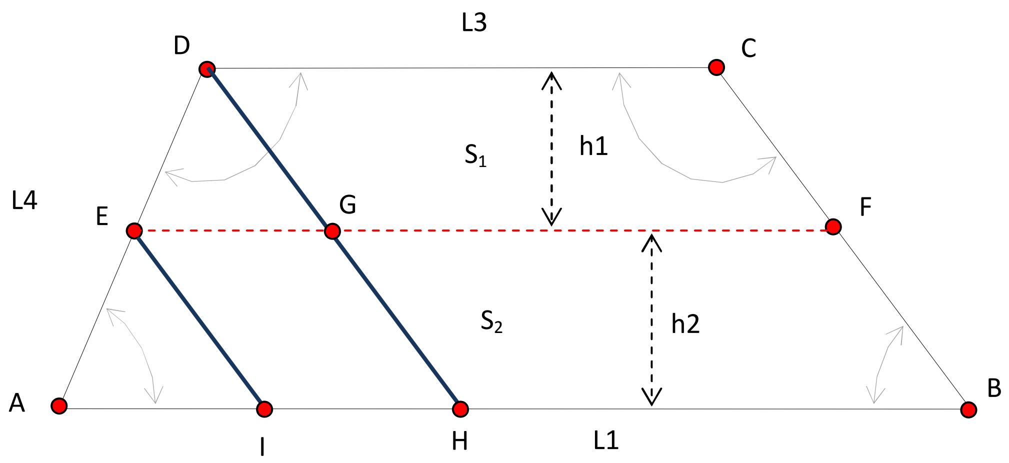


Figura 3.2 – Etapa 01.

Desta forma:

$$AH = L1 - L3;$$

$$AI = L1 - EF;$$

$$EG = EF - L3;$$

h1 e h2 são as alturas dos trapézios EFCD e ABFE.

Dos trapézios EFCD e ABFE:

$$S_1 = \frac{(EF + L3)}{2} \cdot h_1$$

$$S_2 = \frac{(L1 + EF)}{2} \cdot h_2$$

Fazendo a relação entre as áreas:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(EF + L3) \cdot h1}{(L1 + EF) \cdot h2}$$

Dos triângulos AIE e EGD:

$$\frac{h1}{h2} = \frac{EG}{AI} = \frac{EF - L3}{L1 - EF}$$

Então:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(EF + L3)}{(L1 + EF)} \cdot \frac{EF - L3}{L1 - EF}$$

Após simplificações:

$$EF = \sqrt{\frac{S_1 \cdot L1^2 + S_2 \cdot L3^2}{S_1 + S_2}}$$

Calculando a distância ED e CF:

$$\frac{ED}{AD} = \frac{EG}{AH}$$

$$\frac{ED}{L4} = \frac{EF - L3}{L1 - L3}$$

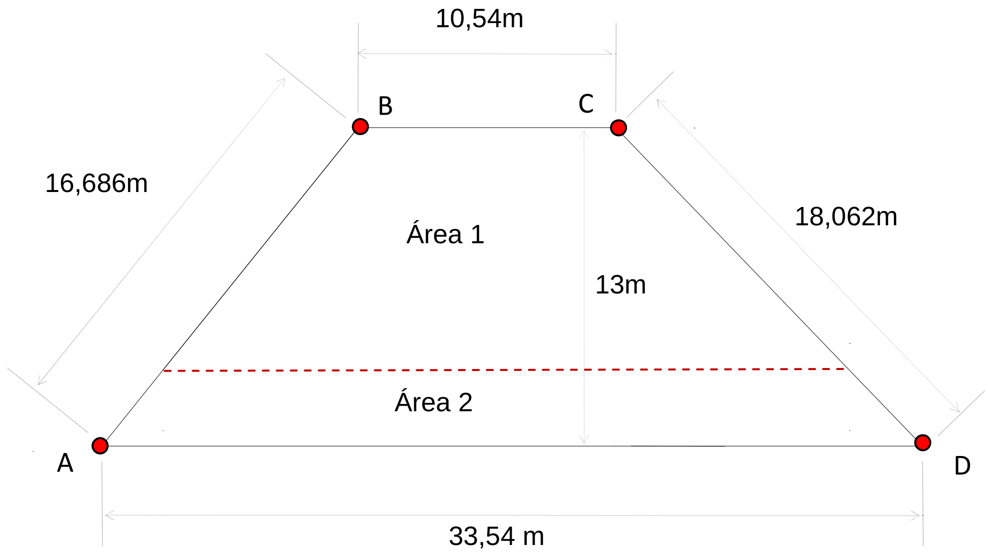
$$ED = \frac{EF - L3}{L1 - L3} \cdot L4$$

$$\frac{CF}{DH} = \frac{EG}{AH}$$

$$\frac{CF}{L2} = \frac{EF - L3}{L1 - L3}$$

$$CF = \frac{EF - L3}{L1 - L3} \cdot L2$$

Exercício 3.1 - Dada a área abaixo, dividir em duas áreas de forma que uma seja o dobro da outra, sendo a linha de divisa paralela ao alinhamento AD.



4 - Divisão de quadriláteros

Problema 1 - Dividir uma área trapezoidal em duas partes equivalentes, sendo que a reta de divisa parte de um ponto M qualquer e é paralela a base do trapézio. Tomando o trapézio apresentado na figura 4.1.

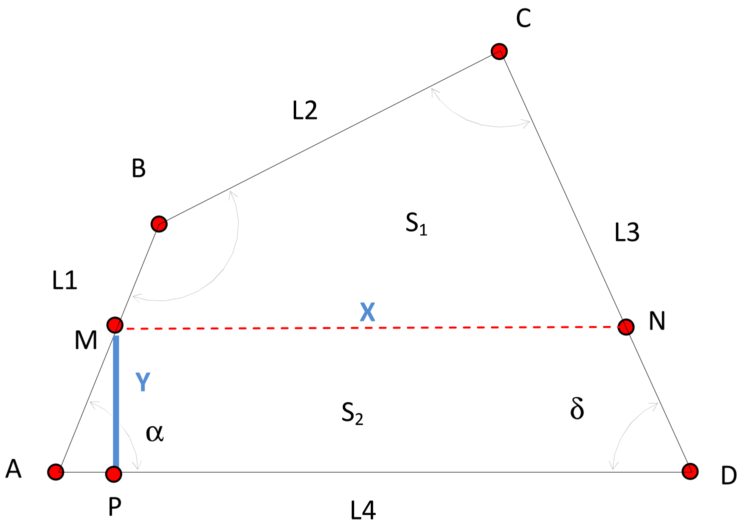


Figura 4.1 – Divisão de quadrilátero.

Onde:

L1 = lado AB

L2 = lado BC;

L3 = Lado CD;

L4 = lado AD;

X = MN

Y = MP

S_1 e S_2 = áreas;

$S = S_1 + S_2$

Neste caso, deve-se calcular qual a distância entre os pontos M e N em relação, por exemplo, aos pontos B e C respectivamente, tornando possível a locação dos mesmos.

Do trapézio AMND:

$$S_2 = \frac{(L4 + x)}{2} \cdot Y$$

$$Y = \frac{2 \cdot S_2}{L4 + X}$$

Da relação do trapézio:

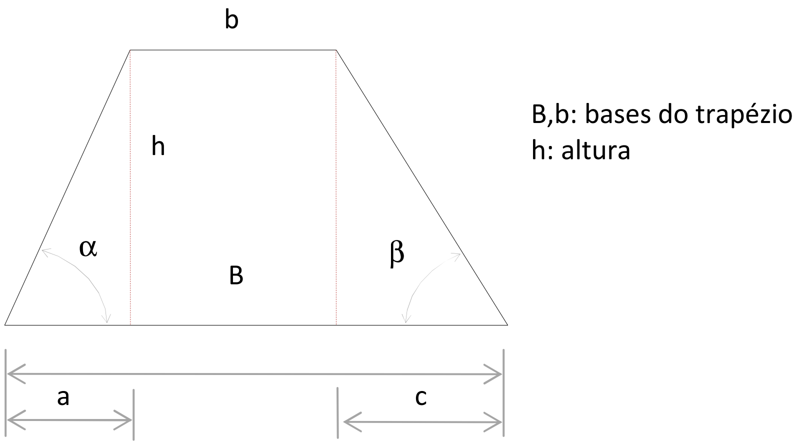


Figura 4.2 – Relação dos trapézios.

$$B - b = a + c$$

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{a}$$

$$\tan(\beta) = \frac{h}{c}$$

$$B - b = \frac{h}{\tan(\alpha)} + \frac{h}{\tan(\beta)}$$

Para o trapézio ADMN:

$$L4 - X = y\,(\text{cotg}(\alpha) + \text{cotg}(\delta))$$

$$L4 - X = \frac{2 \cdot S_2}{L4 + X} \cdot (\cot g(\alpha) + \cot g(\delta))$$

$$L4^2 - X^2 = 2 \cdot S_2 \cdot (\cot g(\alpha) + \cot g(\delta))$$

$$X = \sqrt{L4^2 - 2 \cdot S2 \cdot (\cot g(\alpha) + \cot g(\delta))}$$

$$Y = \frac{2 \cdot S2}{L4 + X}$$

Para a determinação das distâncias AM e DN tem-se:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{Y}{AM}$$

$$AM = \frac{Y}{\operatorname{sen}(\alpha)}$$

$$\operatorname{sen}(\delta) = \frac{Y}{DN}$$

$$DN = \frac{Y}{\operatorname{sen}(\delta)}$$

No caso da divisa CD ser perpendicular à AD (figura a seguir), o cálculo de X será:

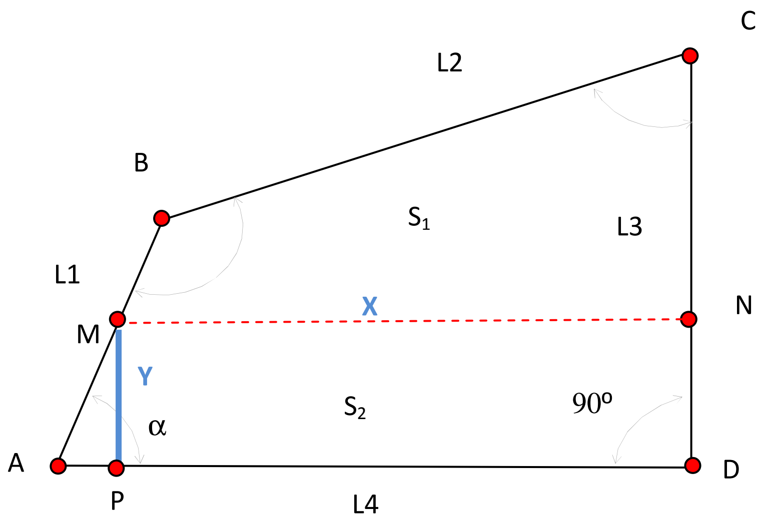
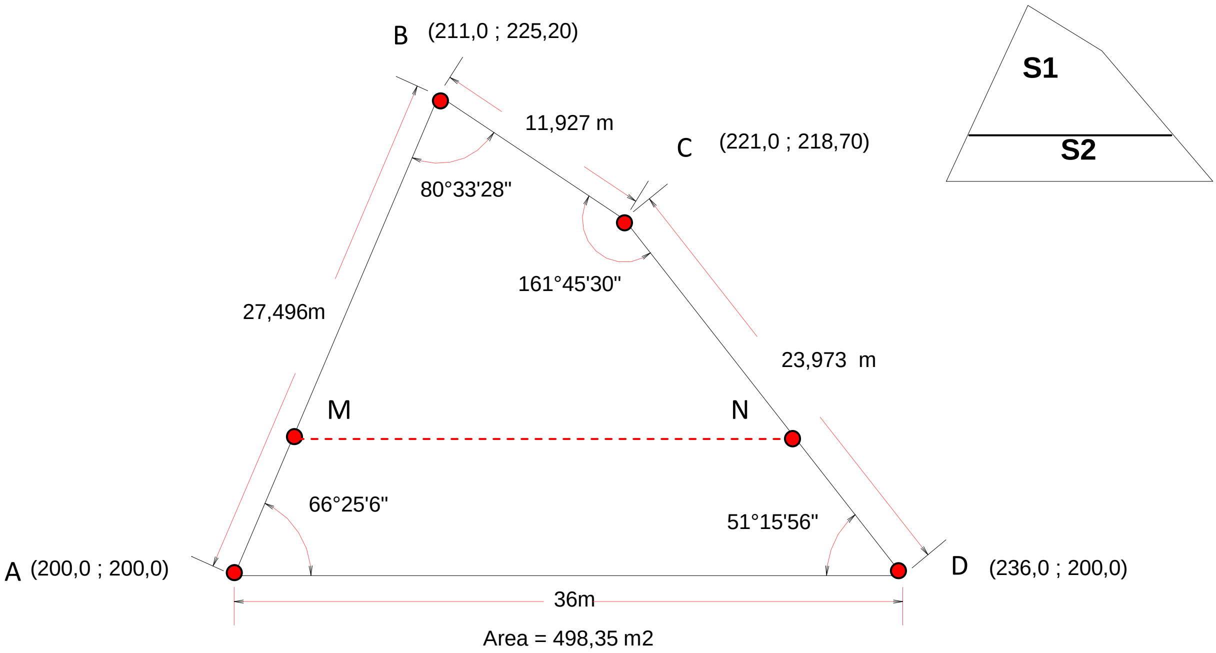


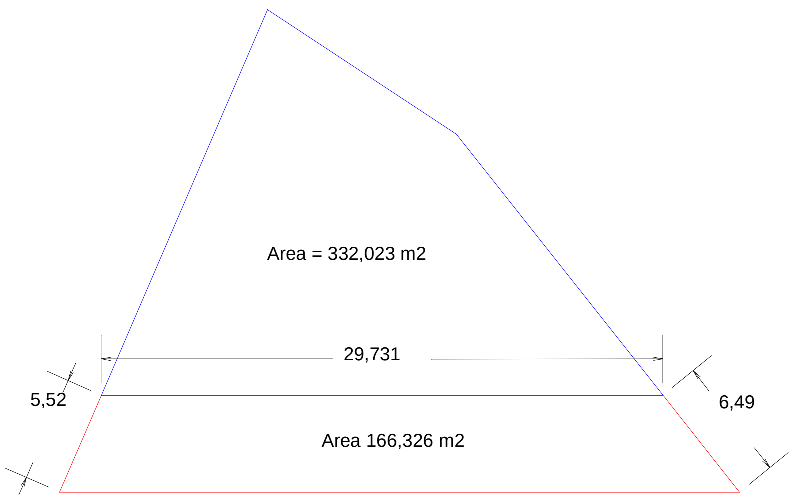
Figura 4.2 – Quadrilátero com dois lados ortogonais.

$$X = \sqrt{L4^2 - 2 \cdot S2 \cdot (\cot g(\alpha))}$$

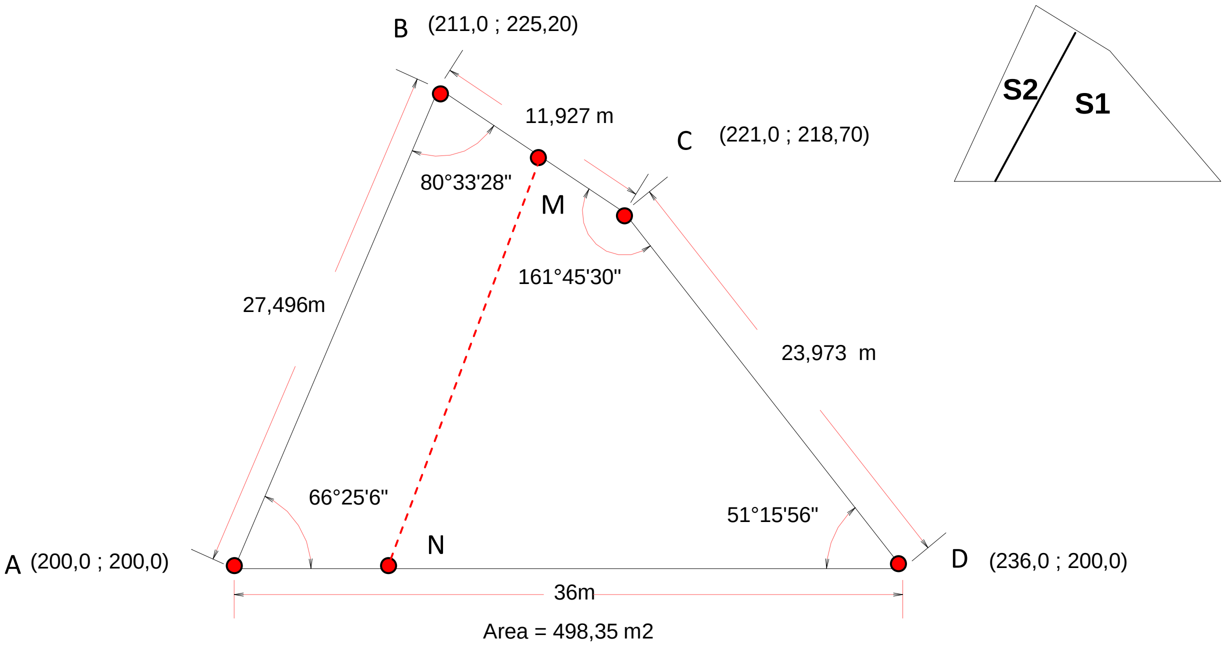
Exercício 4.1 - Dado o quadrilátero abaixo, dividir em duas áreas na razão de 2:1, sendo que a linha de divisa deve ser paralela a reta AD. Calcular as distâncias AM e DN. Unidades das coordenadas em metros.



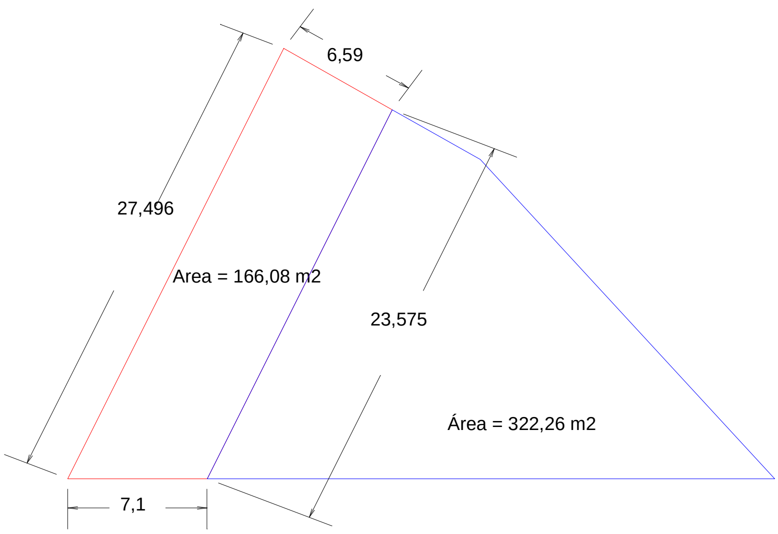
Resposta:



Exercício 4.2 - Dado o quadrilátero abaixo, dividir em duas áreas na razão de 2:1, sendo que a linha de divisa deve ser paralela a reta AB. Calcular as distâncias BM e AN. Unidades das coordenadas em metros.



Resposta:



5 - Divisão da área a partir de um ponto

Neste caso escolhe-se um ponto sobre a divisa da parcela, sendo esta definida por um polígono qualquer. A partir deste pontos e fazendo-se sucessivos cálculos de área, é possível definir a nova configuração da parcela.

Tomando-se o polígono da figura 5.1 como exemplo. Deseja-se dividir esta área em duas áreas iguais, sendo que a divisa deve passar pelo ponto M (ponto médio do alinhamento AD).

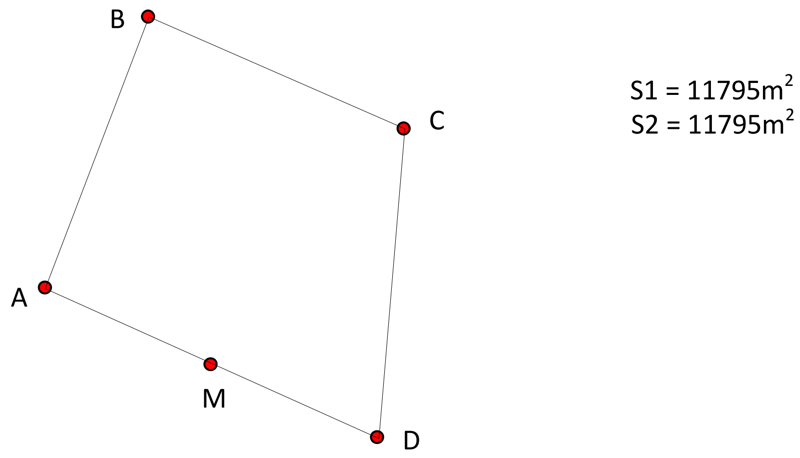


Figura 5.1 – Divisão da área ABCD em duas áreas iguais.

A nova linha de divisa MN passará por uma das divisas AB, BC, CD ou pelos pontos B e C (figura 5.2)

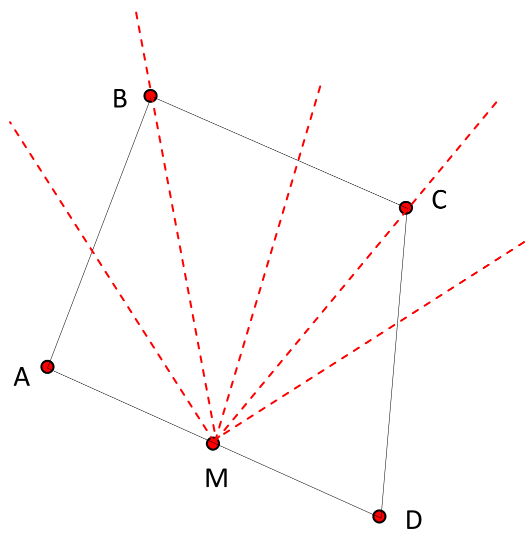


Figura 5.2 – Possíveis linhas divisórias.

A área do polígono ABCD é igual a 23.590m². É possível calcular a área dos triângulos AMB (6.653 m²), BMC (10.222 m²) e CMD (6.715 m²). As duas novas áreas devem ter 11.795 m².

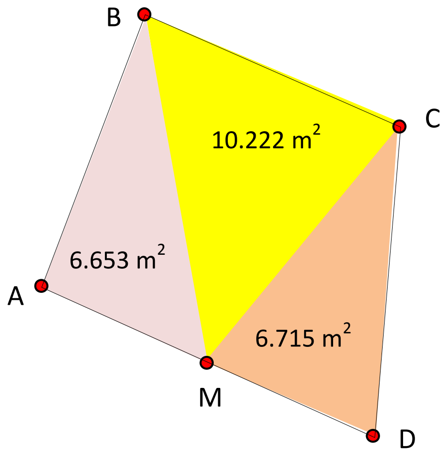


Figura 5.3 – Linhas divisórias MB e MC.

Somadas as áreas dos triângulos AMB e BMC tem-se 16.975m² . Desta forma, o segundo ponto da linha de divisa deverá estar no alinhamento definido pelos pontos B e C (Figura 5.4).

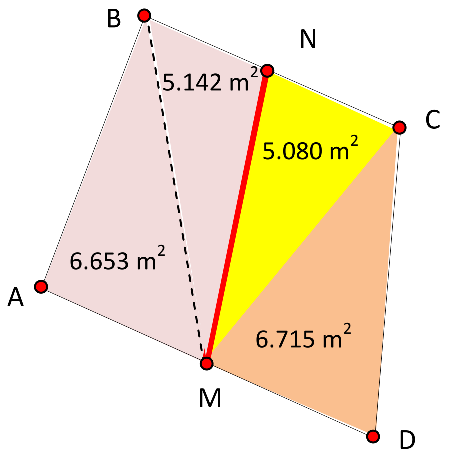


Figura 5.4 – Linha divisória MN.

O problema resume-se em determinar as coordenadas do ponto N de forma que o triângulo BMN tenha uma determinada área. Para ilustrar o cálculo, tome-se como exemplo a figura X. Neste figura temos o triângulo ABC e deseja-se determinar um novo triangulo ACP de forma que o mesmo tenha 70% da área do triângulo ABC.

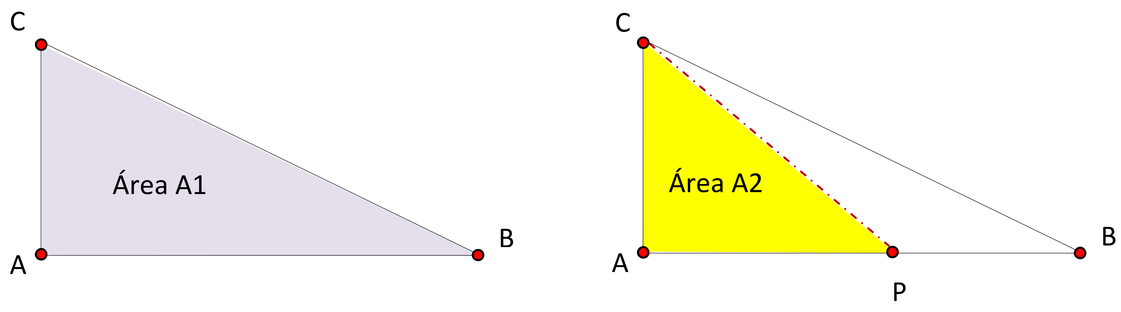


Figura 5.5 – Áreas A1 e A2.

$$A1 = \frac{(X_B - X_A) \cdot (Y_C - Y_A)}{2}$$

$$A2 = \frac{(X_P - X_A) \cdot (Y_C - Y_A)}{2}$$

A2 = 0,7 . A1

$$\frac{(X_P - X_A) \cdot (Y_C - Y_A)}{2} = 0{,}7 \cdot \frac{(X_B - X_A) \cdot (Y_C - Y_A)}{2}$$

$$(X_P - X_A) = 0{,}7 \cdot \frac{(X_B - X_A) \cdot (Y_C - Y_A)}{(Y_C - Y_A)}$$

$$(X_P - X_A) = 0{,}7 \cdot (X_B - X_A)$$

$$X_P = X_A + 0{,}7 \cdot (X_B - X_A)$$

YP = YA

Para o caso da figura 5.1, será calculado um fator (que será denominado de Percentual da área que passou – PP) a ser aplicado nas projeções do lado BC. Este percentual é calculado em função da área total do triângulo que conterá a nova divisa e da área que excede o valor da área planejada. Para facilitar o entendimento a fórmula será apresentada com um exemplo:

$$\text{Área que excedeu} = (\text{área do triângulo ABM} + \text{área do triangulo BMC}) - 11.795m^2$$

$$\text{Área que excedeu} = 16.875m^2 - 11.795m^2 = 5.080m^2$$

$$PP = \text{Área que excedeu / área do triângulo que contém a divisa (triângulo BMC)}$$

$$PP = 5.080\ m^2 / 10.222m^2$$

$$PP = 0{,}496963$$

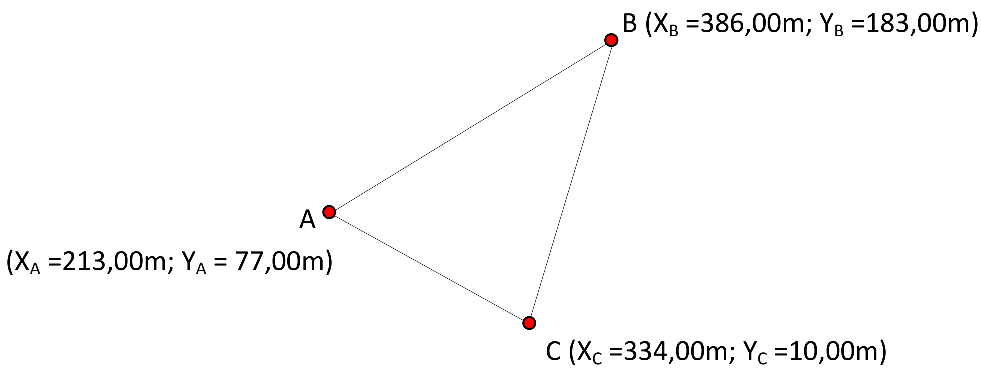
Ou seja, deve-se diminuir a área do triângulo em quase 50%.

$$XN = XC - PP\ (XC - XB) = 216{,}388m$$

$$YN = YC - PP\ (YC - YB) = 207{,}832m$$

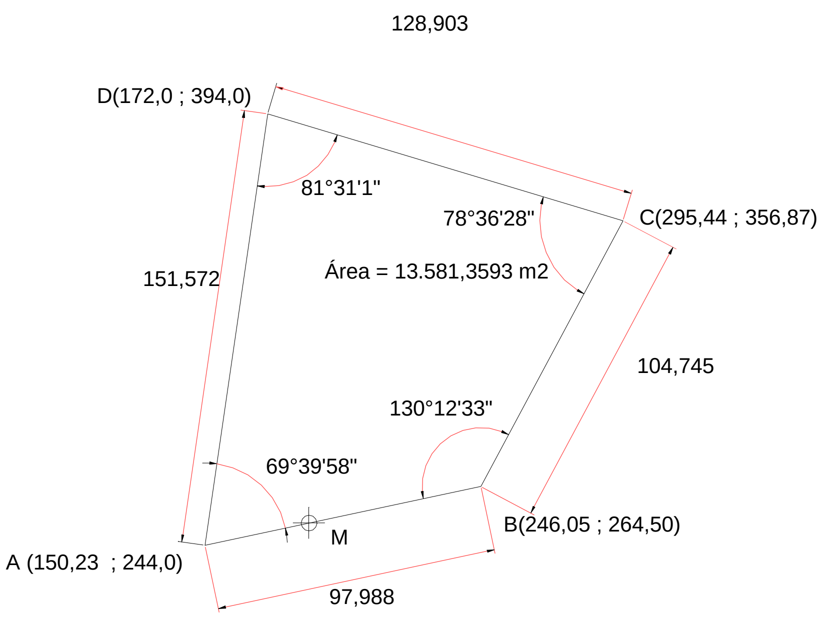
Tem-se agora a definição do novo triângulo BMN, com área igual a 5.142 m^2.

Exercício 5.1 - Dado a parcela triangular abaixo, dividir em duas áreas de forma que uma tenha 10.000m^2 e que a divisa passe pelo ponto C.

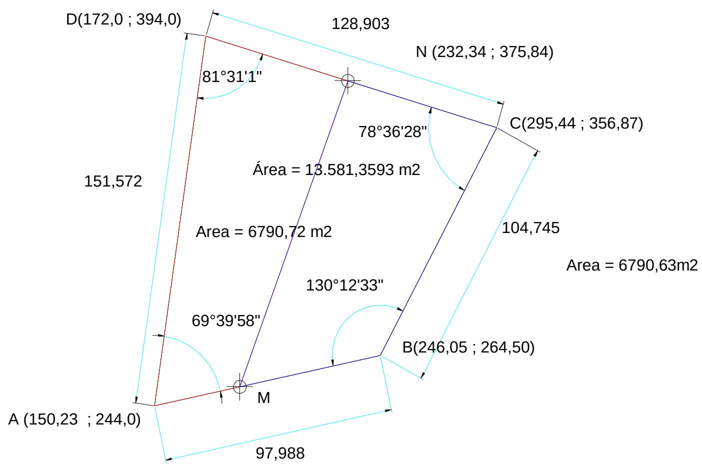


Nesta caso, tem-se que reduzir 5.080 m2 da área do triângulo BMC.

Exercício 5.2 - Dividir o Polígono ABCD em duas partes com áreas iguais, sendo que a divisória deve passar pelo ponto M, distante 37 metros do ponto A no alinhamento AB.

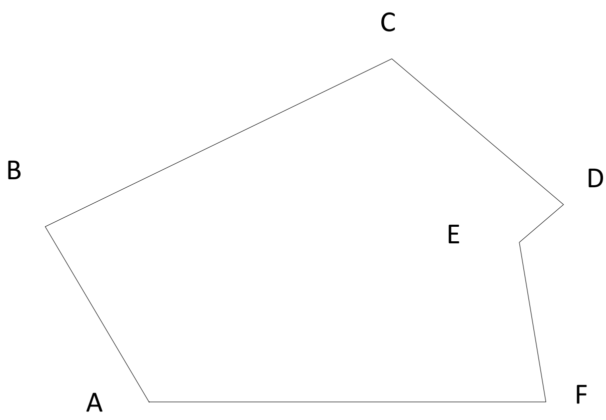


RESPOSTA:



6 – Exercícios

Exercício 6.1 –Dividir a área abaixo em duas áreas iguais, sendo que a divisa entre as duas áreas deve passar pelo ponto médio da linha de divisa AF.



Ponto	X (m)	Y (m)
A	100,00	100,00
B	77,54	136,30
C	152,42	171,05
D	189,52	140,85
E	180,00	133,00
F	185,69	100,00

A	100	100
B	77,54	136,3
C	152,42	171,05
D	189,52	140,85
E	180	133
F	185,69	100

Area do Poligono

	100	100	
7754	77,54	136,3	13630
20774,85	152,42	171,05	13263,22
32417,4	189,52	140,85	21468,36
25353	180	133	25206,16
24696,77	185,69	100	18000
10000	100	100	18569
120996			110136,7

Area = 5429,639

Metada da Área 2714,82

Coordenadas do Ponto M

Xm	Ym
142,845	100

Area do triangulo AMB

	100	100	
7754	77,54	136,3	13630
19469,77	142,845	100	7754
10000	100	100	14284,5
37223,77			35668,5

Area ABM= 777,6368

Área do Triangulo MBC

	142,845	100	
7754	77,54	136,3	19469,77
20774,85	152,42	171,05	13263,22
24433,64	142,845	100	15242
52962,48			47974,99

Area MBC = 2493,746

Area AMBC = 3271,383

Area que passou = 556,5636

Coeficiente = 0,223184

Coordenado do ponto P

Xp = 135,708
Yp = 163,2944

VERIFICAÇÃO
Area MABP

	142,845	100	
10000	100	100	14284,5
7754	77,54	136,3	13630
18497	135,708	163,2944	12661,85
23325,78	142,845	100	13570,8
59576,78			54147,15

Area MABP = 2714,82

FAZENDO O PONTO PASSAR POR C

Área do Triangulo ABC

	100	100	
7754	77,54	136,3	13630
20774,85	152,42	171,05	13263,22
17105	100	100	15242
45633,85			42135,22

Area ABC 1749,315

Área do Triangulo ACF

	100	100	
15242	152,42	171,05	17105
31762,27	185,69	100	15242
10000	100	100	18569
57004,27			50916

Area ACF 3044,137

Area ABCF = 4793,452

Area que passou = 2078,632

Coeficiente = 0,682831

Coordenado do ponto P

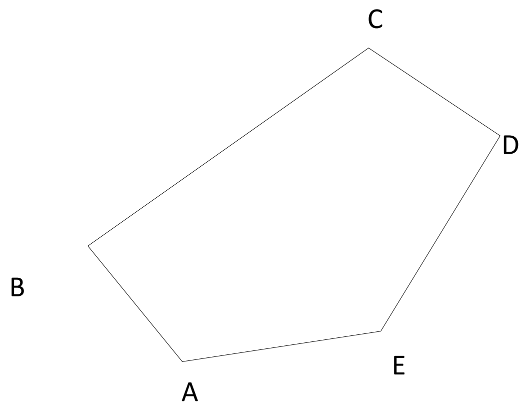
Xp =	127,1782
Yp =	100

VERIFICAÇÃO
Area PABC

	127,1782	100	
10000	100	100	12717,82
7754	77,54	136,3	13630
20774,85	152,42	171,05	13263,22
21753,83	127,1782	100	15242
60282,67			54853,04

Area MABP = 2714,82

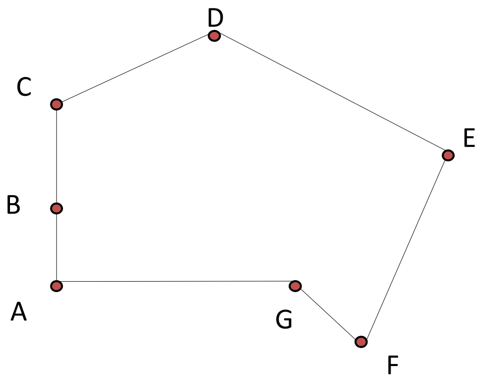
Exercício 6.2 Dividir a área abaixo em duas áreas iguais, sendo que a divisa entre as duas áreas deve passar pelo ponto médio da linha de divisa AE.



Ponto	X (m)	Y (m)
A	100,00	100,00
B	62,00	142,00
C	175,00	214,00
D	228,00	182,00
E	180,00	111,00

			Ponto	X (m)	Y (m)				
			A	100	100				
			B	62	142				
			C	175	214				
			D	228	182				
			E	180	111				
			P	140	105,5				
	100	100			Area triagulo ABP				
6200	62	142	14200						
24850	175	214	13268			100	100		
48792	228	182	31850		6200	62	142	14200	
32760	180	111	25308		19880	140	105,5	6541	
11100	100	100	18000		10550	100	100	14000	
123702			102626		36630			34741	
	Area	10538				Area =	944,5		
	metade	5269							
	Area do Triangulo PBC				Area PABC		5814,75		
					Area de Passou		545,75		
	140	105,5			Coef		0,112058		
6541	62	142	19880						
24850	175	214	13268						
29960	140	105,5	18462,5		XM =	162,3375			
61351			51610,5		YM =	205,9318			
	Area	4870,25							
			Area ABPM						
		100	100						
	6200	62	142	14200					
	23051,92	162,3375	205,9318	12767,77					
	28830,46	140	105,5	17126,6					
	10550	100	100	14000					
	68632,38			58094,38					
		Area =	5269						

Exercício 6.3 - Dividir a área abaixo em duas áreas iguais, sendo que a divisa entre as duas áreas deve passar pelo ponto M, distante 10 m do ponto A, sobre o alinhamento AG.

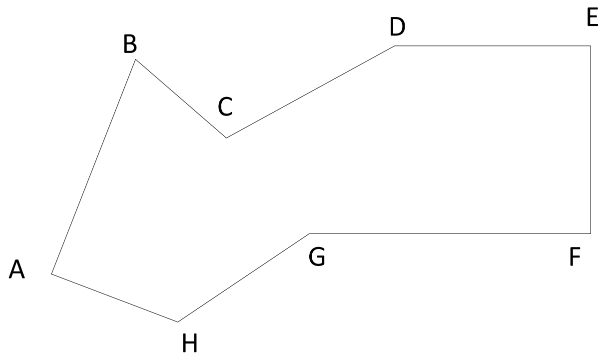


Ponto	X (m)	Y (m)
A	100,0	94,0
B	100,0	100,0
C	100,0	111,0
D	114,0	118,0
E	134,5	106,5
F	127,0	88,0
G	121,0	94,0

GABARITO LEVANTAMENTOS 2013 - SUBSTITUTIVA

	X	Y		Area ABCDEFG				
A	100,0	94,0						
B	100,0	100,0			100	94		
C	100,0	111,0		9400	100	100	10000	
D	114,0	118,0		10000	100	111	11100	
E	134,5	106,5		12654	114	118	11800	
F	127,6	88,0		15871	134,5	106,5	12141	
G	121,0	94,0		13525,5	127	88	11836	
				10648	121	94	11938	
P	110	94		9400	100	94	11374	
				81498,5			80189	
				Área Total	654,75			
	Metade da Área		327,375					
Área do Polígono ABCDP					Área do tri. PDE			
	100	94				110	94	
9400	100	100	10000		10716	114,0	118,0	12980
10000	100	111	11100		15871	134,5	106,5	12141
12654	114	118	11800		11715	110	94	12643
12980	110	94	10716		38302			37764
9400	100	94	10340					
54434			53956		Área PDE	269		
Área ABCDP		239						
				Cálculo do Coeficiente				
Area ABCDP + PDE		508						
				CP	0,671468			
Área que passou AP		180,625						
					verificando ABCDMP			
Cálculo das Coordenadas do Ponto M								
					100,0	94,0		
XM	120,7349			9400	100,0	100,0	10000	
YM	114,2219			10000	100,0	111,0	11100	
				12654	114,0	118,0	11800	
				14246,72	120,7349	114,2219	13021,3	
				12564,41	110	94	11349,08	
				9400	100,0	94,0	10340	
				68265,13			67610,38	
				Area ABCDMP		327,375		

Exercício 6.4 – Realizar o parcelamento da área dada, sendo que a primeira área deve ter 8000,00m2 (a esquerda do polígono) e ter como ponto limite o ponto G e o restante dividir em duas áreas iguais, sendo que a linha da divisa deve passar pelo ponto D. Calcular também o azimute das duas linhas divisórias.



Ponto	X(m)	Y(m)
A	100,00	100,00
B	140,56	197,80
C	184,55	161,88
D	266,02	203,92
E	360,80	203,92
F	360,80	118,30
G	224,71	118,30
H	161,00	78,00