

A dark blue, irregular ink splatter shape is centered on a white background. The splatter has a textured, watercolor-like appearance with some lighter blue and white areas at the edges. The text is centered within this dark blue area.

# Multiplicação de Matrizes

Programação Dinâmica

# Multiplicação de matrizes

$$M = M_1 \times M_2 \times M_3 \times \dots \times M_n$$

É associativa.

$$(M_1 \times M_2) \times M_3 \times \dots \times M_n = M_1 \times (M_2 \times M_3) \times \dots \times M_n$$

Dada as matrizes  $M_{a,b}$  e  $M_{b,c}$

O número de operações necessárias para a multiplicação é

$$a \cdot b \cdot c$$

# Multiplicação de Matrizes



Seja  $\{200, 2, 30, 30, 5\}$  vetor de dimensão das matrizes



Primeira matriz  $200 \times 2$



Segunda matriz  $2 \times 30$



Terceira matriz  $30 \times 30$



Quarta matriz  $30 \times 5$



Assim sendo ...

# Multiplicação de Matrizes

{200,2,30,20,5}

Se multiplicarmos a primeira pela segunda tem-se

- $200 \times 2 \times 30 = 12000$

Se multiplicarmos a segunda pela terceira tem-se

- $2 \times 30 \times 20 = 1200$

Assim sendo, agrupar as matrizes de forma diferente impacta no número de operações a ser efetuada.

## Multiplicação de Matrizes

$((M1 \times M2) \times M3) \times M4$

152.000 operações

$(M1 \times ((M2 \times M3) \times M3))$

8.400 operações

Como Determinar a  
sequencia ótima?

# Como Determinar a Sequencia ótima???



Não é possível mudar a sequencia



Escolher a ordem que vai “juntar” 2 a duas



Conclusão: **A Ordem da Multiplicação faz muita diferença**

3

Força Bruta :  $2^n$



Como usar Programação dinâmica para determinar esta ordem?

# Ideia de resolução

---

- Para resolver este problema tudo o que precisamos determinar é o melhor índice  $k$ , tal que:
- $M = (M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k) (M_{k+1} \times M_{k+2} \times \dots \times M_N)$
- Assim sendo recaímos no mesmo problema, só que de tamanho menor

# Recursividade

Seja  $M_{ij}$  o menor número de operações para fazer o produto de  $i$  até  $j$ .

$$M_{ij} = \min \{M_{ik} + M_{k+1j} + b_{i-1} b_k b_j\} \quad k=i, \dots, j-1$$

$$M_{ii} = 0$$

$M_{i,i+1}$  são calculados

$M_{i,i+2}$  são calculado

.....

# Exemplo

M1  
200x2

M2  
2x30

M3  
30x20

M4  
20x5

$$M_{11} = 0$$

$$M_{22} = 0$$

$$M_{33} = 0$$

$$M_{44} = 0$$

$$M_{12} = 12000$$

$$M_{23} = 1200$$

$$M_{34} = 3000$$

(distância 1)

## Exemplo ..... Distância 2

$$M_{iK} = \min\{M_{1K} + M_{K+1J} + b_{i-1} b_K b_J\} \quad K=i, \dots, J-1$$

$$M_{13} = \min\{M_{11} + M_{23} + b_0 b_1 b_3\} \quad (k=2)$$

$$= \min\{0 + 1200 + 200 \cdot 2 \cdot 20\}$$

$$= \min\{1200 + 8000\}$$

$$= 9200$$