

**EXERCÍCIO RESOLVIDO DE ANÁLISE DE SENSIBILIDADE**

Uma empresa necessita produzir os produtos A e B que vende com margem de lucro unitário médio de 3,00 R\$ e 2,00 R\$ respectivamente

São utilizadas duas matérias primas (Horas Máquina e Horas de Trabalho) cujas disponibilidades e consumos unitários são os seguintes:

	A	B	Disponível
Máquinas (h)	2	1	100
Trabalho (h)	1	1	80

A empresa quer que a produção total seja no máximo 40 unidades do produto A. Deseja-se, maximizar o lucro. O ppl associado a esta decisão é

$$\begin{aligned} \max Z &= 3x_A + 2x_B & \max Z &= 3x_A + 2x_B \\ \text{s.a} \quad 2x_A + 1x_B &\leq 100 & \text{s.a} \quad 2x_A + 1x_B + F_1 &= 100 \\ 1x_A + 1x_B &\leq 80 & 1x_A + 1x_B + F_2 &= 80 \\ 1x_A &\leq 40 & 1x_A + F_3 &= 40 \\ x_A, x_B &\geq 0 & x_A, x_B &\geq 0 \end{aligned}$$

A solução ótima é mostrada no quadro

Base	$x_A$	$x_B$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$b$
Z	0	0	1	1	0	180
$x_B$	0	1	-1	2	0	60
$F_3$	0	0	-1	1	1	20
$x_A$	1	0	1	-1	0	20

**Questões**

**1. Quais recursos são escassos? Justifique.**

Resposta: Como  $F_1=F_2=0$ , então os recursos escassos são Horas Máquina e Horas de Trabalho.

**2. Se alguém quisesse adquirir uma unidade do recurso  $R_1$ , você estaria disposto a vender? Qual o preço que compensa a venda? Justifique.**

Resposta: Estaria disposto a vender sim se o pagamento mínimo fosse 1,00 R\$ por unidade vendida. A justificativa do preço mínimo (1,00 R\$) é a de que uma redução em uma unidade do recurso  $R_1$  reduz o valor da função objetivo em 1,00 R\$ ( $y_1=1$ )

**3. Se alguém insistir em comprar uma unidade do recurso  $R_2$ , que preço de venda compensaria o fato dele ser escasso? Justifique.**

Resposta: Análogo à questão 2, estaria disposto a vender sim se o pagamento mínimo fosse 1,00 R\$ por unidade vendida. A justificativa do preço mínimo (1,00 R\$) é a de que a redução em uma unidade do recurso  $R_2$ , leva ao decréscimo do valor da função objetivo em 1,00 R\$ ( $y_2=1$ )

**4. Construa o modelo Dual do problema e obtenha a sua solução (do Dual).**

Resposta:

$$\begin{aligned} \min D = & 80x_A + 100y_2 + 40y_3 \\ \text{s.a} & 2y_1 + 1y_2 + 1y_3 \geq 3 \\ & 1y_1 + 1y_2 + 0y_3 \geq 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

A solução ótima do Dual deve ser extraída do quadro ótimo do primal.  $y_1^* = 1$ ,  $y_2^* = 1$ ,  $y_3^* = 0$ ,  $E_1^* = 0$ ,  $E_2^* = 0$ ,  $D^* = 180$

**5. O que significa a variável dual  $y_1$ ?**

Resposta:

- É o preço mínimo pelo qual deverá ser vendida uma unidade do recurso  $R_1$ .
- É o preço máximo que se deve pagar por uma unidade adicional do recurso  $R_1$ .
- É o acréscimo no valor da função objetivo se ocorrer a adição de uma unidade do recurso  $R_1$ .
- É o valor que a função objetivo vai decrescer se ocorrer uma redução de uma unidade do recurso  $R_1$ .

**6. Quanto você pagaria por uma unidade adicional do recurso  $R_3$ ? Por que?**

Resposta: Pagaria no máximo 0,00 R\$ ( $y_3 = 0$ ). Pagaria no máximo 0,00 R\$ pois já há sobra deste recurso ( $F_3=20$ ).

**7. Qual a faixa de variação do coeficiente de  $x_A$  ( $c_A$ ) na função objetivo tal que a solução ótima não mude?**

Resposta:

$$\begin{aligned} \bar{C}_N = (0,0) - (-2,0,-c'_A) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \geq 0 \\ \bar{C}_N = (2,0,c'_A) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \geq 0 & \Rightarrow \begin{cases} -2 + c'_A \geq 0 \\ 4 - c'_A \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c'_A \geq 2 \\ c'_A \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq c_A \leq 4 \end{aligned}$$

**8. Qual a faixa de variação do coeficiente de  $F_1$  na função objetivo tal que a solução ótima não mude?**

Resposta:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{F_1} = -c'_{F_1} - (-2,0,-3) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \geq 0 \\ \bar{c}_{F_1} = -c'_{F_1} + (2,0,3) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 & \Rightarrow -c'_{F_1} + 1 \geq 0 \Rightarrow c'_{F_1} \leq 1 \end{aligned}$$

9. Suponha, então que a disponibilidade do segundo recurso ( $b_2$ ) reduziu de 80 para 40 unidades. A solução ótima muda? Se sim, qual a nova solução?

Resposta: O vetor de recursos  $(100,80,40)^T$  passou para  $b' = (100,40,40)^T$

$$\bar{b}' = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ F_3 \\ x_A \end{pmatrix}$$

Como esta solução é inviável deve-se usar o algoritmo dual-simplex para “tentar” encontrar uma solução viável. Antes deve-se calcular o novo valor da função objetivo:  $Z=140$

Base	$x_A$	$x_B$	$\downarrow F_1$	$F_2$	$F_3$	$b$
Z	0	0	1	1	0	140
$x_B$	0	1	1	2	0	-20 →
$F_3$	0	0	-1	1	1	-20
$x_A$	1	0	1	-1	0	60

Base	$x_A$	$x_B$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$b$
Z	0	1	0	3	0	120
$x_B$	0	-1	1	-2	0	20
$F_3$	0	-1	0	-1	1	0
$x_A$	1	1	0	1	0	40

Neste caso a solução ótima muda, e passa a ser  $x_A = 40, x_B = 20, Z = 120$

10. Qual a faixa de variação do primeiro recurso ( $b_1$ ) para que a base ótima não mude.

Resposta: O vetor de recursos  $(100,80,40)^T$  passou para  $b'' = (b_1'', 40, 40)^T$

$$\bar{b}'' = B^{-1}b'' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1'' \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -b_1'' + 160 \\ -b_1'' + 80 + 40 \\ b_1'' - 80 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} -b_1'' + 160 \geq 0 \\ -b_1'' + 80 + 40 \geq 0 \\ b_1'' - 80 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1'' \leq 160 \\ b_1'' \leq 120 \\ b_1'' \geq 80 \end{cases} \Rightarrow 80 \leq b_1'' \leq 120$$