



COLÔNIA DE FORMIGAS

PROFA
MARIANA

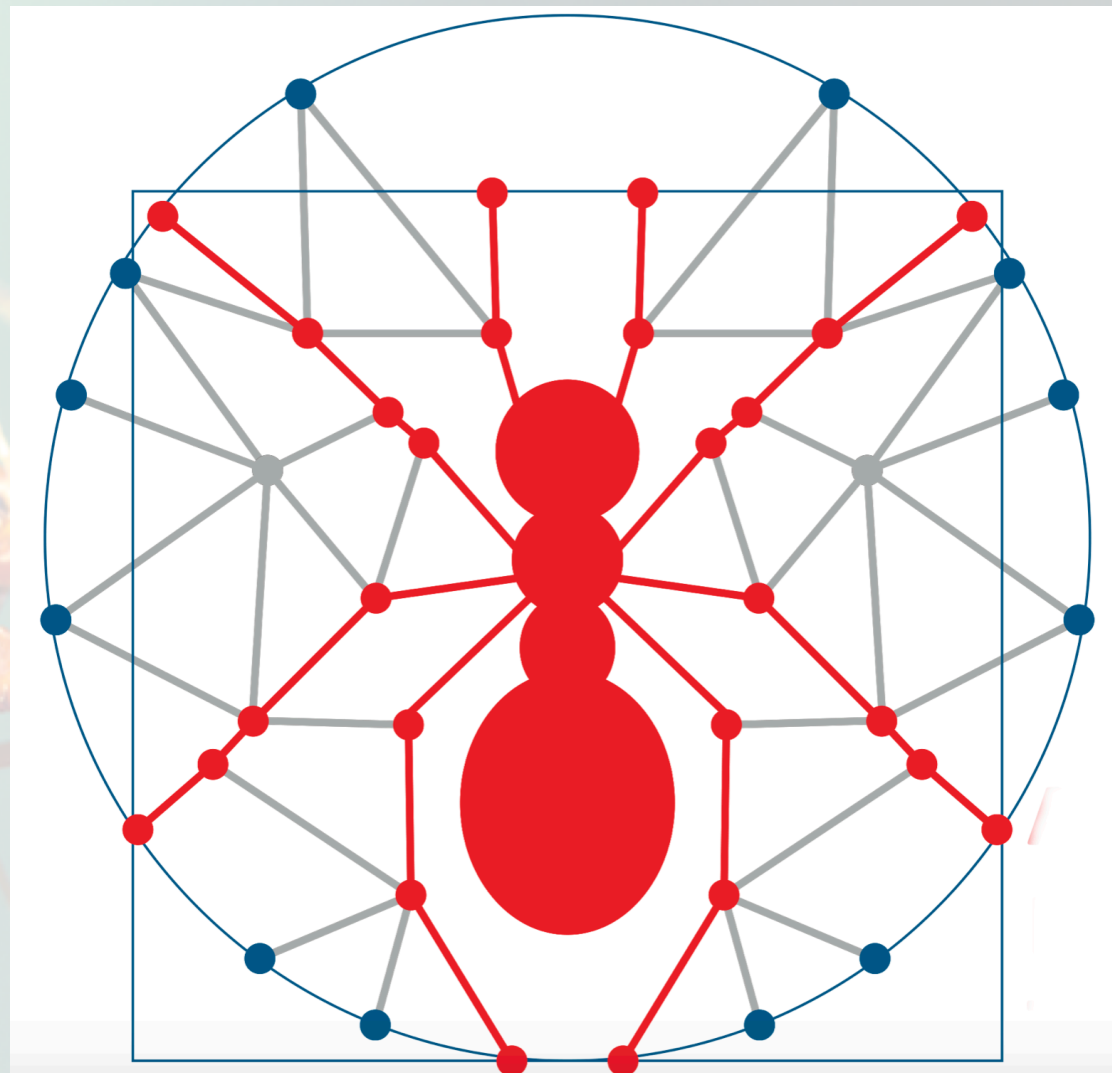
INTRODUÇÃO

Otimização por Colônia de Formigas (*Ant Colony Optimization - ACO*) tem inspiração biológica no comportamento das formigas em busca de alimento.



INTRODUÇÃO

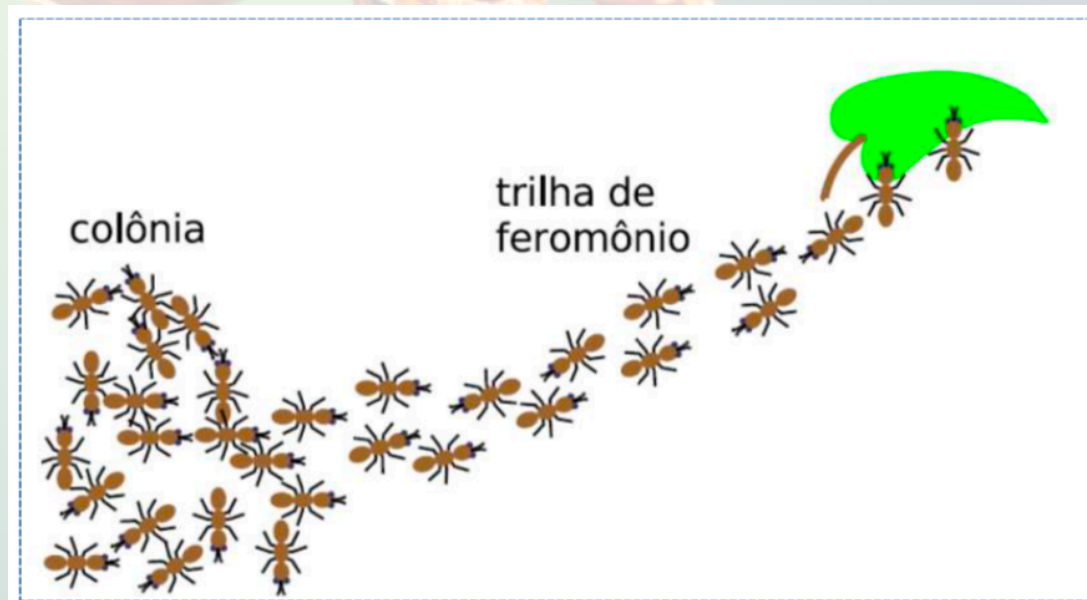
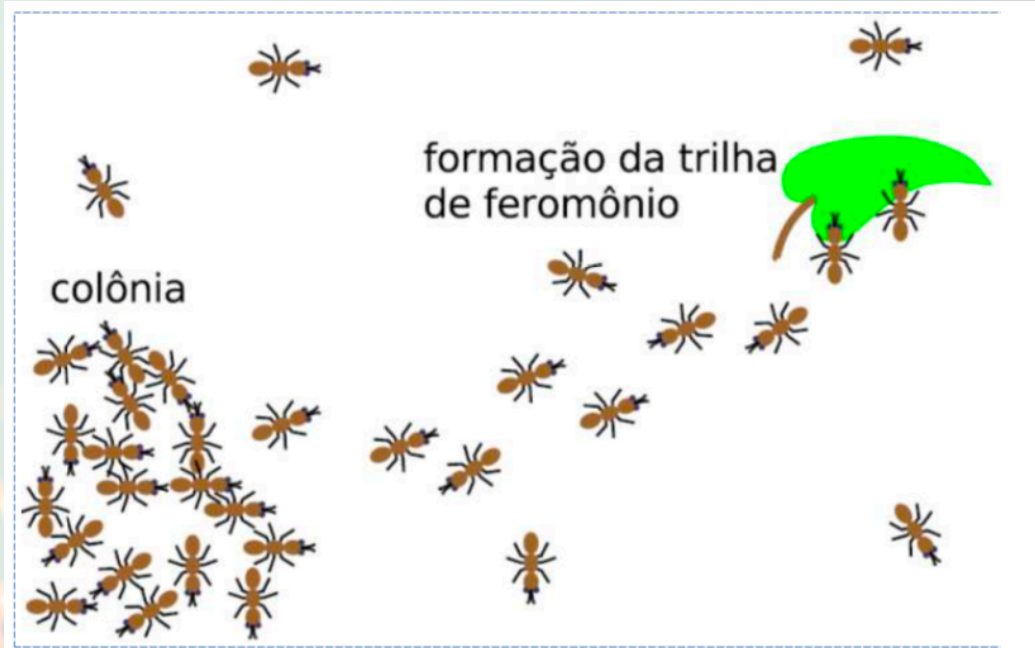
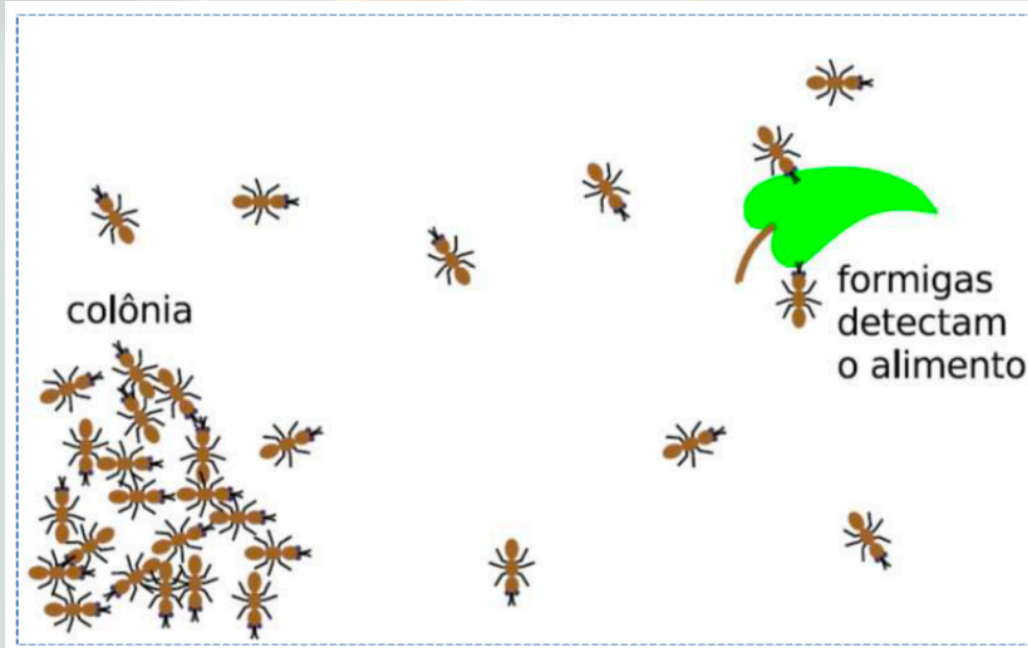
É uma metaheurística baseada em probabilidade, criada para solução de problemas computacionais que envolvem procura de caminhos em grafos.

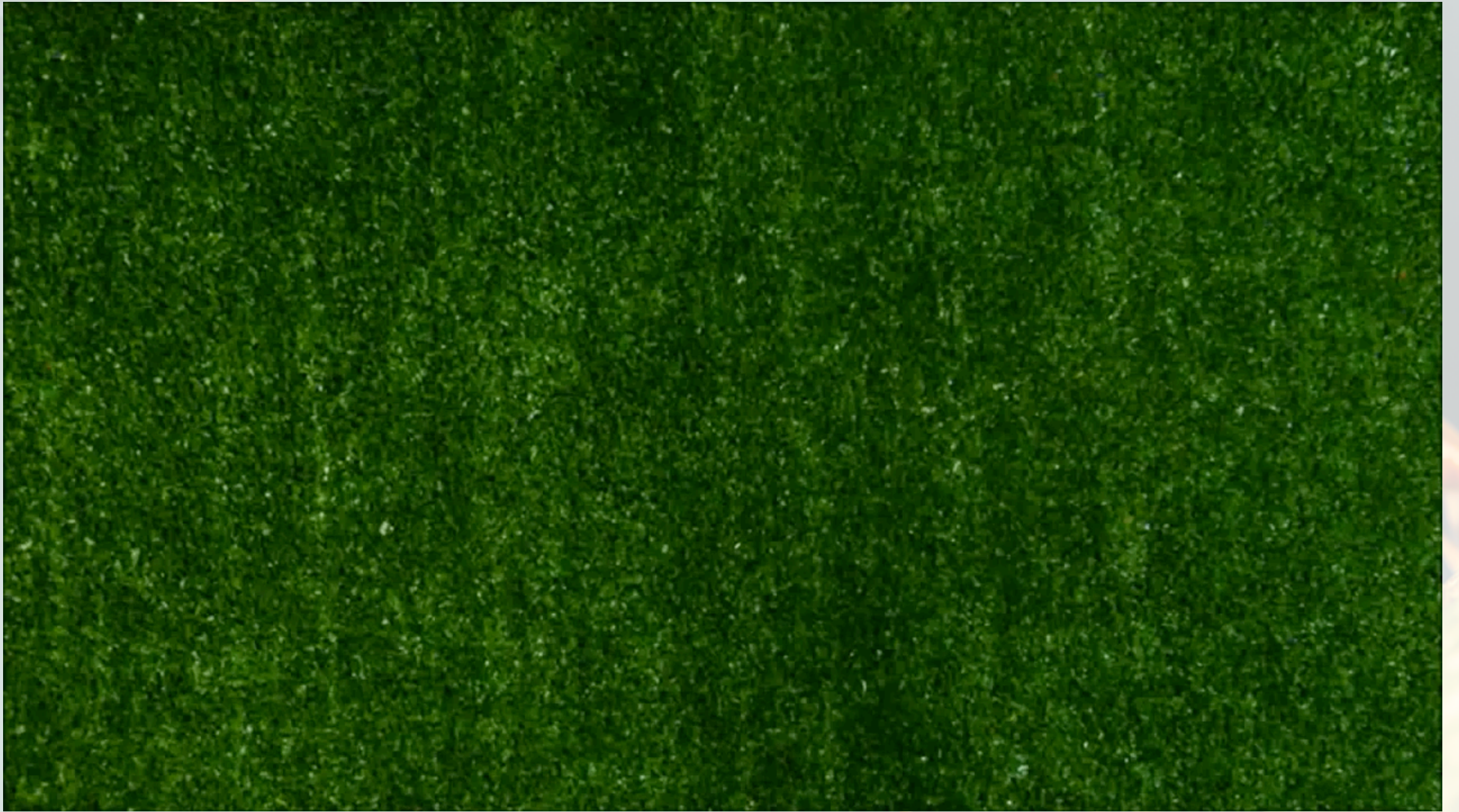


INTRODUÇÃO

- A relação da técnica está ligada ao comportamento forrageiro das formigas em busca de alimento ou deslocamento;
- Muitas espécies de formigas são quase cegas e a comunicação delas é feita por meio de **feromônios** (usados para criar caminhos – trilhas de formigas);
- Ao caminhar, as formigas depositam no chão o feromônio, formando, uma trilha. Com o olfato, as formigas escolhem, conforme a probabilidade, o caminho com maior feromônio;
- Esta trilha auxilia a formiga a encontrar o alimento e a volta ao formigueiro, além de ajudar as outras formigas a encontrar o alimento.

INTRODUÇÃO



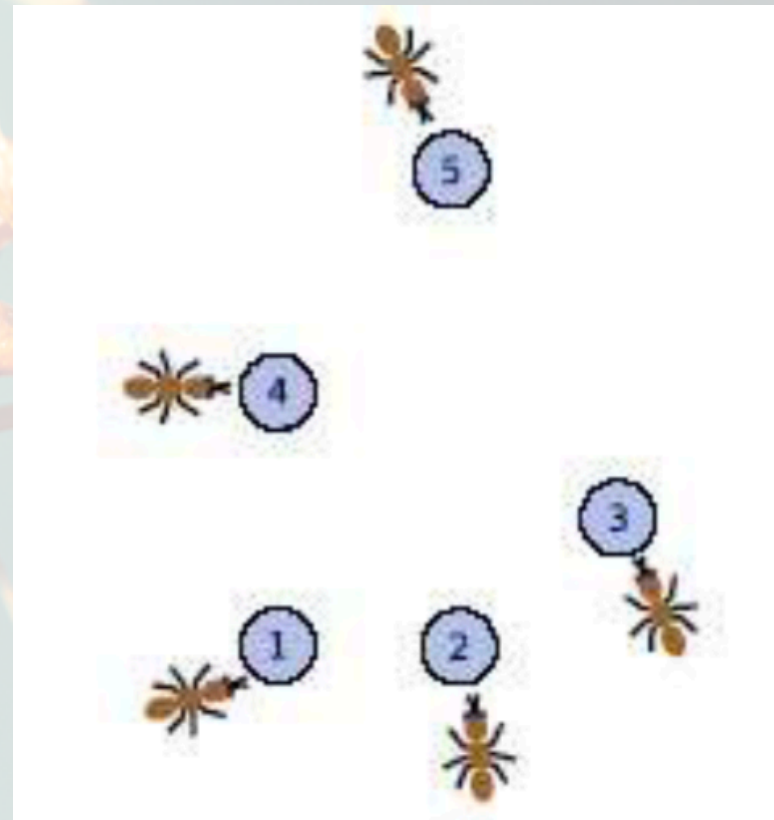
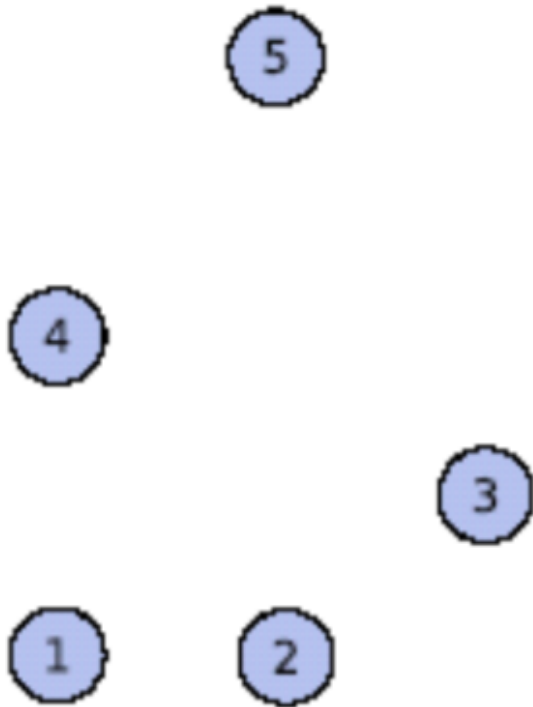


<https://www.youtube.com/watch?v=4gVEoOpvps&t=337s>

ACO PARA RESOLVER PCV

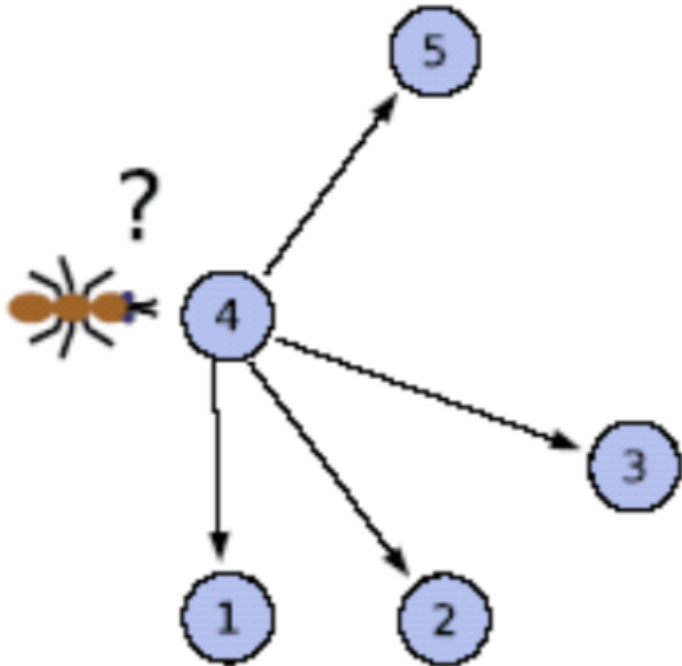
Considere um exemplo com 5 cidades

Cada formiga construirá uma solução movendo-se de uma cidade para outra. No início, cada formiga é colocada em uma cidade diferente (ou colocada aleatoriamente).



ACO PARA RESOLVER PCV

Começando de uma cidade i , a formiga move-se escolhendo probabilisticamente a cidade vizinha j (entre os vizinhos factíveis).



A probabilidade da formiga k que está na cidade i de escolher a cidade j é dada pela regra:

$$p_{ij}^k = \frac{\tau_{ij}^\alpha(t) \eta_{ij}^\beta(t)}{\sum_{l \in N_j^k} \tau_{il}^\alpha(t) \eta_{il}^\beta(t)} \text{ quando } j \in N_i^k$$

ACO PARA RESOLVER PCV

$$p_{ij}^k = \frac{\tau_{ij}^\alpha(t) \eta_{ij}^\beta(t)}{\sum_{l \in N_j^k} \tau_{il}^\alpha(t) \eta_{il}^\beta(t)} \text{ quando } j \in N_i^k$$

Onde:

- t : iteração;
- α : parâmetro de influência do feromônio;
- β : parâmetro de influência da distância;
- τ_{ij} : feromônio presente na rota entre os pontos i e j (aresta (i, j));
- η_{ij} : inverso da distância entre os pontos i e j ($\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$ onde d_{ij} é a distância entre as cidades i e j);
- N_i^k : a vizinhança factível da formiga k (isto é, o conjunto de cidades j ainda não visitadas pela formiga k).

ACO PARA RESOLVER PCV

No feromônio τ_{ij} associado à aresta (i, j) ocorrem dois eventos:

1. Evaporação

- evita que o feromônio acumulado cresça indefinidamente;
- permite esquecer decisões pobres do passado de busca; e
- permite soluções diferentes.

2. Depósito de feromônio de todas as formigas que passaram sobre (i, j)

$$\Delta\tau_{ij}^k = \frac{Q}{d_k}$$

Onde:

- $\Delta\tau_{ij}^k$: feromônio depositado pela formiga k após percorrer a aresta (i, j) ;
- Q : constante de atualização do feromônio;
- d_k : distância total da rota percorrida pela formiga k .

ACO PARA RESOLVER PCV

Atualização do feromônio:

$$\tau_{ij}(t) = \underbrace{(1 - \sigma)\tau_{ij}(t - 1)}_{\text{EVAPORAÇÃO}} + \underbrace{\sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k(t)}_{\text{DEPÓSITO}}$$

EVAPORAÇÃO

DEPÓSITO

σ : taxa de evaporação do feromônio

ALGORITMO

Coloque cada formiga em uma em uma cidade aleatória

Para $t = 1$ até o número máximo de iterações

Enquanto a formiga k não construir a viagem S_k

Selecione a próxima cidade pela regra de prob:

$$p_{ij}^k = \frac{\tau_{ij}^\alpha(t) \eta_{ij}^\beta(t)}{\sum_{l \in N_j^k} \tau_{il}^\alpha(t) \eta_{il}^\beta(t)} \text{ quando } j \in N_i^k$$

Fim

Calcule a distância d_k da viagem S_k

Se $S_k < S^*$ então $S^* = S_k$ e $d^* = d_k$

Fim

Atualize os feromônios: $\tau_{ij}(t) = (1 - \sigma)\tau_{ij}(t - 1) + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k(t)$,

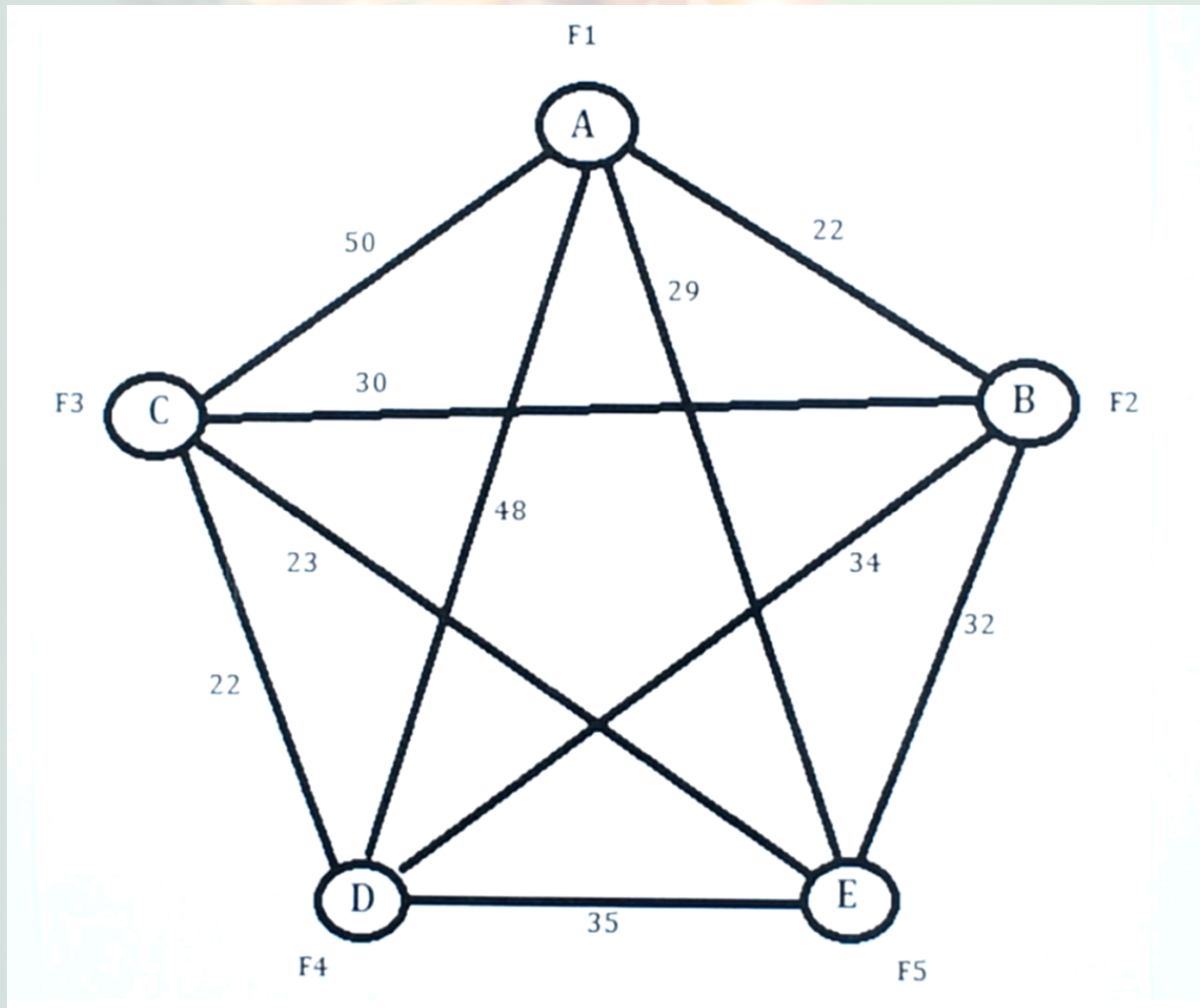
onde:

$$\begin{cases} \Delta\tau_{ij}^k = Q/d_k & \text{quando a aresta } (i, j) \in S_k \\ \Delta\tau_{ij}^k = 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Fim

EXEMPLO

Resolver o seguinte problema do caixeiro viajante por meio do algoritmo de otimização de colônia de formigas:



PARÂMETROS $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$

COEFICIENTE DE EVAPORAÇÃO $\begin{cases} \sigma = 0,01 \end{cases}$

FEROMÔNIO INICIAL $\begin{cases} \tau_{xy} = 0,1 \end{cases}$

CONSTANTE DE ATUALIZAÇÃO DE FEROMÔNIO $\begin{cases} Q = 10 \end{cases}$

EXEMPLO

Montar a tabela de probabilidades:

Tabela de probabilidades - 1ª iteração						
Rotas	Distância	$\eta(xy)$	$\tau(xy)$	$\tau(xy) * \eta(xy)$	P(xy)	P(xy) %
A-B	22	0,045	0,1	0,005	0,416	41,6%
A-C	50	0,02	0,1	0,002	0,167	16,7%
A-D	48	0,021	0,1	0,002	0,167	16,7%
A-E	29	0,034	0,1	0,003	0,25	25,0%
B-A	22	0,045	0,1	0,005	0,358	35,8%
B-C	30	0,033	0,1	0,003	0,214	21,4%
B-D	34	0,029	0,1	0,003	0,214	21,4%
B-E	32	0,031	0,1	0,003	0,214	21,4%
C-A	50	0,02	0,1	0,002	0,143	14,3%
C-B	30	0,033	0,1	0,003	0,214	21,4%
C-D	22	0,045	0,1	0,005	0,357	35,7%
C-E	23	0,043	0,1	0,004	0,286	28,6%
D-A	48	0,021	0,1	0,002	0,153	15,3%
D-B	34	0,029	0,1	0,003	0,231	23,1%
D-C	22	0,045	0,1	0,005	0,385	38,5%
D-E	35	0,029	0,1	0,003	0,231	23,1%
E-A	29	0,034	0,1	0,003	0,231	23,1%
E-B	32	0,031	0,1	0,003	0,231	23,1%
E-C	23	0,043	0,1	0,004	0,307	30,7%
E-D	35	0,029	0,1	0,003	0,231	23,1%

$$P_{AB}^{F1} = \frac{\tau_{AB} \cdot \eta_{AB}}{\tau_{AB} \cdot \eta_{AB} + \tau_{AC} \cdot \eta_{AC} + \tau_{AD} \cdot \eta_{AD} + \tau_{AE} \cdot \eta_{AE}}$$

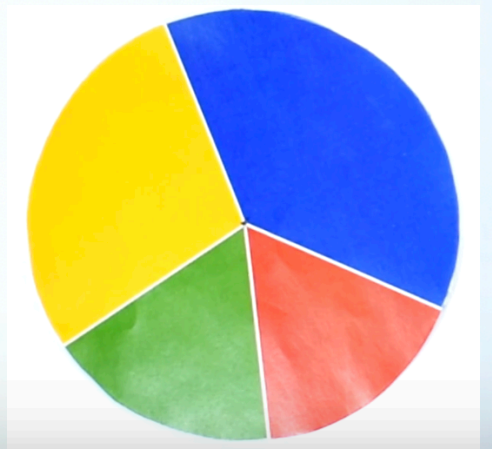
EXEMPLO

F1 {

Tabela de probabilidades - 1ª iteração						
Rotas	Distância	$\eta(xy)$	$\tau(xy)$	$\tau(xy) * \eta(xy)$	P(xy)	P(xy) %
A-B	22	0,045	0,1	0,005	0,416	41,6%
A-C	50	0,02	0,1	0,002	0,167	16,7%
A-D	48	0,021	0,1	0,002	0,167	16,7%
A-E	29	0,034	0,1	0,003	0,25	25,0%
B-A	22	0,045	0,1	0,005	0,358	35,8%
B-C	30	0,033	0,1	0,003	0,214	21,4%
B-D	34	0,029	0,1	0,003	0,214	21,4%
B-E	32	0,031	0,1	0,003	0,214	21,4%
C-A	50	0,02	0,1	0,002	0,143	14,3%
C-B	30	0,033	0,1	0,003	0,214	21,4%
C-D	22	0,045	0,1	0,005	0,357	35,7%
C-E	23	0,043	0,1	0,004	0,286	28,6%
D-A	48	0,021	0,1	0,002	0,153	15,3%
D-B	34	0,029	0,1	0,003	0,231	23,1%
D-C	22	0,045	0,1	0,005	0,385	38,5%
D-E	35	0,029	0,1	0,003	0,231	23,1%
E-A	29	0,034	0,1	0,003	0,231	23,1%
E-B	32	0,031	0,1	0,003	0,231	23,1%
E-C	23	0,043	0,1	0,004	0,307	30,7%
E-D	35	0,029	0,1	0,003	0,231	23,1%





MAIOR
PROBABILIDADE

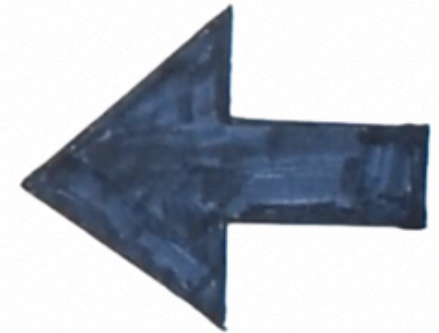
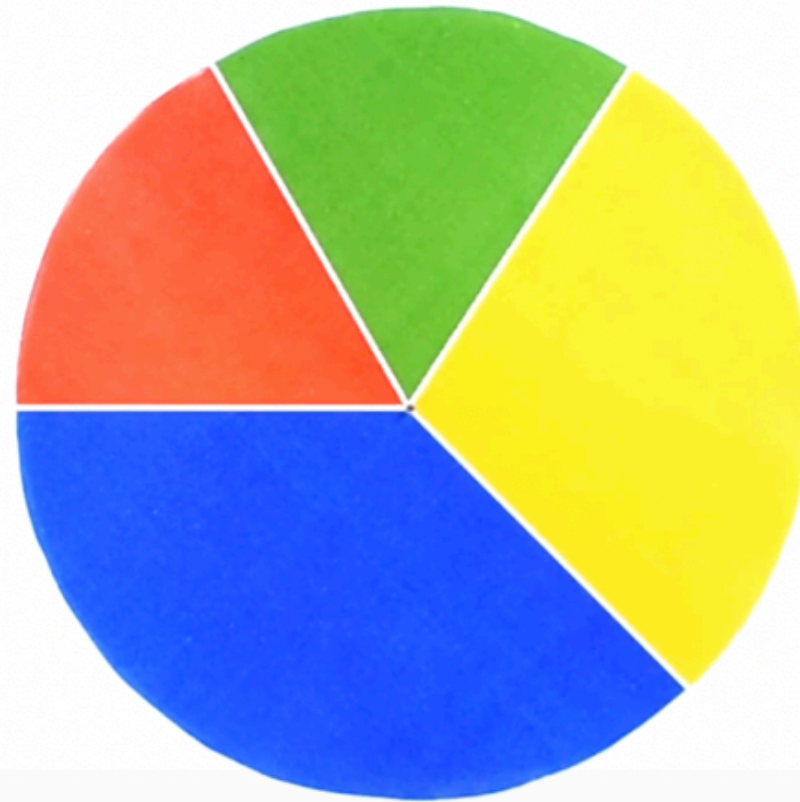
MÉTODO DA
ROLETA



EXEMPLO

F1

-  A-B (41,6%)
-  A-C (16,7%)
-  A-D (16,7%)
-  A-E (25,0%)



A formiga F1 escolheu a rota **A – E** pela roleta

EXEMPLO

PORCENTAGENS AJUSTADAS

~~E-A (23,1%)~~

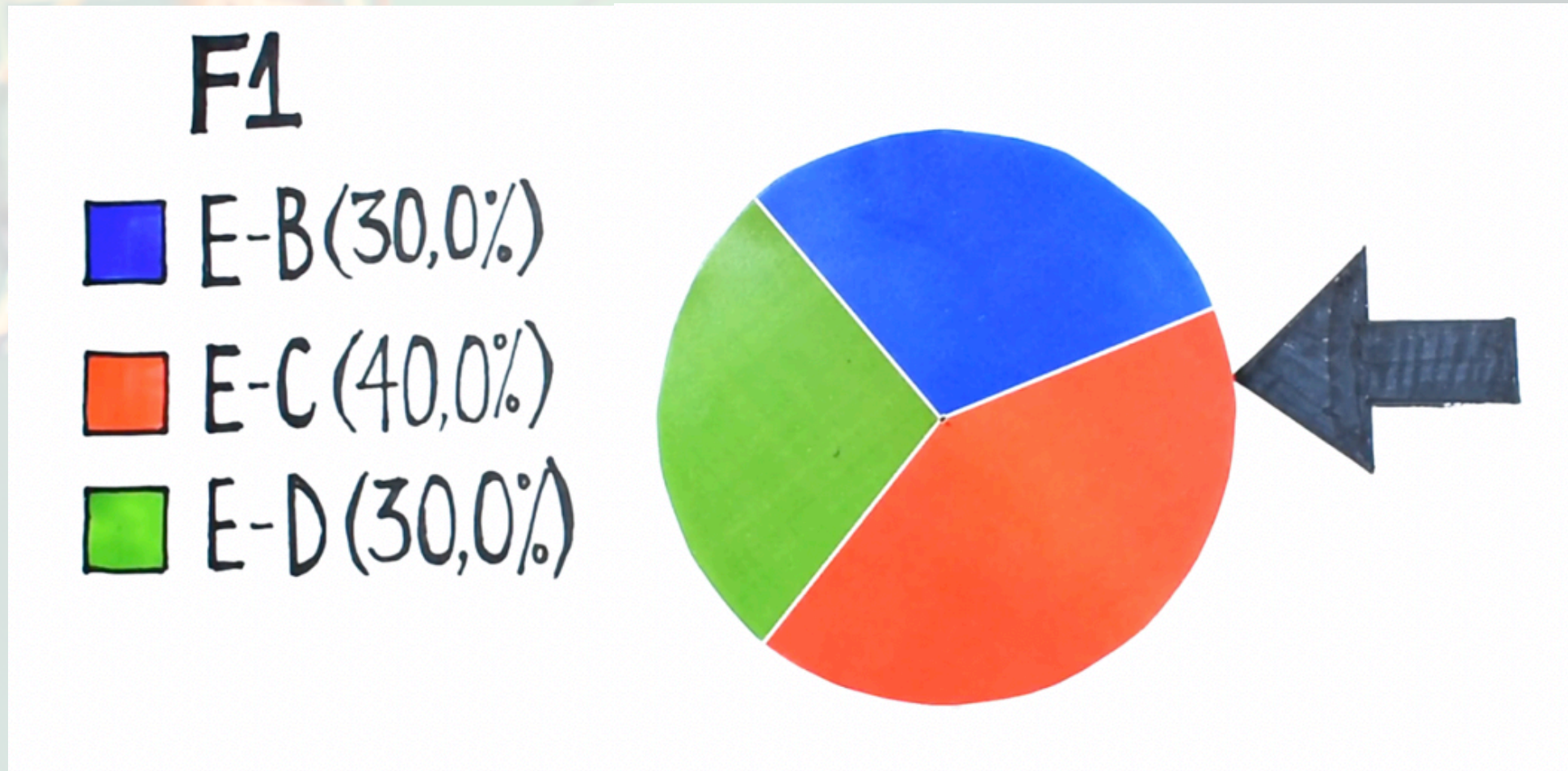
E-B (23,1%) → 30,0%

E-C (30,7%) → 40,0%

E-D (23,1%) → 30,0%

100,0%

EXEMPLO



A formiga F1 escolheu agora rota **E – C** pela roleta

EXEMPLO

PORCENTAGENS AJUSTADAS

~~C-A (14,3%)~~

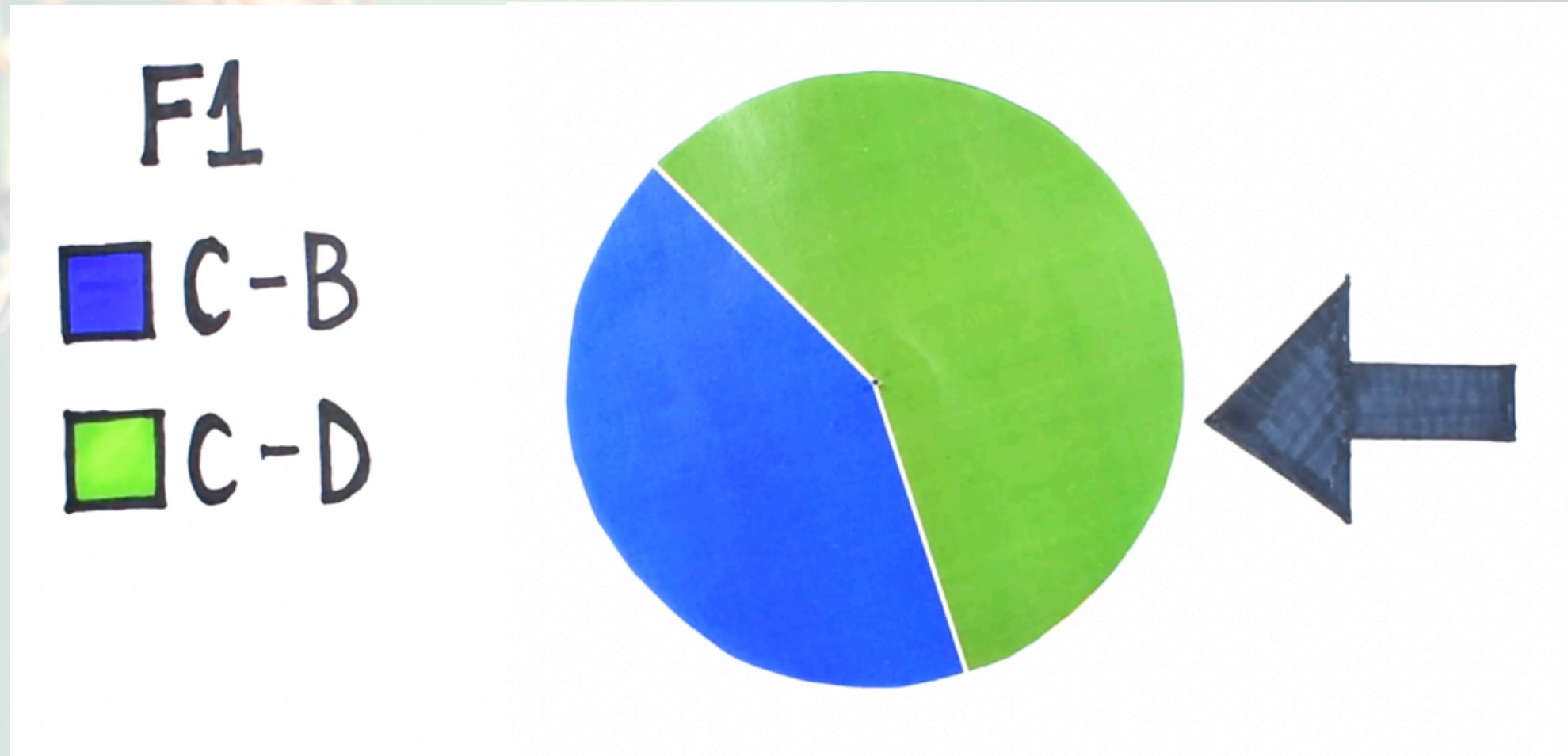
C-B (21,4%) → 37,0%

C-D (35,7%) → 63,0%

~~C-E (28,6%)~~

100,0%

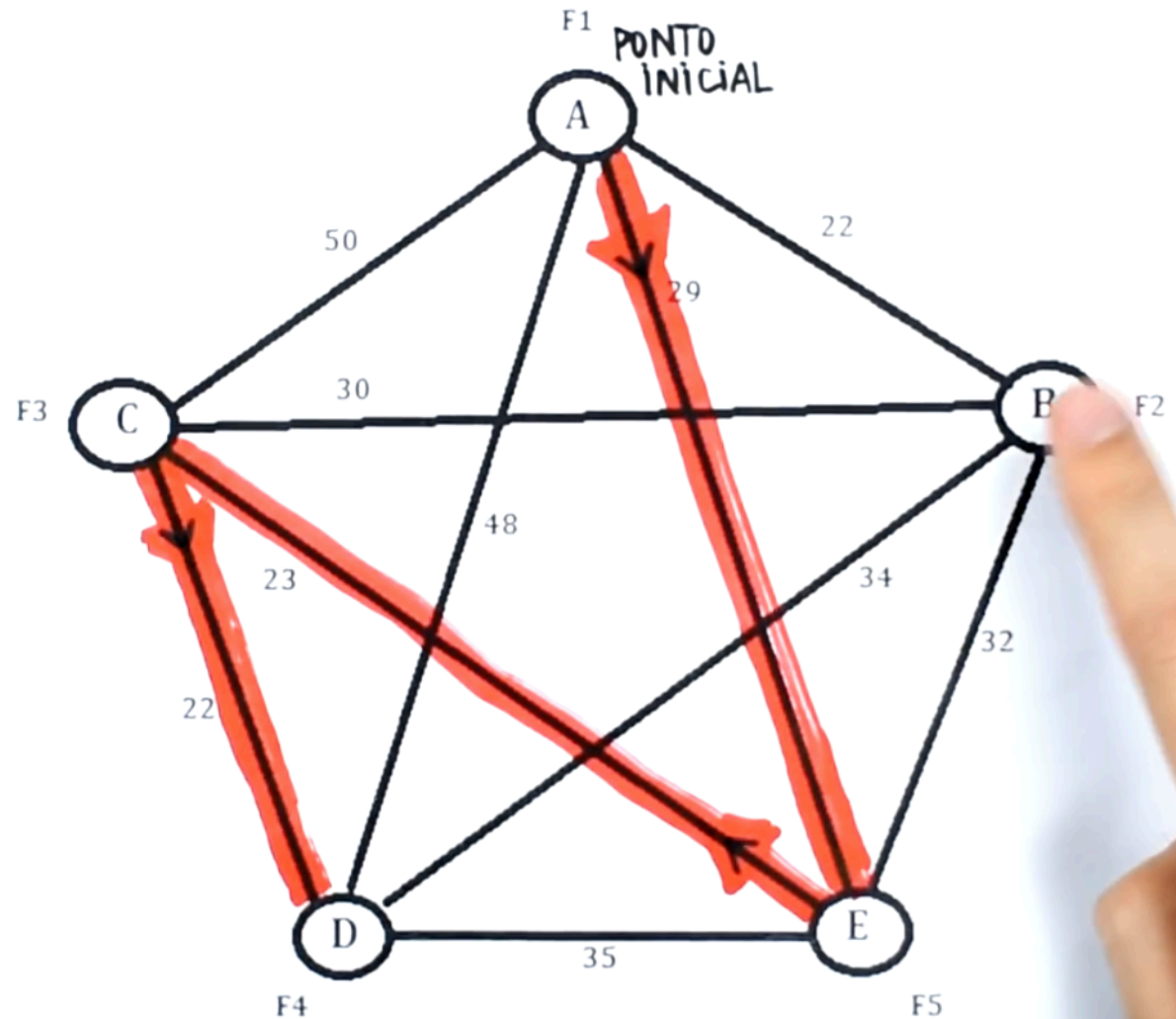
EXEMPLO



A formiga F1 escolheu agora rota **C – D** pela roleta
E por fim só lhe resta a rota **D – B**

EXEMPLO

Rota formiga F1:

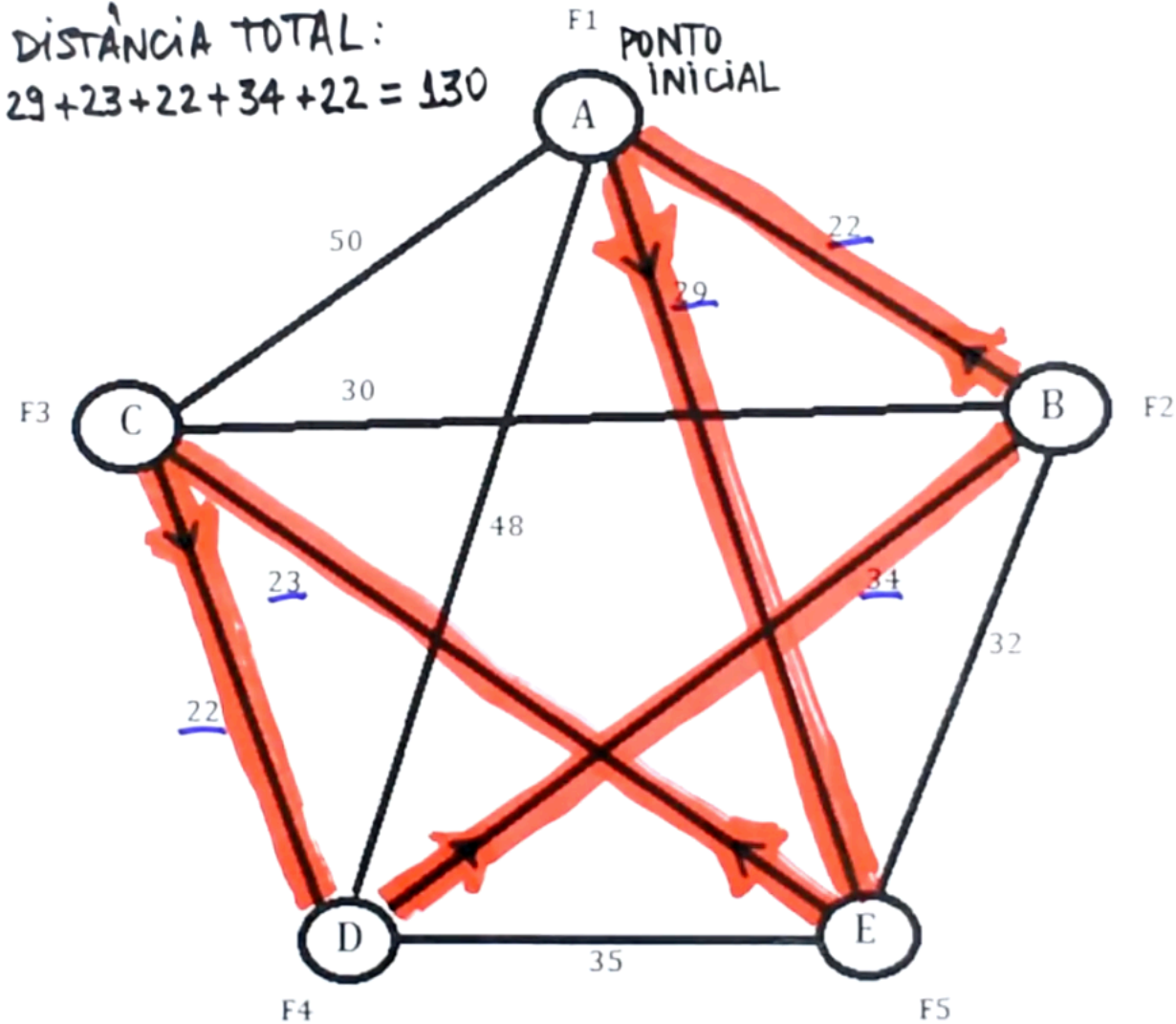


Chegando em **B** a formiga F1 retorna ao ponto **A**, pois todos os pontos já foram visitados.

EXEMPLO

Rota formiga F1 : A-E-C-D-B-A

DISTÂNCIA TOTAL:
 $29 + 23 + 22 + 34 + 22 = 130$



EXEMPLO

Aplicando o método da roleta para as demais formigas, tem-se:

Tabela de rotas e distâncias - 1ª iteração							
Formigas	Sequência dos pontos percorridos						Distância total percorrida
F1	A	E	C	D	B	A	130
F2	B	E	C	A	D	B	187
F3	C	D	B	E	A	C	167
F4	D	C	B	A	E	D	138
F5	E	C	A	B	D	E	164

EXEMPLO

Atualização do feromônio:

TABELA DE ATUALIZAÇÃO DO FEROMÔNIO

ROTAS	$(1-\sigma) \cdot \tau_{xy}$	F1	F2	F3	F4	F5	TOTAL
A-B	0,099	0,077			0,072	0,061	0,309

TOTAL DE FEROMÔNIO PRESENTE EM CADA ROTA

$$\Delta \tau_{AB}^{F1} = \frac{Q}{d_{F1}} = \frac{10}{130}$$

$$\Delta \tau_{AB}^{F1} = 0,077$$

FEROMÔNIO INICIAL APÓS EVAPORAÇÃO

FEROMÔNIO DEPOSITADO NA ROTA A-B PELA FORMIGA F1

Tabela de rotas e distâncias - 1ª iteração

Formigas	Sequência dos pontos percorridos						Distância total percorrida
F1	A	E	C	D	B	A	130
F2	B	E	C	A	D	B	187
F3	C	D	B	E	A	C	167
F4	D	C	B	A	E	D	138
F5	E	C	A	B	D	E	164

EXEMPLO

Atualização do feromônio:

Tabela de atualização de feromônio							
Rota	$(1-\sigma) * \tau(xy)$	F1	F2	F3	F4	F5	Total
A-B	0,099	0,077			0,072	0,061	0,309
A-C	0,099		0,054	0,06		0,061	0,274
A-D	0,099		0,054				0,153
A-E	0,099	0,077		0,06	0,072		0,308
B-C	0,099				0,072		0,171
B-D	0,099	0,077	0,054	0,06		0,061	0,351
B-E	0,099		0,054	0,06			0,213
C-D	0,099	0,077		0,06	0,072		0,308
C-E	0,099	0,077	0,054			0,061	0,291
D-E	0,099				0,072	0,061	0,232

Fim da 1ª iteração

EXEMPLO

... 6ª
iteração

Tabela de probabilidades - 1ª iteração						
Rotas	Distância	$\tau(xy)$	$\eta(xy)$	$\tau(xy) * \eta(xy)$	P(xy)	P(xy) %
A-B	22	0,045	0,1	0,005	0,416	41,6%
A-C	50	0,02	0,1	0,002	0,167	16,7%
A-D	48	0,021	0,1	0,002	0,167	16,7%
A-E	29	0,034	0,1	0,003	0,25	25,0%
B-A	22	0,045	0,1	0,005	0,358	35,8%
B-C	30	0,033	0,1	0,003	0,214	21,4%
B-D	34	0,029	0,1	0,003	0,214	21,4%
B-E	32	0,031	0,1	0,003	0,214	21,4%
C-A	50	0,02	0,1	0,002	0,143	14,3%
C-B	30	0,033	0,1	0,003	0,214	21,4%
C-D	22	0,045	0,1	0,005	0,357	35,7%
C-E	23	0,043	0,1	0,004	0,286	28,6%
D-A	48	0,021	0,1	0,002	0,153	15,3%
D-B	34	0,029	0,1	0,003	0,231	23,1%
D-C	22	0,045	0,1	0,005	0,385	38,5%
D-E	35	0,029	0,1	0,003	0,231	23,1%
E-A	29	0,034	0,1	0,003	0,231	23,1%
E-B	32	0,031	0,1	0,003	0,231	23,1%
E-C	23	0,043	0,1	0,004	0,307	30,7%
E-D	35	0,029	0,1	0,003	0,231	23,1%

Tabela de probabilidades - 2ª iteração						
Rotas	Distância	$\tau(xy)$	$\eta(xy)$	$\tau(xy) * \eta(xy)$	P(xy)	P(xy) %
A-B	22	0,045	0,309	0,014	0,437	43,7%
A-C	50	0,02	0,274	0,005	0,156	15,6%
A-D	48	0,021	0,153	0,003	0,094	9,4%
A-E	29	0,034	0,308	0,010	0,313	31,3%
B-A	22	0,045	0,309	0,014	0,379	37,9%
B-C	30	0,033	0,171	0,006	0,162	16,2%
B-D	34	0,029	0,351	0,010	0,270	27,0%
B-E	32	0,031	0,213	0,007	0,189	18,9%
C-A	50	0,02	0,274	0,005	0,132	13,2%
C-B	30	0,033	0,171	0,006	0,158	15,8%
C-D	22	0,045	0,308	0,014	0,368	36,8%
C-E	23	0,043	0,291	0,013	0,342	34,2%
D-A	48	0,021	0,153	0,003	0,088	8,8%
D-B	34	0,029	0,351	0,010	0,294	29,4%
D-C	22	0,045	0,308	0,014	0,412	41,2%
D-E	35	0,029	0,232	0,007	0,206	20,6%
E-A	29	0,034	0,308	0,010	0,271	27,1%
E-B	32	0,031	0,213	0,007	0,189	18,9%
E-C	23	0,043	0,291	0,013	0,351	35,1%
E-D	35	0,029	0,232	0,007	0,189	18,9%

Tabela de probabilidades - 3ª iteração						
Rotas	Distância	$\tau(xy)$	$\eta(xy)$	$\tau(xy) * \eta(xy)$	P(xy)	P(xy) %
A-B	22	0,045	0,600	0,027	0,466	46,6%
A-C	50	0,02	0,271	0,005	0,086	8,6%
A-D	48	0,021	0,280	0,006	0,103	10,3%
A-E	29	0,034	0,592	0,020	0,345	34,5%
B-A	22	0,045	0,600	0,027	0,436	43,6%
B-C	30	0,033	0,302	0,010	0,161	16,1%
B-D	34	0,029	0,562	0,016	0,264	26,4%
B-E	32	0,031	0,279	0,009	0,139	13,9%
C-A	50	0,02	0,271	0,005	0,081	8,1%
C-B	30	0,033	0,302	0,010	0,149	14,9%
C-D	22	0,045	0,599	0,027	0,403	40,3%
C-E	23	0,043	0,571	0,025	0,367	36,7%
D-A	48	0,021	0,280	0,006	0,103	10,3%
D-B	34	0,029	0,562	0,016	0,281	28,1%
D-C	22	0,045	0,599	0,027	0,465	46,5%
D-E	35	0,029	0,302	0,009	0,151	15,1%
E-A	29	0,034	0,592	0,020	0,317	31,7%
E-B	32	0,031	0,279	0,009	0,143	14,3%
E-C	23	0,043	0,571	0,025	0,397	39,7%
E-D	35	0,029	0,302	0,009	0,143	14,3%

Tabela de probabilidades - 4ª iteração						
Rotas	Distância	$\tau(xy)$	$\eta(xy)$	$\tau(xy) * \eta(xy)$	P(xy)	P(xy) %
A-B	22	0,045	0,897	0,040	0,476	47,6%
A-C	50	0,02	0,269	0,005	0,060	6,0%
A-D	48	0,021	0,340	0,007	0,084	8,4%
A-E	29	0,034	0,951	0,032	0,380	38,0%
B-A	22	0,045	0,897	0,040	0,460	46,0%
B-C	30	0,033	0,361	0,012	0,138	13,8%
B-D	34	0,029	0,860	0,025	0,287	28,7%
B-E	32	0,031	0,338	0,010	0,115	11,5%
C-A	50	0,02	0,269	0,005	0,053	5,3%
C-B	30	0,033	0,361	0,012	0,128	12,8%
C-D	22	0,045	0,958	0,043	0,457	45,7%
C-E	23	0,043	0,796	0,034	0,362	36,2%
D-A	48	0,021	0,340	0,007	0,084	8,4%
D-B	34	0,029	0,860	0,025	0,290	29,0%
D-C	22	0,045	0,958	0,043	0,501	50,1%
D-E	35	0,029	0,371	0,011	0,125	12,5%
E-A	29	0,034	0,340	0,012	0,172	17,2%
E-B	32	0,031	0,338	0,010	0,156	15,6%
E-C	23	0,043	0,796	0,034	0,512	51,2%
E-D	35	0,029	0,371	0,011	0,160	16,0%

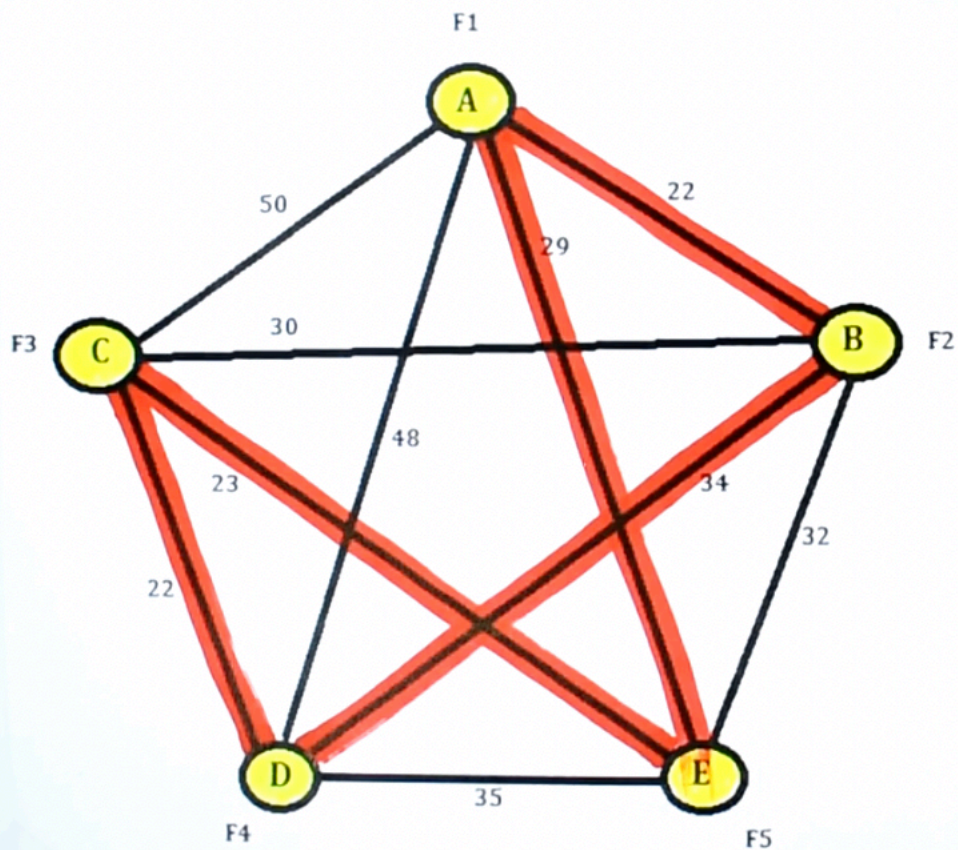
Tabela de probabilidades - 5ª iteração						
Rotas	Distância	$\tau(xy)$	$\eta(xy)$	$\tau(xy) * \eta(xy)$	P(xy)	P(xy) %
A-B	22	0,045	0,825	0,037	0,451	45,1%
A-C	50	0,02	0,269	0,005	0,061	6,1%
A-D	48	0,021	0,400	0,008	0,098	9,8%
A-E	29	0,034	0,939	0,032	0,390	39,0%
B-A	22	0,045	0,825	0,037	0,432	43,2%
B-C	30	0,033	0,421	0,014	0,162	16,2%
B-D	34	0,029	0,910	0,026	0,307	30,7%
B-E	32	0,031	0,276	0,009	0,099	9,9%
C-A	50	0,02	0,269	0,005	0,056	5,6%
C-B	30	0,033	0,269	0,009	0,100	10,0%
C-D	22	0,045	0,824	0,037	0,411	41,1%
C-E	23	0,043	0,918	0,039	0,433	43,3%
D-A	48	0,021	0,400	0,008	0,100	10,0%
D-B	34	0,029	0,910	0,026	0,325	32,5%
D-C	22	0,045	0,824	0,037	0,463	46,3%
D-E	35	0,029	0,299	0,009	0,112	11,2%
E-A	29	0,034	0,939	0,032	0,360	36,0%
E-B	32	0,031	0,276	0,009	0,101	10,1%
E-C	23	0,043	0,918	0,039	0,438	43,8%
E-D	35	0,029	0,299	0,009	0,101	10,1%

Tabela de probabilidades - 6ª iteração						
Rotas	Distância	$\tau(xy)$	$\eta(xy)$	$\tau(xy) * \eta(xy)$	P(xy)	P(xy) %
A-B	22	0,045	1,193	0,054	0,487	48,7%
A-C	50	0,02	0,266	0,005	0,045	4,5%
A-D	48	0,021	0,464	0,010	0,090	9,0%
A-E	29	0,034	1,238	0,042	0,378	37,8%
B-A	22	0,045	1,193	0,054	0,474	47,4%
B-C	30	0,033	0,417	0,014	0,123	12,3%
B-D	34	0,029	1,209	0,035	0,307	30,7%
B-E	32	0,031	0,341	0,011	0,096	9,6%
C-A	50	0,02	0,266	0,005	0,042	4,2%
C-B	30	0,033	0,417	0,014	0,108	10,8%
C-D	22	0,045	1,192	0,054	0,418	41,8%
C-E	23	0,043	1,285	0,055	0,432	43,2%
D-A	48	0,021	0,464	0,010	0,091	9,1%
D-B	34	0,029	1,209	0,035	0,328	32,8%
D-C	22	0,045	1,192	0,054	0,501	50,1%
D-E	35	0,029	0,296	0,009	0,080	8,0%
E-A	29	0,034	1,238	0,042	0,359	35,9%
E-B	32	0,031	0,341	0,011	0,094	9,4%
E-C	23	0,043	1,285	0,055	0,470	47,0%
E-D	35	0,029	0,296	0,009	0,077	7,7%

EXEMPLO

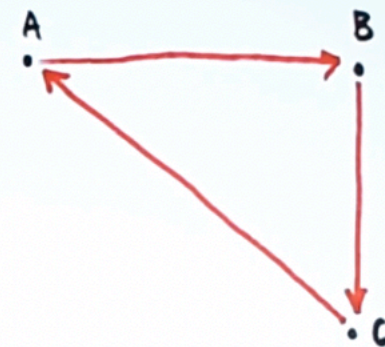
Tabela de rotas e distâncias - 6ª iteração

Formigas	Sequência dos pontos percorridos						Distância total percorrida
F1	A	E	C	D	B	A	130
F2	B	A	E	C	D	B	130
F3	C	D	B	A	E	C	130
F4	D	C	E	A	B	D	130
F5	E	C	D	B	A	E	130



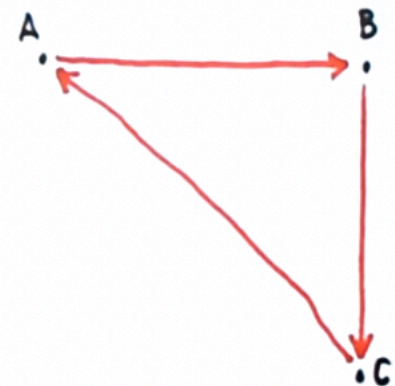
A-E-C-D-B-A
 B-A-E-C-D-B
 A-B-D-C-E-A

→ ROTAS EQUIVALENTES

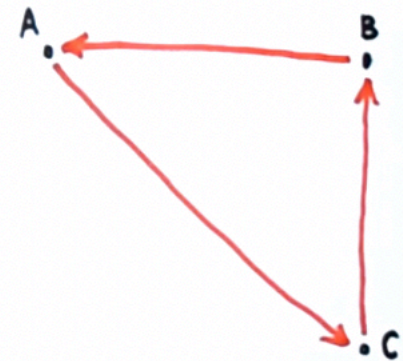


Rotas

A-B-C-A



B-C-A-B



A-C-B-A

Tem
mesmas
distâncias

EXEMPLO

- O fato de, neste exemplo, as formigas terem convergido para o mesmo caminho e assim obter a solução ótima, é um caso típico desse exercício, porém não é sempre que ocorre;
- Em muitos casos, principalmente quando se tem um grande número de pontos, mesmo após muitas iterações, essa convergência pode não acontecer, cabendo ao programador definir o número de iterações que deseja até atingir um resultado satisfatório.

REFERÊNCIAS

SIQUEIRA, P. H. Metaheurísticas e Aplicações. Parte III – Outras Metaheurísticas. PPGMNE/UFPR. Notas de Aula.

<https://slideplayer.com.br/slide/1595671/>

ideia

<https://www.youtube.com/watch?v=4gVEoOpvpvs>

PCV

<https://www.youtube.com/watch?v=UXSc0jwgZis>