DUALIDADE – INTERPRETAÇÃO

Exemplo

O proprietário de uma empresa que produz reboques para automóveis quer determinar a melhor combinação para os seus três produtos: reboque L, reboque GL, e reboque de luxo GLX. Sua empresa limita a atuação em 24 dias/mês na seção de metalurgia e 60 dias/mês na seção de marcenaria para esses 3 produtos. A tabela a seguir indica os dados de produção para os reboques.

	Recurso por unidade de reboque			Disponibilidade de recursos – dias
	L	GL	GLX	
Metalurgia – dias	½	2	1	24
Marcenaria – dias	1	2	4	60
Lucro – $	600	1400	1300	

$$
\begin{array}{lll}
\max\ Z = & 600x_L + 1400x_{GL} + 1300x_{GLX} & \\
\text{sa} & \frac{1}{2}x_L + 2x_{GL} + 1x_{GLX} & \leq 24 \\
 & 1x_L + 2x_{GL} + 4x_{GLX} & \leq 60 \\
 & x_L, x_{GL}, x_{GLX} & \geq 0
\end{array}
$$

Se desejarmos maximizar o lucro total advindo da produção das quantidades de cada tipo de reboque, temos o seguinte quadro ótimo do pl primal:

Base	x_L	x_{GL}	x_{GLX}	F_M	F_W	b
Z		900		1.100	50	29.400
x_L	1	6		4	-1	36
x_{GLX}		-1	1	-1	½	6

onde x_L é a quantidade de reboques L, x_{GL} de reboques GL, x_{GLX} de reboques GLX, F_M é a variável de folga da restrição de metalurgia e F_W da marcenaria.

Resolver um programa linear normalmente fornece mais informações sobre uma solução ótima do que apenas os valores das variáveis de decisão. Associado a uma solução ótima temos os preços sombra (também conhecidos como *shadow prices*, variáveis duais, valores marginais, preços internos) para as restrições. Do teorema da folga complementar temos que os valores das duas variáveis duais (y_1 e y_2) associadas às duas restrições assumem os seguintes valores: $y_1 = 1.100$; $y_2 = 50$.

Definição: O **preço sombra** associado a uma restrição específica é a mudança que ocorre no valor ótimo da função objetivo se ocorrer aumento de uma unidade na quantidade do lado direito dessa restrição (b), permanecendo inalterados todos os outros parâmetros do problema.

Portanto, as variáveis de decisão duais (y_1, y_2) são valorizações unitárias a atribuir a cada recurso e podem ser interpretadas como a contribuição ao lucro total por cada unidade de recurso utilizada

Por exemplo, suponha que a disponibilidade de trabalho na marcenaria, que é dada pela restrição

$$1x_L + 2x_{GL} + 4x_{GLX} + F_W = 60,$$

foi aumentada em 1 dia passando de 60 para 61 dias. Podemos, algebricamente obter o mesmo resultado ao permitir que a variável de folga F_W assuma valores negativos. Se F_W é substituída por ($F_W - 1$), isto é, do seu valor ótimo $F_W = 0$ passar para $F_W = -1$, a restrição passa a ser

$$1x_L + 2x_{GL} + 4x_{GLX} + F_W = 61.$$

Qual o efeito desse aumento no lucro final da empresa? Qual é a contribuição para o lucro ótimo dada esta unidade adicional de capacidade? Podemos resolver esta questão olhando para a função objetivo do quadro final, que é dada por:

$$Z = 0x_L - 900x_{GL} + 0x_{GLX} - 1.100F_M - 50F_W + 29.400$$

Se permitirmos que $F_W = -1$, então o lucro aumenta em 50\$. Este valor (50\$) é, então, o valor marginal, ou preço sombra para cada dia de marcenaria.

Não devemos esquecer que os preços sombra estão associados a restrições do problema e não a variáveis.

Definição: O **custo reduzido** associado a uma restrição de não negatividade para cada variável é o preço sombra daquela restrição (isto é, a mudança correspondente na função objetivo por aumento de uma unidade no limite inferior da variável).

Os custos reduzidos também podem ser obtidos diretamente a partir da equação da função objetivo no quadro final. No nosso exemplo, a equação objetivo final é

$$Z = 0x_L - 900x_{GL} + 0x_{GLX} - 1.100F_M - 50F_W + 29.400$$

Aumentando o valor de x_{GL} em uma unidade (x_{GL}=1), ou seja, forçando x_{GL} entrar na base final, o valor da função objetivo diminui em 900$ (passa de 29.400$ para 28.500$). Se aumentarmos em quantidades pequenas as variáveis x_L e x_{GLX}, o valor ótimo da função objetivo não é afetado visto que estas já são básicas. Assim, em todos os casos, o preço sombra para a restrição de não negatividade de uma variável é o coeficiente da função objetivo para esta variável no quadro ótimo do simplex. Para variáveis básicas, os custos reduzidos são nulos.

Alternativamente, os custos reduzidos para todas as variáveis de decisão podem ser calculados diretamente dos preços sombra das restrições estruturais e dos coeficientes da função objetivo. Neste ponto de vista, os preços sombra são imaginados como os *custos de oportunidade* associados a desviar recursos do mix ótimo de produção. Por exemplo, considere x_{GL}. Visto que a atividade de produção de reboques do tipo GL requer 2 dias de trabalho na seção de metalurgia, cujo custo de oportunidade é 1.100$, 2 dias de trabalho de marcenaria, cujo custo de oportunidade é 50$, o custo de oportunidade total resultante de produzir um reboque GL é:

$$1.100(2) + 50(2) = 2.300$$

Agora, a contribuição (em $) por um reboque GL é de 1.400$, e portanto a produção de qualquer reboque deste tipo não é tão atraente como produzir os atuais níveis de reboques L e GLX. De fato, se os recursos fossem desviados do atual mix de produção ótimo para a produção de reboques do tipo GL, o valor ótimo da função objetivo seria reduzido em 900$ por reboque GL produzido. Isto é exatamente o custo reduzido associado à x_{GL} variável.

Dados os custos reduzidos, torna-se natural perguntar em quanto a contribuição (em $) da nova atividade teria de aumentar para tornar a produção do reboque GL atrativa? Usando a interpretação do custo de oportunidade total, a contribuição claramente teria que ser 2.300$ a fim do decisor ser indiferente em transferir recursos para a produção de reboques do tipo GL. Uma vez que o custo reduzido associado a nova atividade 1400–2300=–900 é negativo, a nova atividade (a variável x_{GL}) não será introduzida na base. Se o custo reduzido fosse positivo, a nova atividade seria candidata atraente para ser introduzida na base.

Conclusões

Preço sombra corresponde ao **custo de oportunidade de uma atividade**, que pode ser referido como sendo o seu verdadeiro preço econômico. Na pesquisa operacional, o **preço sombra** é a variação do valor objetivo da solução ótima de um problema de programação linear obtido através do relaxamento da restrição por uma unidade - é a **utilidade marginal** de relaxar a restrição.

Um exemplo **custo de oportunidade**: imagine uma fábrica que produzia 20 cadeiras por mês num mercado que absorvia totalmente esta produção. Diante de uma oportunidade de negócios, esta fábrica resolveu iniciar uma produção de um novo produto: mesas. Porém, ao alocar recursos para tal, descobriu que terá de deixar de produzir 2 cadeiras para suprir a demanda de 2 mesas. <u>O custo de oportunidade está no valor perdido da venda das 2 cadeiras que deixaram de ser fabricadas</u>.

Sempre que uma atividade j seja ativada a um nível estritamente positivo (x_j está na base e $x_j>0$), a valorização interna atribuída aos recursos que utiliza **deve ser igual** ao lucro unitário que se obtém dessa atividade, i.e., a perda de oportunidade para esta atividade é nula. Se a valorização interna atribuída aos recursos gastos numa atividade j **é maior do que** o seu lucro unitário, então com a ativação dessa atividade não se está a fazer uma utilização ótima destes recursos, i.e., essa atividade não é rentável pelo que não deve ser ativada.

Se a capacidade não utilizada do recurso i é positiva, então a valorização interna (preço sombra y_i) deste recurso é **nula**, i.e., este **recurso** é **abundante** ("mercadoria grátis"), o preço das mercadorias que estão em excesso, deve cair até zero por lei da oferta-procura.

Se a capacidade não utilizada do recurso k é nula, então a valorização interna (preço sombra y_k) deste recurso é positiva, i.e., este **recurso** é **escasso** ("não há sobras“). Para cada unidade extra que seja incrementada este recurso i, obtém-se um incremento de y_k na função objetivo (lucro total).