

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
HÉRCULES GIARETTA GIMENES



APLICAÇÃO DA TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIO DE MARKOWITZ NA
COMPOSIÇÃO DE CARTEIRAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTOS
IMOBILIÁRIOS

CURITIBA

2023

HÉRCULES GIARETTA GIMENES

APLICAÇÃO DA TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIO DE MARKOWITZ NA
COMPOSIÇÃO DE CARTEIRAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTOS
IMOBILIÁRIOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia de Produção, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Produção.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Mariana Kleina

CURITIBA
2023

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todos que contribuíram para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso. Este projeto representa um marco importante em minha jornada acadêmica, e não teria sido possível sem o apoio generoso e o incentivo de várias pessoas.

Primeiramente, quero agradecer à minha orientadora, Professora Mariana Kleina, pela sua orientação dedicada e pelas valiosas sugestões ao longo deste processo. Sua experiência e comprometimento foram fundamentais para o sucesso deste trabalho.

À minha família, expresso minha profunda gratidão pelo amor incondicional e acesso à educação de qualidade. Eles formaram o alicerce para minha formação como pessoa e cidadão, além de ser um dos pilares principais que me permitiram chegar a conclusão deste trabalho.

Agradeço também aos demais professores, colegas de curso e colegas de trabalho, que compartilharam seus conhecimentos e experiências, enriquecendo assim a minha compreensão sobre diversos assuntos, incluindo os que foram discutidos neste trabalho.

Por fim, dedico um agradecimento especial aos amigos que estiveram ao meu lado durante esta jornada. Suas palavras de estímulo e o apoio mútuo foram cruciais para superar os desafios encontrados.

RESUMO

Este Trabalho tem como objetivo demonstrar a aplicação da Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz, combinada com a Programação Quadrática, na seleção de portfólios de Fundos de Investimentos Imobiliários (FIIs). A pesquisa utiliza métodos quantitativos e técnicas de pesquisa operacional para construir uma carteira otimizada de FIIs, buscando maximizar o retorno esperado e minimizar o risco. Foram coletados dados históricos de preços e retornos de FIIs, além de informações sobre suas composições e rendimentos. A modelagem matemática empregada permite a otimização da carteira, destacando a importância da diversificação eficiente no mercado de investimentos imobiliários. Os resultados indicam uma melhora significativa na medida de risco da carteira, reduzindo de 0,0678% para -0,000000016%, ou seja uma melhora na grandeza de 10^6 . Dessa forma, para a aplicação realizada aqui nesse trabalho, nota-se o potencial de aplicação prática da Teoria Moderna de Portfólio em conjunto com a Programação Quadrática no contexto dos FIIs.

Palavras-chave: Portfólio; Markowitz; Fundos de Investimentos Imobiliários; Programação Quadrática.

ABSTRACT

This work aims to demonstrate the application of Modern Portfolio Theory by Markowitz, combined with Quadratic Programming, in the selection of Real Estate Investment Trusts (REITs) portfolios. The research employs quantitative methods and operational research techniques to construct an optimized portfolio of REITs, seeking to maximize expected return and minimize risk. Historical price and return data for REITs, as well as information on their compositions and yields, were collected. The mathematical modeling used allows for portfolio optimization, emphasizing the importance of efficient diversification in the real estate investment market. The results indicate a significant improvement in the portfolio's risk measure, reducing from 0.0678% to -0.000000016%, representing an improvement of magnitude 10^6 . Thus, for the application conducted in this work, the practical application potential of Modern Portfolio Theory in conjunction with Quadratic Programming in the context of REITs is evident.

Keywords: Portfolio; Markowitz; REIT; Quadratic Programming.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – PROCESSO DE MODELAGEM	20
FIGURA 2 – ESCOLHA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA COMO FERRAMENTE DE ANÁLISE.....	35
FIGURA 3 – SELEÇÃO DAS CÉLULAS DO EXCEL ONDE SE ENCONTRAM OS PREÇOS DE CADA ATIVO	35
FIGURA 4 – ESCRITA DA FUNÇÃO OBJETIVO E RESTRIÇÕES DO PROBLEMA NO SOLVER DO EXCEL	38

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – COMPOSIÇÃO DA CARTEIRA IFIX L 07/08/2023	28
TABELA 2 – RENTABILIDADE PERCENTUAL DOS ATIVOS	31
TABELA 3 – RESULTADOS OBTIDOS DA CARTEIRA IFIX L.....	36
TABELA 4 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MÉTODO GPG NON LINEAR	39

LISTA DE ABREVIATURAS

FII	- Fundo de Investimento Imobiliário
API	- <i>Application Programming Interface</i>
IFIX	- Índice de Fundos de Investimentos Imobiliários
IFIX L	- Índice de Fundos de Investimentos Imobiliários de Alta Liquidez

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	PROBLEMA	16
1.2	OBJETIVOS	17
1.2.1	Objetivo geral	17
1.2.2	Objetivos específicos	17
1.3	JUSTIFICATIVA	18
2	REVISÃO DE LITERATURA	16
2.1	FUNDOS DE INVESTIMENTOS IMOBILIÁRIOS	16
2.2	PESQUISA OPERACIONAL APLICADA EM PORTFÓLIOS	17
2.3	<i>GENERALIZED REDUCED GRADIENT (GRG)</i>	21
3	MATERIAL E MÉTODOS	23
3.1	TIPO DE PESQUISA	23
3.2	FONTES DE DADOS	23
3.3	IDENTIFICAÇÃO DAS MÉTRICAS RELEVANTES	24
3.4	DESENVOLVIMENTO DO MODELO DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA	25
3.5	APLICAÇÃO DO MODELO E ANÁLISE DE RESULTADO	26
4	APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	28
4.1	COMPILAÇÃO DOS DADOS	28
4.2	MONTAGEM DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA	35
4.3	MONTAGEM DA FUNÇÃO OBJETIVO	36

4.4	EXECUÇÃO DO ALGORITMO NÃO LINEAR GRG	36
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	41
5.1	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	42
	REFERÊNCIAS	44

1 INTRODUÇÃO

Segundo BONINI (2015), A Pesquisa Operacional tem sua origem nas forças militares da Inglaterra e dos Estados Unidos, na qual era utilizada como suporte para tomada de decisões militares, tendo como princípio a aplicação de modelos matemáticos para a melhor utilização dos recursos disponíveis. Após a guerra essas aplicações foram adaptadas, para a necessidade e benefício da sociedade como um todo. Uma destas aplicações é no contexto das finanças.

Com DANTZIG (1947), um marco para o campo foi atingido, ao se desenvolver o Método Simplex, uma abordagem eficiente para resolver problemas de Programação Linear. Hoje em dia, esse método é amplamente utilizado para solucionar problemas de grande escala, com o auxílio de computadores.

Já em MARKOWITZ (1952), foi desenvolvido estudo pioneiro na área da Teoria Moderna de Finanças, intitulado *Portfolio Selection*, sendo o primeiro trabalho a modelar matematicamente o conceito de diversificação de investimentos. O objetivo era maximizar o retorno esperado da carteira, minimizando o impacto do risco. Por essa contribuição, Markowitz recebeu o Prêmio Nobel de Economia em 1990.

Este trabalho tem como objetivo aplicar a Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz, modelada por um problema de Programação Quadrática, subárea da Pesquisa Operacional, na diversificação de uma carteira de fundos de investimentos imobiliários. O objetivo é minimizar o risco da carteira, buscando um retorno esperado mínimo.

1.1 PROBLEMA

O problema abordado neste trabalho é a seleção de portfólios de Fundos de Investimentos Imobiliários (FIIs) utilizando a Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz combinada com a Programação Quadrática. O objetivo é minimizar o risco da carteira, buscando um retorno esperado mínimo.

Os Fundos de Investimentos imobiliários são veículos de investimento que possuem como principal objetivo aplicar recursos no setor imobiliário, proporcionando aos investidores a oportunidade de se beneficiarem dos rendimentos gerados por esses. No entanto, como em qualquer investimento, existe o risco associado aos FIIs, como risco de liquidez, risco de crédito, risco de mercado, riscos de vacância, entre

outros, como descrito em PALMA *et al.* (2023). Portanto, é de interesse dos investidores diversificar seus investimentos em diferentes FIs, a fim de reduzir o risco total da carteira.

A Teoria Moderna de Portfólio, desenvolvida por Harry Markowitz, fornece uma abordagem sistemática para a seleção de ativos financeiros em uma carteira. Essa teoria considera não apenas o retorno esperado dos ativos, mas também o risco associado a eles. A Programação Quadrática, por sua vez, é uma abordagem da otimização que permite obter de forma otimizada a alocação de recursos.

Dessa forma, surge a pergunta de pesquisa: Como a aplicação da Programação Quadrática em conjunto com a Teoria Moderna de Portfólio pode ser utilizada para selecionar os FIs de uma carteira de forma a minimizar o risco e buscar um retorno esperado mínimo?

Ao responder a essa pergunta, este trabalho contribuirá para a área de investimentos, fornecendo uma metodologia para a seleção de FIs em uma carteira, levando em consideração tanto o retorno esperado quanto o risco associado a cada fundo.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é demonstrar a aplicabilidade da Programação Quadrática em conjunto com a Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz na seleção de portfólios de Fundos de Investimentos Imobiliários (FIs). Especificamente, busca-se minimizar o risco da carteira, impondo a condição de um retorno esperado mínimo.

1.2.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram estabelecidos:

- 1) Analisar a Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz e seu papel na seleção de ativos financeiros, destacando a importância da diversificação para redução do risco da carteira.

- 2) Aplicar Programação Quadrática na otimização da seleção de ativos, levando em consideração restrições específicas, como alocação de recursos.
- 3) Identificar as principais métricas utilizadas na seleção de FIs, como retorno esperado, risco e correlação, e discutir sua importância na construção de uma carteira diversificada.
- 4) Apresentar um modelo de Programação Quadrática que leve em consideração as métricas identificadas, visando à minimização do risco da carteira e à busca de um retorno esperado mínimo.
- 5) Aplicar o modelo desenvolvido em um conjunto de dados reais de FIs, utilizando técnicas de análise quantitativa para obter resultados e compará-los com o índice do mercado - IFIX.
- 6) Avaliar os resultados obtidos, analisando a eficiência do modelo proposto e discutir possíveis limitações e direções futuras de pesquisa.

Ao alcançar esses objetivos, espera-se contribuir para a literatura acadêmica e fornecer subsídios práticos para profissionais de investimentos no processo de seleção de portfólios de FIs.

1.3 JUSTIFICATIVA

A seleção de Fundos de Investimentos Imobiliários (FIIS) para a composição de uma carteira é uma atividade fundamental para investidores e profissionais do mercado financeiro.

No entanto, a seleção de FIs para compor uma carteira não é uma tarefa trivial. Existem diversos fatores a serem considerados, como o retorno esperado, o risco associado a cada fundo, a correlação entre os FIs, a alocação de recursos e as restrições específicas de cada investidor.

A Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz fornece um embasamento teórico sólido para a seleção de ativos financeiros, levando em consideração tanto o retorno esperado quanto o risco associado a eles. No entanto, a aplicação prática dessa teoria envolve a solução de problemas de otimização de difícil resolução, considerando um grande número de ativos e restrições específicas.

Nesse contexto, a Programação Quadrática surge como uma ferramenta matemática poderosa para otimizar a seleção de ativos para composição de uma

carteira de FII's, levando em consideração as métricas relevantes e as restrições específicas de cada investidor. A aplicação da Programação Quadrática em conjunto com a Teoria Moderna de Portfólio pode fornecer uma abordagem sistemática e eficiente para a diversificação de FII's em uma carteira, buscando a minimização do risco e um retorno esperado mínimo.

Portanto, a justificativa deste trabalho está em fornecer uma contribuição prática para a área de investimentos e pesquisa operacional. A aplicação da Programação Quadrática na montagem de uma carteira de FII's pode auxiliar investidores e profissionais do mercado financeiro na tomada de decisões mais fundamentadas e objetivas, levando a uma alocação mais eficiente de recursos e à redução do risco associado aos investimentos em FII's.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Antes de prosseguir com a aplicação, é fundamental ter um entendimento sólido sobre o conceito de fundos de investimentos imobiliários, programação linear e quadrática e também da Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz.

2.1 FUNDOS DE INVESTIMENTOS IMOBILIÁRIOS

De acordo com SOLA (2014), os Fundos de Investimento Imobiliário (FIIs) foram introduzidos no mercado nacional em 1993, com base no sistema dos *Real Estate Investment Trust* (REITs) americanos. CASTELLO BRANCO (2003) relatam que os REITs surgiram após a Segunda Guerra Mundial com o objetivo de reunir recursos para financiar investimentos imobiliários em larga escala, em resposta à crescente demanda no pós-guerra.

LIMA JUNIOR (2011) explica que um REIT não é um fundo, mas sim uma sociedade que recebe incentivos fiscais e possui um portfólio de imóveis para geração de renda, desde que mantenha suas características de investimento e distribuição de renda para os investidores.

Segundo a Instrução CVM 472, de 31 de outubro de 2008, que dispõe sobre as normas gerais que regulamentam os Fundos de Investimentos Imobiliários, este pode ser definido como a comunhão de recursos captados por meio do sistema de distribuição de valores mobiliários e destinados à aplicação em empreendimentos imobiliários.

A principal finalidade dos FIIs é a aquisição, administração e exploração de empreendimentos imobiliários com o objetivo de gerar retorno financeiro aos investidores. Esses empreendimentos podem ser tanto imóveis físicos, como prédios comerciais, *shoppings centers*, galpões logísticos, hospitais, entre outros, quanto ativos financeiros relacionados ao setor imobiliário, como títulos de dívida e instrumentos securitizados.

No ano de 2012, foi estabelecido o Índice dos Fundos de Investimento Imobiliário (IFIX). O IFIX foi criado pela BM&F Bovespa e consiste em uma seleção dos FIIs com maior liquidez na Bolsa, com o propósito de servir como uma referência para a avaliação e análise do desempenho desses fundos. Esse indicador calcula a variação de preço das cotas e dos rendimentos distribuídos pelos FIIs negociados no

mercado acionário. Já o Índice de Fundos de Investimentos Imobiliários de Alta Liquidez (IFIX L) é um subconjunto do IFIX focado em filtrar apenas os fundos com maior liquidez dentro do Índice original.

Os FIs são regulamentados e fiscalizados pela Comissão de Valores Mobiliários (CVM) no Brasil. Eles são obrigados a cumprir uma série de requisitos e normas estabelecidas pela CVM, visando a proteção dos investidores e a transparência nas operações. Essas normas envolvem questões como divulgação de informações relevantes, elaboração de prospectos e relatórios periódicos, e adoção de boas práticas de governança corporativa.

Uma das características mais importantes dos FIs é a distribuição de rendimentos aos investidores. A maior parte dos fundos imobiliários é obrigada a distribuir, pelo menos, 95% do seu resultado operacional líquido semestralmente, geralmente na forma de dividendos. Esses rendimentos são provenientes dos aluguéis dos imóveis, juros de títulos imobiliários, venda de imóveis ou outros ganhos gerados pelo fundo.

Dentre outras características que popularizaram o ativo inclui-se a Diversificação, pois permite que os investidores diversifiquem seu portfólio ao investir em diferentes tipos de imóveis e regiões geográficas, reduzindo os riscos associados a um único ativo, acesso ao mercado imobiliário, possibilitando investidores de todos os tamanhos participarem do mercado imobiliário, mesmo sem um grande capital inicial, liquidez, pois as cotas dos fundos são negociadas na bolsa de valores, isenção de imposto de renda sobre os dividendos, na medida em que pessoas físicas são isentas de Imposto de Renda sobre os rendimentos distribuídos pelos fundos imobiliários, desde que o fundo possua, no mínimo, 100 cotista e suas cotas sejam negociadas exclusivamente em bolsa de valores ou mercado de balcão organizado.

2.2 PESQUISA OPERACIONAL APLICADA A PORTFÓLIOS

Segundo ARENALES *et al.* (2007), o termo Pesquisa Operacional é uma tradução direta do termo em inglês *Operational Research*. Em Portugal, é conhecido como *Investigação Operacional* e, nos países de língua hispânica, como *Investigación Operativa*. A origem desse termo está relacionada à invenção do radar na Inglaterra em 1934. Dois anos depois, o Ministério da Aviação britânico estabeleceu a Estação de Pesquisa Manor Bawdsey, em Suffolk, para estudar como a tecnologia do radar

poderia ser utilizada para interceptar aviões inimigos. O termo Pesquisa Operacional é atribuído a Albert Rowe, superintendente da estação, que, em 1938, coordenava equipes responsáveis por examinar a eficiência de técnicas operacionais resultantes de experimentos com radar.

Em 1941, foi criada a Seção de Pesquisa Operacional do Comando da Força Aérea de Combate, com equipes dedicadas a problemas operacionais relacionados à guerra, como manutenção e inspeção de aviões, seleção do tipo de aeronave para uma missão e melhoria da probabilidade de destruição de submarinos. Outros problemas incluíam controle de artilharia antiaérea e dimensionamento de comboios de frota. A análise científica sistemática do uso operacional de recursos militares foi iniciada durante a Segunda Guerra Mundial.

Após o término da guerra, a Pesquisa Operacional progrediu rapidamente no Reino Unido e nos Estados Unidos. Em 1947, foi estabelecido o projeto SCOOP (*Scientific Computation of Optimal Programs*) no Pentágono, com o objetivo de auxiliar nas decisões operacionais da Força Aérea dos Estados Unidos. O projeto contou com um grupo de pesquisa coordenado pelo economista Marshall Wood e pelo matemático George Dantzig. Durante esse projeto, Dantzig desenvolveu, formalizou e testou o método simplex para resolver problemas de programação linear (otimização linear). Esses desenvolvimentos foram baseados em trabalhos anteriores, notadamente do matemático russo Leonid Kantorovich. O termo "programação linear" foi sugerido a Dantzig pelo economista Tjalling Koopmans. Tanto Koopmans quanto Kantorovich receberam posteriormente o Prêmio Nobel de Economia em 1975 por suas contribuições à teoria da alocação ótima de recursos.

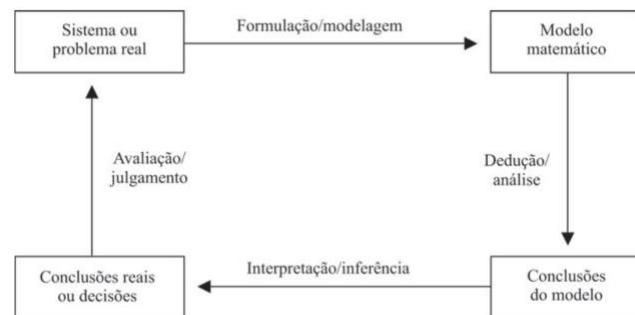
Em 1952, foi fundada a ORSA (*Operations Research Society of America*), uma sociedade científica americana de Pesquisa Operacional. No mesmo ano, surgiram a "*Operational Research Society*" (ORS) no Reino Unido e o "*The Institute of Management Sciences*" (TIMS) nos Estados Unidos. Em 1957, foi realizada a primeira conferência internacional de Pesquisa Operacional em Oxford, na Inglaterra. Nessa conferência, ficou evidente a diferença de enfoque entre os trabalhos apresentados pelos cientistas britânicos e americanos. Os trabalhos dos britânicos enfatizaram estudos de caso ou problemas específicos, enquanto os trabalhos dos americanos abordaram modelos e métodos matemáticos em diversas áreas, como teoria de estoques, substituição de equipamentos, teoria de filas, programação de tarefas em máquinas, teoria de jogos, fluxos em redes e otimização linear.

Segundo ARENALES *et al.* (2007), Pesquisa operacional é a aplicação de métodos científicos a problemas complexos para auxiliar no processo de tomada de decisões, tais como projetar, planejar e operar sistemas em situações que requerem alocações eficientes de recursos escassos.

Atualmente, há várias sociedades científicas em diferentes países que reúnem indivíduos e entidades interessados na teoria e prática da Pesquisa Operacional.

A Pesquisa Operacional, lida com problemas de tomada de decisão e utiliza modelos matemáticos para representar e imitar o problema real. Esses modelos envolvem a definição de variáveis (incógnitas) e o estabelecimento de relações matemáticas entre essas variáveis, a fim de descrever o comportamento do sistema em questão. O modelo matemático é resolvido, ou seja, são determinados valores para as incógnitas, gerando soluções que dependem dos dados do problema. O próximo passo é validar o modelo, ou seja, verificar se as soluções obtidas pela resolução do modelo matemático são compatíveis com a realidade em diferentes situações alternativas. Por exemplo, podem ser realizadas alterações nos dados do problema, como demandas, custos, entre outros. A validação do modelo é essencial para garantir a confiabilidade das soluções obtidas. No entanto, é importante destacar que a solução do modelo não substitui o papel dos tomadores de decisão. Embora as soluções proporcionadas pelo modelo auxiliem o processo de tomada de decisões, diversos outros fatores intangíveis e não quantificáveis também devem ser considerados na decisão final. Por exemplo, soluções que não levem em conta o comportamento humano podem falhar. Portanto, é fundamental combinar o uso de modelos matemáticos com o julgamento e a experiência dos tomadores de decisão. A FIGURA 1 demonstra o ciclo de modelagem, que inicia de um sistema ou problema real, é transformado em um modelo matemático, que é então validado teoricamente e posteriormente avaliado na prática. Uma vez aplicado, este modelo é avaliado e proporciona um maior entendimento sobre o problema real, possibilitando uma melhor representação em sua próxima versão.

FIGURA 1 – PROCESSO DE MODELAGEM



Fonte: ARENALES *et al.* (2007).

Uma das áreas dentro de Pesquisa Operacional é a da Programação Quadrática, que segundo DI SIERVO (2017), é uma extensão da Programação Linear, que busca minimizar uma função quadrática $f(x)$ sujeita a restrições lineares. Um problema de Programação Quadrática consiste em minimizar uma função quadrática sujeito a restrições lineares. Neste trabalho, o problema quadrático é formulado da seguinte maneira:

$$\min f(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + c^T x \text{ sujeito à } Ax \leq b \text{ e } x \geq 0 \quad (1)$$

onde G é uma matriz quadrada simétrica de ordem $n \times n$ e c é o vetor dos termos lineares da função objetivo. Quando $G = 0$, a função $f(x)$ se torna linear, mostrando que a Programação Linear é um caso particular da Programação Quadrática.

Na Programação Quadrática, apresentadas nesse texto, as restrições são definidas por uma matriz A de dimensões $m \times n$ e um vetor b com m componentes. As variáveis de decisão são representadas pelo vetor coluna x com n componentes. Seguindo a mesma estrutura da Programação Linear.

O problema de otimização de portfólio considerado nesta pesquisa segue a formulação original de Markowitz e baseia-se em um modelo de investimento de período único. No início de um período, um investidor aloca o capital entre vários títulos, atribuindo assim um peso não negativo (participação no capital) a cada título. Durante o período de investimento, um título gera uma taxa de retorno aleatória. Isso resulta em uma mudança no capital investido (observada no final do período), que é medida pela média ponderada das taxas de retorno individuais.

Conforme descrito por MANSINI *et al.* (2014), um modelo de problema de programação linear aplicado à Otimização de Portfólios pode ser descrito como: Seja

$J = \{1, 2, \dots, n\}$ um conjunto de títulos considerados para um investimento. Para cada título $j \in J$, sua taxa de retorno é representada por uma variável aleatória R_j com uma determinada média $\mu_j = \mathbb{E}\{R_j\}$. Além disso, seja $x = (x_j)_{j=1, \dots, n}$ um vetor de variáveis de decisão x_j que expressam o percentual de cada ativo dentro de um portfólio. Para representar um portfólio, os pesos devem satisfazer um conjunto de restrições. O conjunto básico de restrições é definido por uma exigência de que os pesos devem somar à um, ou seja, $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ e $x_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$. Um investidor geralmente precisa considerar alguns outros requisitos expressos como um conjunto de restrições adicionais. A maioria delas pode ser expressa como equações e desigualdades lineares. Supondo que o conjunto básico de portfólios Q é um conjunto viável de programação linear geral dado em uma forma canônica como um sistema de equações lineares com variáveis não negativas. Cada portfólio x define uma variável aleatória correspondente $R_x = \sum_{j=1}^n R_j x_j$ que representa uma taxa de retorno do portfólio. A taxa média de retorno do portfólio x é dada como: $\mu(x) = \mathbb{E}\{R_x\} = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j$.

Segundo MARKOWITZ (1952), o risco de um portfólio é medido pelo desvio padrão ou pela variância de cada ativo, com isso, o problema de otimização do portfólio é modelado como um problema de otimização de risco médio com dois critérios: $\max\{[\mu(x) - \varrho(x)]: x \in Q\}$. Em que a média $\mu(x)$ é maximizada e a medida de risco $\varrho(x)$ é minimizada. Um portfólio viável $x^0 \in Q$ é chamado de solução eficiente do problema ou portfólio eficiente μ/ϱ se não houver nenhum $x \in Q$ em que $\mu(x) \geq \mu(x^0)$ e $\varrho(x) \geq \varrho(x^0)$ com pelo menos uma desigualdade estrita.

2.3 MÉTODO GRADIENTE REDUZIDO GENERALIZADO (GRG)

O Método Gradiente Reduzido Generalizado (GRG), proposto por LASDON *et al.* (1978), é um dos métodos mais populares para resolver problemas de otimização não linear (CHAPRA; CANALE, 2009), exigindo apenas que a função objetivo seja diferenciável. Esse método desempenha um papel crucial na resolução de uma ampla gama de problemas em diversas áreas, como engenharia, economia e ciência. A principal ideia por trás do GRG é lidar com problemas não lineares que envolvem desigualdades ativas.

O processo começa com a separação das variáveis em dois grupos: as variáveis básicas (dependentes) e as variáveis não básicas (independentes). Isso é fundamental para determinar a direção na qual a pesquisa pela solução ótima deve progredir. Uma etapa crucial no método GRG é o cálculo do gradiente reduzido, que fornece informações sobre como a função objetivo está mudando em relação às variáveis não básicas.

A partir do gradiente reduzido, é possível determinar a direção de pesquisa que levará a uma diminuição na função objetivo. O algoritmo então ajusta as variáveis não básicas nessa direção para se aproximar da solução ótima. Esse processo é repetido iterativamente até que a convergência seja alcançada, ou seja, até que se obtenha uma solução que satisfaça as condições de parada predefinidas.

Segundo SACOMAN (2012), O GRG é amplamente utilizado em problemas complexos de otimização devido à sua eficiência e robustez. Sua capacidade de tratar funções objetivos não lineares e desigualdades ativas torna-o uma ferramenta valiosa para resolver problemas do mundo real, contribuindo significativamente para a tomada de decisões embasadas em análises quantitativas e otimização de recursos, e é utilizada como um dos algoritmos dentro do módulo Solver do Excel, e será utilizado neste trabalho.

3 MATERIAL E MÉTODOS

De acordo com ROESCH (2007) a metodologia descreve o caminho pelo qual é possível alcançar os objetivos propostos. Portanto, nesta sessão será descrita a metodologia utilizada para o alcance dos objetivos propostos. A metodologia deve ser entendida como o conjunto detalhado e sequencial de métodos e técnicas científicas a serem executados ao longo da pesquisa, de tal modo que se consiga atingir os objetivos inicialmente propostos e, ao mesmo tempo, atender aos critérios de maior rapidez, maior eficácia e mais confiabilidade de informação (BARRETO; HONORATO, 1998).

3.1 TIPO DE PESQUISA

Este trabalho adota uma abordagem de pesquisa aplicada com base em técnicas de investimentos e pesquisa operacional. Essa abordagem visa fornecer uma contribuição prática e relevante para profissionais do mercado financeiro, investidores e pesquisadores interessados na diversificação de FII's.

Além disso, esse trabalho incorpora elementos de pesquisa quantitativa, que nesse contexto, serão coletados dados históricos de preços, retornos e outras informações relevantes sobre os FII's, que serão utilizados na formulação do modelo de Programação Quadrática e na análise dos resultados obtidos.

A pesquisa será realizada por meio de uma análise detalhada das métricas e conceitos relevantes da Teoria Moderna de Portfólio, da Programação Quadrática e do mercado de Fundos de Investimentos Imobiliários. Serão coletados dados empíricos e aplicados a técnica de Programação Quadrática para a seleção dos FII's. A pesquisa utilizará metodologias estatísticas e ferramentas de análise de dados para analisar os resultados e avaliar a eficiência do modelo proposto conforme metodologia abordada por DI SIERVO (2017).

3.2 FONTES DE DADOS

A primeira fonte de dados utilizada é o Índice de Fundos de Investimentos Imobiliários de Alta Liquidez (IFIX L) da B3, a bolsa de valores brasileira. Esse índice é uma variação do IFIX, porém composto pelos 68 FII's com maior liquidez, conforme

os critérios estabelecidos pela B3. A utilização do índice como base para a seleção dos ativos proporciona uma abordagem abrangente e representativa do mercado de FII's, uma vez que considera a liquidez como um fator importante na escolha dos fundos, reduzindo riscos exteriores aos mencionados no escopo do projeto.

A segunda fonte de dados utilizada consiste em duas APIs (*Application Programming Interfaces*): *Alpha Vantage* e *Funds Explorer*. Essas APIs são plataformas que fornecem acesso a dados financeiros e informações sobre diversos ativos, incluindo os FII's. Por meio dessas APIs, foi possível obter os dados de rentabilidade e demais informações relevantes de cada um dos FII's selecionados.

Os dados coletados abrangem um período de dois anos, de julho de 2021 a dezembro de 2023, e são fornecidos em uma periodicidade mensal. A escolha desse intervalo de tempo permite uma análise adequada do desempenho dos FII's ao longo do período estudado, proporcionando uma visão abrangente das tendências e volatilidades observadas.

3.3 IDENTIFICAÇÃO DAS MÉTRICAS RELEVANTES

A primeira métrica relevante a ser considerada é o retorno esperado para cada ativo. Esse retorno esperado será calculado levando-se em conta uma distribuição igualitária entre os ativos da carteira. Ao determinar o retorno esperado para cada ativo, busca-se compreender o potencial de ganho de cada um deles, permitindo uma análise mais precisa e informada na seleção dos FII's.

Outra métrica importante é a matriz de covariância entre os pares de ativos. A matriz de covariância é uma ferramenta estatística que mede a relação entre as variações de diferentes ativos em relação aos seus retornos. Essa métrica permite avaliar a interdependência e o grau de correlação entre os ativos, o que é crucial para a construção de uma carteira diversificada e equilibrada.

Além disso, serão avaliados o retorno esperado da carteira e o risco da carteira como métricas-chave. O retorno esperado da carteira será calculado como a média ponderada dos retornos esperados de cada ativo, levando em consideração as proporções de alocação definidas. Essa métrica permite estimar o retorno médio que se espera obter com a carteira de FII's.

O risco da carteira será analisado considerando a matriz de covariância dos ativos. Essa métrica mede a volatilidade ou a variabilidade dos retornos da carteira,

levando em conta as interações e as relações de risco entre os ativos. É fundamental avaliar o risco da carteira para garantir uma gestão adequada do portfólio e mitigar possíveis perdas.

Além das métricas mencionadas, será utilizado como referência o retorno médio esperado do IFIX L. Esse indicador proporciona uma base de comparação para avaliar o desempenho dos FIs selecionados em relação ao mercado como um todo.

3.4 DESENVOLVIMENTO DO MODELO DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA

Para o problema quadrático descrito, é possível definir as seguintes equações:

Função Objetivo

$$\min \sum_i \sum_j (x_i \times x_j \times Cov(i,j)) \quad (2)$$

Restrições

$$\begin{aligned} \sum_i (x_i \times re_i) &\geq rem \\ x_i &\geq 0, \quad \forall_i \\ \sum_i x_i &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Nesse problema, $Cov(i,j)$ representa a covariância entre os ativos i e j , re_i é o retorno esperado para o ativo i e rem representa o retorno esperado médio na carteira, que neste trabalho será a média do índice IFIX L.

A Equação (2) representa a função objetivo de minimizar a variância da carteira, considerando as participações nos ativos e suas respectivas covariâncias. As restrições, conforme Equação (3), garantem que a soma total das participações seja igual a 100%, o retorno esperado da carteira seja maior ou igual ao retorno esperado mínimo desejado e que as participações sejam não negativas, respectivamente.

As variáveis de decisão, que neste caso são representadas por x determinam a quantidade à ser investida em cada um dos 65 ativos e a função objetivo será um

somatório da multiplicação destas quantidades pela covariância entre eles, sendo esta uma matriz 65×65 .

O problema consiste em encontrar os valores ótimos para as participações x_i que minimizam a variância da carteira, sujeito às restrições representadas nas equações (3). A solução desse problema fornecerá a composição ideal da carteira de FIs que busca a diversificação e a minimização do risco enquanto busca atingir o retorno esperado mínimo.

3.5 APLICAÇÃO DO MODELO E ANÁLISE DE RESULTADO

Para realizar os cálculos de variância, covariância e retorno esperado, foram utilizados o Microsoft Excel. Que fornece recursos e funções necessárias para realizar os cálculos estatísticos requeridos.

Inicialmente, o retorno esperado para cada ativo foi calculado por meio da média aritmética ponderada, considerando uma distribuição igualitária de percentuais de investimento, uma vez que ainda não havia otimização. Os ponderadores correspondem aos percentuais de investimento em cada ativo, resultando na Equação 4.

$$re_i = \sum_{t=1}^n \left(\frac{r_i(t)}{n} \right) \quad (4)$$

Onde re_i é o retorno esperado para o ativo i , $r_i(t)$ é o retorno histórico do ativo i no período t e n é o número de períodos.

Além disso, a matriz de covariância foi calculada utilizando o módulo de análise de dados do Microsoft Excel. Foi aplicada a equação 5 para obter os valores corretos da covariância entre os pares de ativos.

$$Cov(i, j) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_i(t) - re_i) \times (r_j(t) - re_j) \quad (5)$$

Onde $Cov(i, j)$ é a covariância entre os ativos i e j , $r_i(t)$ é o retorno histórico do ativo i no período t , re_i é o retorno esperado para o ativo i , $r_j(t)$ é o retorno histórico do ativo j no período t , re_j é o retorno esperado para o ativo j e n e o número de períodos considerados.

Essa abordagem de utilização de *software* e programação permitiu uma análise precisa e eficiente, facilitando o processamento dos cálculos estatísticos envolvidos na seleção e otimização da carteira de fundos de investimentos imobiliários. O Microsoft Excel é um recurso comumente empregado em estudos de investimentos e pesquisa operacional, proporcionando uma análise mais robusta e confiável dos dados.

4 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

O desenvolvimento envolveu a coleta de ativos, dados de preço e *yield* por ação usando Python. Em seguida, no Microsoft Excel, após a compilação e organização dos dados, foram criadas a matriz de covariância e a execução do método não linear *GRG* para determinar o portfólio ótimo. Além disso, foi calculado o portfólio teórico, servindo como referência para o índice IFIX L

4.1 COMPILAÇÃO DOS DADOS

Para identificar os ativos a serem utilizados, foi feito o *download* de um arquivo CSV do site da B3 na seção de “Índice de Fundos de Investimentos Imobiliários de Alta Liquidez”. Esse arquivo continha os códigos de 67 ativos e suas respectivas composições percentuais em relação ao dia 07/08/2023, conforme apresentado na Tabela 1.

TABELA 1 – COMPOSIÇÃO DA CARTEIRA IFIX-L 07/08/2023

Ticker	Ação	Tipo	Qtde. teórica	Part. (%)
ALZR11	FII ALIANZA	CI ER	9.860.406	1,070
RZAT11	FII ARCTIUM	CI ER	3.708.168	0,301
BCFF11	FII BC FFII	CI	25.186.378	1,672
BRCR11	FII BC FUND	CI	26.638.202	1,381
BRCO11	FII BRESKO	CI	14.778.781	1,715
BTAL11	FII BTG AGRO	CI ER	5.982.736	0,475
BTCI11	FII BTG CRI	CI	99.521.172	0,922
BTLG11	FII BTLG	CI ER	27.007.486	2,551
CPTS11	FII CAPI SEC	CI ER	317.828.140	2,376
HGCR11	FII CSHG CRI	CI	15.418.106	1,535
HGFF11	FII CSHG FOF	CI	2.863.597	0,229
HGLG11	FII CSHG LOG	CI	33.787.575	5,062
HGRU11	FII CSHG URB	CI	18.406.458	2,246
DEVA11	FII DEVANT	CI	14.044.908	0,558
VRTA11	FII FATOR VE	CI	15.592.424	1,294
GTWR11	FII G TOWERS	CI	12.000.000	0,910
GGRC11	FII GGRCOVEP	CI	9.866.575	1,057
GALG11	FII GUARDIAN	CI	57.485.300	0,503
HABT11	FII HABIT II	CI	8.126.783	0,697

Ticker	Ação	Tipo	Qtde. teórica	Part. (%)
HCTR11	FII HECTARE	CI	22.084.202	0,751
HGBS11	FII HEDGEBS	CI	12.250.000	2,637
HGRE11	FII HG REAL	CI	11.817.767	1,407
HSML11	FII HSI MALL	CI	15.780.613	1,377
HFOF11	FII HTOPFOF3	CI	23.027.000	1,635
IRDM11	FII IRIDIUM	CI ER	36.433.827	2,693
JSRE11	FII JS REAL	CI	20.767.328	1,389
KISU11	FII KILIMA	CI	44.196.050	0,345
KNRI11	FII KINEA	CI	24.157.121	3,610
KNHY11	FII KINEA HY	CI	18.490.843	1,778
KNIP11	FII KINEA IP	CI	80.078.186	7,015
KNCR11	FII KINEA RI	CI	57.097.087	5,464
KNSC11	FII KINEA SC	CI	13.275.794	1,111
KFOF11	FII KINEAFOF	CI	4.533.315	0,417
MALL11	FII MALLS BP	CI	9.124.659	0,993
MCCI11	FII MAUA	CI ER	16.960.024	1,499
MCHF11	FII MAUA HF	CI ER	32.354.247	0,273
MXRF11	FII MAXI REN	CI	259.279.007	2,683
MGFF11	FII MOGNO	CI	9.050.620	0,544
RBRY11	FII RBR PCRI	CI ER	9.656.112	0,916
RBRP11	FII RBR PROP	CI	12.179.186	0,598
RBRF11	FII RBRALPHA	CI ER	13.680.770	1,001
RBRR11	FII RBRHGRAD	CI ER	13.438.908	1,111
RECR11	FII REC RECE	CI	26.441.650	2,129
RBVA11	FII RIOB VA	CI	14.362.893	1,513
RZAK11	FII RIZA AKN	CI ER	8.807.885	0,768
RZTR11	FII RIZA TX	CI	11.048.018	1,047
SARE11	FII SANT REN	CI	9.234.329	0,417
TRBL11	FII SDI LOG	CI	6.395.050	0,590
TGAR11	FII TG ATIVO	CI ES	18.146.741	2,075
TVRI11	FII TIVIO RI	CI	15.919.690	1,390
TRXF11	FII TRX REAL	CI	16.635.335	1,693
URPR11	FII URCA REN	CI	11.675.248	0,991
VGHF11	FII VALOR HE	CI	94.187.891	0,846
VGIP11	FII VALORAIP	CI ER	11.787.247	0,985
VGIR11	FII VALREIII	CI ER	103.220.707	0,946
CVBI11	FII VBI CRI	CI	11.010.228	0,948
LVBI11	FII VBI LOG	CI	15.704.704	1,750

Ticker	Ação	Tipo	Qtde. teórica	Part. (%)
PVBI11	FII VBI PRI	CI	12.142.208	1,216
VCJR11	FII VECTIS	CI	14.723.970	1,268
VSLH11	FII VERS CRI	CI	29.864.091	0,092
VILG11	FII VINCI LG	CI	14.997.396	1,441
VINO11	FII VINCI OF	CI	82.826.295	0,638
VISC11	FII VINCI SC	CI	21.243.688	2,354
XPCI11	FII XP CRED	CI	8.701.552	0,722
XPLG11	FII XP LOG	CI	27.101.061	2,812
XPML11	FII XP MALLS	CI ER	30.822.213	3,239
XPSF11	FII XP SELEC	CI	43.302.140	0,329

Fonte: B3 (2023).

Após obter os códigos de cada um dos 67 ativos, foi utilizado a API *Alpha Vantage* para coletar os preços de fechamento mensais de cada ativo desde o início de sua listagem na bolsa brasileira. A partir disto, filtrou-se apenas os ativos que apresentaram preços de fechamento entre junho de 2021 e julho de 2023, resultando em 65 ativos finais.

Dado que os dividendos dos FIIs são um componente essencial para o cálculo da rentabilidade real, recorreu-se à API da *Funds Explorer* para encontrar as datas e os rendimentos por ativo de cada um dos fundos. Com essas informações em mãos, calcula-se o rendimento acumulado para cada ativo em cada período, adicionando-o ao valor de fechamento do mês correspondente. Posteriormente, foi realizado o cálculo de rentabilidade percentual, resultando na Tabela 2.

TABELA 2 – RENTABILIDADE PERCENTUAL DOS ATIVOS

Ticker	7/21	8/21	9/21	10/21	11/21	12/21	1/22	2/22	3/22	4/22	5/22	6/22	7/22	8/22	9/22	10/22	11/22	12/22	1/23	2/23	3/23	4/23	5/23	6/23	7/23
ALZR11	0%	-3%	-1%	-3%	-5%	9%	2%	-2%	2%	3%	0%	2%	-2%	4%	4%	1%	-1%	-3%	1%	1%	1%	4%	-4%	4%	0%
RZAT11	0%	-1%	-1%	3%	1%	6%	4%	2%	0%	0%	1%	3%	-2%	-2%	1%	0%	-7%	-1%	-3%	2%	1%	2%	7%	2%	-3%
BBPO11	0%	2%	-14%	-7%	-2%	9%	0%	-3%	-1%	-3%	-1%	-3%	1%	11%	3%	2%	-2%	-3%	2%	-3%	2%	3%	6%	6%	1%
BCFF11	0%	-6%	0%	-7%	-4%	9%	3%	-5%	-1%	1%	-1%	-3%	6%	7%	1%	-2%	-3%	1%	-3%	-1%	1%	9%	0%	6%	1%
BRCR11	0%	-3%	-5%	-8%	-4%	14%	-1%	-2%	-1%	4%	-2%	-7%	-7%	22%	0%	-4%	-11%	2%	-2%	-6%	1%	6%	5%	12%	2%
BRCO11	0%	-3%	-3%	-2%	-9%	20%	-4%	3%	0%	3%	-1%	-1%	2%	9%	0%	2%	-8%	-1%	-1%	-2%	1%	9%	10%	4%	4%
BTAL11	0%	-4%	1%	-2%	-3%	12%	-3%	0%	5%	0%	2%	-3%	-3%	9%	1%	-1%	-7%	6%	-3%	-4%	0%	5%	-1%	3%	3%
BTCI11	0%	-2%	-3%	-1%	-4%	10%	-2%	0%	4%	1%	-1%	-3%	1%	-2%	3%	-2%	-4%	-3%	-87%	0%	2%	2%	2%	0%	3%
BTLG11	0%	-3%	1%	-2%	-2%	7%	-1%	-1%	1%	0%	0%	-1%	1%	4%	0%	0%	-3%	3%	-4%	-1%	3%	2%	3%	4%	4%
CPTS11	0%	1%	1%	1%	-1%	1%	2%	0%	1%	1%	0%	-2%	-2%	2%	3%	0%	-6%	-1%	-4%	2%	-2%	0%	7%	5%	1%
HGCR11	0%	0%	4%	0%	-2%	4%	3%	-2%	3%	0%	1%	1%	-1%	2%	2%	0%	0%	1%	1%	0%	2%	1%	1%	1%	2%
HGLG11	0%	-2%	2%	2%	-3%	7%	1%	-1%	-1%	1%	1%	0%	4%	3%	0%	-3%	0%	0%	0%	0%	0%	2%	-1%	5%	-1%
HGRU11	0%	-2%	-2%	0%	-3%	10%	-2%	-1%	0%	4%	3%	1%	2%	7%	2%	-1%	-4%	2%	-1%	-3%	1%	6%	2%	5%	1%
DEVA11	0%	2%	0%	1%	-3%	7%	0%	0%	-1%	0%	2%	2%	1%	-1%	-2%	-3%	-5%	3%	2%	-1%	-26%	-9%	25%	-4%	-6%
VRTA11	0%	-3%	2%	0%	-4%	4%	1%	1%	1%	-1%	-1%	-1%	-1%	0%	2%	1%	-2%	-2%	-1%	3%	-3%	0%	6%	3%	2%
GTWR11	0%	-5%	-4%	-13%	-7%	24%	-5%	-3%	3%	-6%	-4%	-1%	1%	16%	0%	3%	-5%	2%	-5%	1%	1%	7%	1%	1%	4%
GGRC11	0%	-3%	-1%	-3%	-6%	8%	4%	-9%	3%	3%	0%	1%	-2%	13%	1%	2%	-2%	-1%	-8%	0%	-2%	13%	3%	7%	-1%
HABT11	0%	-2%	-7%	4%	-4%	1%	1%	-1%	1%	-2%	1%	0%	-1%	-1%	-2%	3%	-6%	1%	2%	-2%	0%	0%	8%	5%	0%
HCTR11	0%	-3%	-1%	3%	-2%	7%	1%	-1%	-3%	-7%	7%	1%	1%	-3%	-4%	1%	0%	1%	0%	-8%	-24%	-10%	19%	-6%	-3%
HGBS11	0%	-5%	-3%	-1%	-11%	21%	-12%	1%	8%	-1%	2%	-3%	6%	17%	1%	-3%	-7%	0%	-2%	0%	1%	8%	5%	5%	4%

Ticker	7/21	8/21	9/21	10/21	11/21	12/21	1/22	2/22	3/22	4/22	5/22	6/22	7/22	8/22	9/22	10/22	11/22	12/22	1/23	2/23	3/23	4/23	5/23	6/23	7/23
HGRE11	0%	-4%	-1%	-3%	-4%	14%	-1%	-1%	-2%	2%	3%	0%	-4%	15%	1%	-2%	-8%	-2%	-6%	1%	-1%	12%	5%	7%	1%
HSML11	0%	-6%	-1%	-3%	-8%	17%	-6%	2%	6%	0%	0%	-2%	1%	16%	4%	-3%	-9%	1%	-1%	-1%	2%	7%	3%	6%	2%
HFOF11	0%	-5%	-2%	-3%	-4%	5%	-3%	-2%	-1%	1%	-2%	-3%	1%	10%	4%	1%	-9%	-1%	-3%	-1%	0%	3%	7%	9%	2%
IRDM11	0%	1%	-5%	0%	-5%	7%	1%	1%	2%	-1%	-1%	-1%	2%	0%	2%	-2%	-4%	-2%	0%	-1%	-8%	-1%	7%	4%	-1%
JSRE11	0%	-8%	0%	-8%	-4%	18%	-2%	-3%	-4%	6%	1%	-2%	1%	14%	1%	-1%	-14%	1%	-10%	5%	-7%	9%	10%	6%	1%
KISU11	0%	-9%	-3%	-9%	0%	8%	0%	-4%	-1%	2%	-1%	3%	5%	5%	2%	1%	-2%	0%	1%	-1%	-1%	2%	3%	5%	4%
KNRI11	0%	2%	4%	-7%	-5%	11%	-5%	0%	4%	0%	-2%	0%	4%	12%	0%	-2%	-2%	-2%	0%	-1%	1%	6%	4%	5%	2%
KNHY11	0%	2%	1%	-2%	2%	5%	-1%	-1%	1%	0%	3%	1%	-4%	1%	0%	1%	0%	2%	-1%	3%	2%	1%	2%	0%	1%
KNIP11	0%	0%	-2%	0%	1%	4%	0%	0%	0%	2%	2%	0%	-2%	-3%	-1%	4%	-3%	1%	-1%	1%	2%	1%	4%	-1%	-1%
KNCR11	0%	3%	3%	1%	2%	4%	1%	-1%	2%	2%	1%	0%	1%	2%	1%	0%	0%	0%	1%	1%	0%	0%	-1%	3%	2%
KNSC11	0%	-3%	3%	2%	-2%	5%	-1%	-1%	3%	-1%	1%	1%	-2%	-5%	1%	3%	-2%	1%	2%	0%	0%	1%	6%	-1%	1%
MALL11	0%	-1%	-3%	-2%	-8%	15%	3%	1%	3%	1%	0%	1%	1%	8%	1%	1%	-2%	-2%	0%	-3%	1%	5%	5%	7%	-1%
MCCI11	0%	1%	0%	-1%	2%	3%	-1%	0%	0%	2%	-1%	1%	1%	1%	1%	-1%	1%	-5%	0%	-1%	2%	1%	5%	3%	1%
MXRF11	0%	-1%	2%	0%	0%	1%	-6%	0%	1%	8%	1%	-1%	2%	5%	1%	1%	0%	0%	1%	2%	2%	3%	2%	2%	0%
MGFF11	0%	-6%	-3%	-3%	-6%	13%	-6%	-1%	2%	1%	-1%	-4%	3%	12%	-2%	2%	-9%	1%	-4%	-2%	2%	7%	3%	7%	6%
PATL11	0%	-8%	-2%	-7%	-3%	18%	0%	5%	-3%	3%	1%	0%	-4%	7%	7%	-3%	-8%	-2%	-2%	-6%	2%	3%	2%	13%	-2%
RBRY11	0%	-1%	3%	1%	0%	5%	1%	1%	1%	1%	1%	-2%	3%	1%	-2%	1%	-2%	3%	-2%	0%	3%	-2%	6%	1%	4%
RBRP11	0%	-1%	-6%	-2%	-3%	12%	-8%	-6%	-2%	5%	-8%	-6%	-9%	19%	-1%	-4%	-8%	-1%	-4%	-5%	-2%	11%	6%	10%	4%
RBRF11	0%	-1%	-5%	-2%	-5%	16%	-8%	0%	2%	5%	-3%	-4%	2%	12%	0%	0%	-6%	0%	-2%	-2%	-1%	7%	7%	9%	5%
RBRR11	0%	0%	0%	2%	-3%	6%	4%	-1%	3%	0%	2%	0%	-1%	-1%	-4%	1%	-1%	-4%	0%	4%	1%	4%	2%	2%	1%
RECR11	0%	1%	-3%	-1%	-1%	4%	4%	-2%	3%	0%	2%	1%	-2%	-2%	-3%	1%	-3%	3%	0%	-1%	-6%	7%	5%	3%	0%

Ticker	7/21	8/21	9/21	10/21	11/21	12/21	1/22	2/22	3/22	4/22	5/22	6/22	7/22	8/22	9/22	10/22	11/22	12/22	1/23	2/23	3/23	4/23	5/23	6/23	7/23
RBVA11	0%	-2%	-2%	-5%	-2%	5%	-2%	-4%	6%	0%	-5%	-1%	1%	9%	-1%	1%	-3%	0%	3%	-1%	0%	4%	5%	7%	3%
RZAK11	0%	-6%	-6%	2%	-2%	14%	0%	-2%	7%	2%	4%	0%	3%	2%	4%	1%	-2%	0%	3%	1%	-2%	-1%	2%	1%	1%
RZTR11	0%	3%	4%	-2%	1%	6%	3%	-1%	2%	3%	0%	-1%	2%	3%	2%	0%	-1%	-1%	-7%	-5%	0%	2%	6%	2%	3%
SARE11	0%	-6%	-10%	0%	-18%	15%	3%	-3%	2%	9%	-3%	-7%	5%	13%	-5%	4%	-9%	0%	-9%	2%	-6%	5%	12%	-2%	-4%
TGAR11	0%	-2%	1%	-2%	-6%	6%	2%	-7%	5%	3%	0%	-1%	5%	5%	1%	1%	-2%	1%	-1%	-3%	1%	0%	7%	1%	2%
TORD11	0%	-2%	4%	6%	-7%	-1%	0%	-4%	-1%	2%	2%	-3%	1%	-6%	1%	0%	-6%	0%	-20%	1%	-18%	-12%	11%	-5%	-11%
TRXF11	0%	0%	0%	-1%	-1%	4%	1%	1%	0%	0%	0%	0%	5%	7%	5%	-4%	-3%	1%	1%	0%	0%	3%	0%	6%	2%
URPR11	0%	-2%	5%	-1%	-11%	11%	5%	-1%	2%	-7%	5%	2%	-1%	-3%	1%	1%	-1%	2%	1%	-1%	-3%	0%	4%	2%	3%
VGHF11	0%	3%	2%	-1%	2%	2%	4%	2%	3%	-1%	-2%	3%	1%	1%	1%	-2%	-3%	3%	-1%	1%	0%	0%	5%	2%	2%
VGIP11	0%	0%	-1%	1%	-1%	6%	0%	1%	1%	1%	2%	0%	0%	-4%	0%	0%	-2%	0%	1%	-2%	-3%	5%	5%	3%	-1%
VGIR11	0%	2%	1%	2%	-3%	4%	1%	0%	1%	1%	-3%	0%	3%	0%	-89%	0%	1%	1%	-1%	2%	-3%	1%	-1%	4%	2%
CVBI11	0%	0%	0%	1%	-2%	5%	0%	0%	3%	-1%	2%	0%	0%	-4%	-1%	1%	-1%	-1%	3%	2%	1%	-1%	2%	2%	3%
LVBI11	0%	-2%	0%	-3%	-10%	19%	-2%	0%	2%	0%	3%	-3%	2%	13%	3%	-4%	-6%	1%	-5%	-2%	1%	8%	4%	10%	0%
PVBI11	0%	-1%	-8%	3%	-4%	13%	-6%	0%	4%	4%	2%	-3%	1%	7%	1%	-2%	-4%	4%	-8%	1%	4%	7%	-2%	6%	4%
VCJR11	0%	-1%	2%	2%	2%	4%	1%	1%	0%	3%	1%	4%	-5%	-2%	0%	3%	-2%	0%	1%	-1%	0%	0%	6%	0%	2%
VSLH11	0%	0%	1%	3%	0%	-2%	1%	0%	1%	-1%	0%	0%	3%	-3%	3%	0%	1%	1%	-18%	14%	-22%	-17%	15%	-6%	-7%
VILG11	0%	-7%	0%	-4%	-12%	20%	-2%	1%	-2%	2%	-1%	-3%	0%	14%	3%	0%	-7%	0%	-5%	-6%	2%	6%	4%	12%	0%
VINO11	0%	-1%	2%	0%	-8%	2%	-9%	-8%	6%	2%	-4%	-10%	0%	14%	-1%	1%	-5%	-1%	-8%	-3%	-6%	8%	4%	5%	0%
VISC11	0%	-8%	1%	-2%	-4%	9%	-1%	-1%	1%	4%	-1%	0%	1%	11%	0%	2%	-6%	2%	1%	-2%	0%	6%	9%	2%	1%
XPCI11	0%	0%	-2%	1%	-5%	7%	1%	-1%	3%	1%	-1%	1%	0%	2%	-6%	3%	-5%	-2%	-2%	2%	4%	-2%	5%	5%	0%
XPLG11	0%	-3%	-2%	-3%	-7%	13%	-3%	-6%	7%	1%	-2%	-1%	5%	11%	2%	-1%	-5%	-1%	-7%	3%	1%	6%	6%	7%	1%

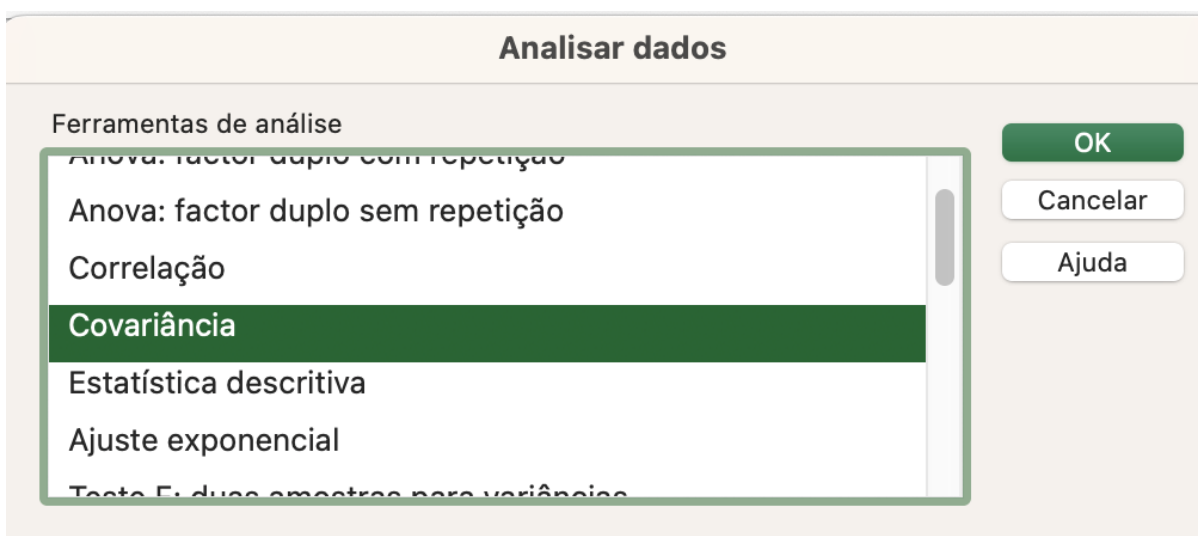
Ticker	7/21	8/21	9/21	10/21	11/21	12/21	1/22	2/22	3/22	4/22	5/22	6/22	7/22	8/22	9/22	10/22	11/22	12/22	1/23	2/23	3/23	4/23	5/23	6/23	7/23
XPML11	0%	1%	-6%	4%	-9%	11%	-1%	-6%	5%	4%	0%	-3%	2%	10%	-1%	1%	-4%	-2%	2%	3%	-2%	8%	-1%	4%	1%
XPPR11	0%	-1%	-3%	-3%	-7%	14%	-5%	-6%	1%	0%	-6%	-6%	-6%	7%	-7%	-8%	-11%	-8%	2%	-5%	-11%	-8%	1%	-1%	-2%
XPSF11	0%	-10%	-3%	-4%	-10%	16%	-4%	-8%	-3%	5%	7%	0%	3%	9%	-2%	2%	-3%	3%	-3%	-2%	1%	1%	5%	7%	5%

Fonte: O autor (2023).

4.2 MONTAGEM DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA

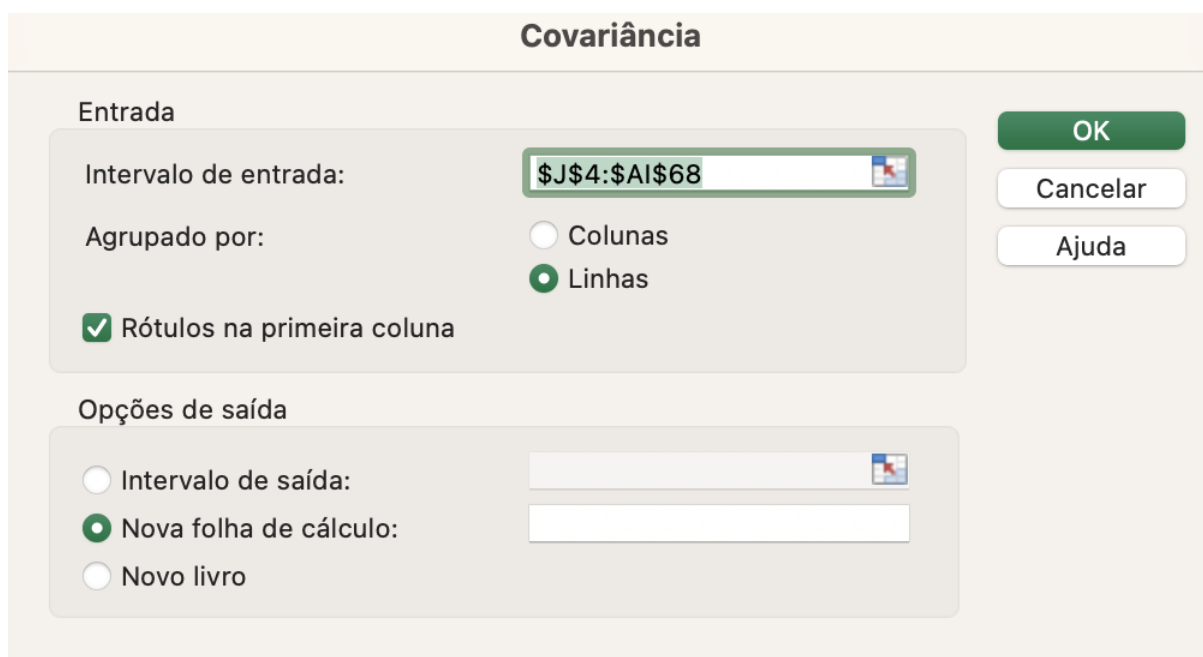
Uma vez calculada a rentabilidade, o módulo de Ferramentas de Análise do Microsoft Excel foi utilizado para gerar uma matriz de 65×65 contendo a covariância entre os preços de cada um dos ativos. As Figuras 2 e 3 apresentam o processo de geração dos dados.

FIGURA 2 – ESCOLHA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA COMO FERRAMENTE DE ANÁLISE



Fonte: O autor (2023).

FIGURA 3 – SELEÇÃO DAS CÉLULAS DO EXCEL ONDE SE ENCONTRAM OS PREÇOS DE CADA ATIVO



Fonte: O autor (2023).

4.3 MONTAGEM DA FUNÇÃO OBJETIVO

Finalizado a matriz de covariância, foi necessário modelar a função objetivo, que busca minimizar o somatório da variância total resultante de todos os ativos ponderados pela sua participação percentual na carteira. A variância total resultante, descrita na Equação (2), é obtida por meio da multiplicação de cada elemento obtido na Seção 4.2 pelo percentual correspondente de cada um dos ativos. A soma da linha da tabela corresponderá ao impacto total de cada ativo na carteira.

4.4 EXECUÇÃO DO ALGORITMO NÃO LINEAR GRG

Com os dados preparados, no solver do Excel, iniciou-se com a aplicação das porcentagens utilizadas nos fundos. Como alguns ativos foram filtrados do estudo, dividiu-se igualmente a participação de cada um deles entre os demais ativos.

A Tabela 3 representa os resultados obtidos da carteira IFIX L, contendo W_i , que representa o percentual de cada ativo, $R(e)$, a rentabilidade total do ativo e V , a variância média total do ativo no portfólio. Como resultado, a rentabilidade foi de 8,115%, com uma variância de 0,0678%.

TABELA 3 – RESULTADOS OBTIDOS DA CARTEIRA IFIX L

Ativo	W_i	$R(e)$	V
ALZR11	0,011664	0,166%	0,0004%
RZAT11	0,008644	0,143%	0,0004%
BBPO11	0,011664	0,060%	0,0007%
BCFF11	0,011664	0,090%	0,0008%
BRCR11	0,014774	-0,026%	0,0018%
BRCO11	0,011664	0,339%	0,0014%
BTAL11	0,005714	0,074%	0,0004%
BTCI11	0,010184	-0,883%	0,0037%
BTLG11	0,026474	0,333%	0,0015%
CPTS11	0,024724	0,228%	0,0013%
HGCR11	0,027334	0,693%	0,0004%
HGLG11	0,027334	0,440%	0,0007%
HGRU11	0,015034	0,427%	0,0009%
DEVA11	0,024724	-0,521%	0,0024%
VRTA11	0,024504	0,150%	0,0010%
GTWR11	0,005994	0,009%	0,0008%
GGRC11	0,011534	0,187%	0,0012%
HABT11	0,007934	-0,016%	0,0002%
HCTR11	0,008474	-0,282%	0,0006%

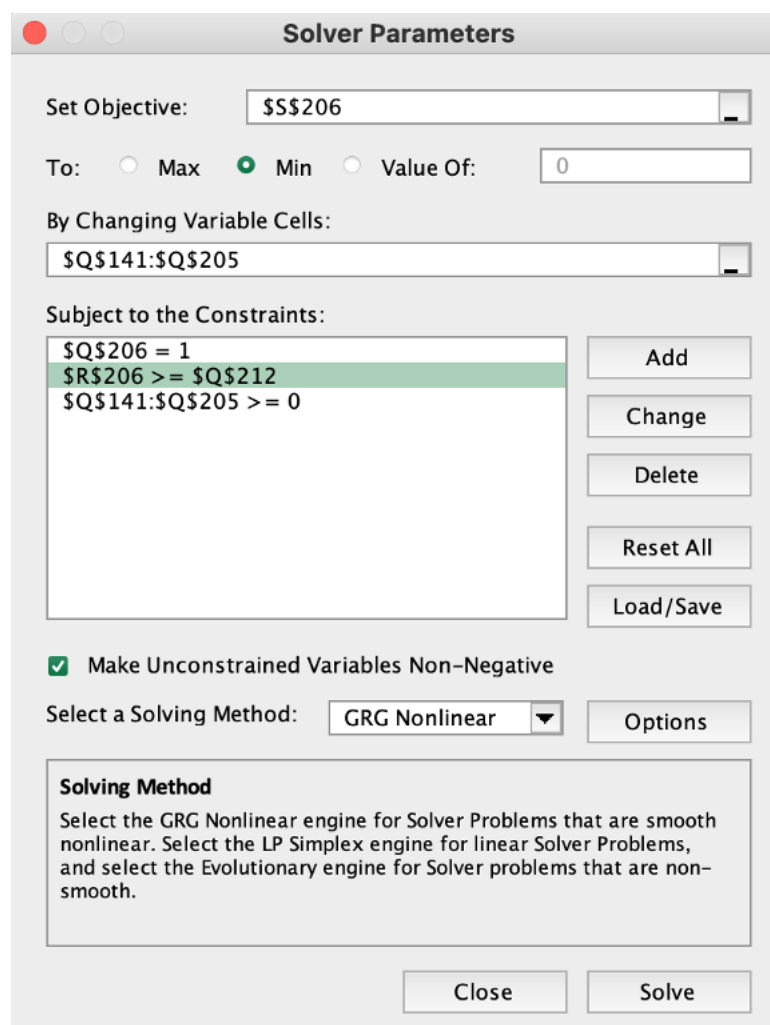
Ativo	Wi	R(e)	V
HGBS11	0,027334	0,773%	0,0037%
HGRE11	0,015034	0,259%	0,0018%
HSML11	0,014734	0,396%	0,0017%
HFOF11	0,008474	0,015%	0,0007%
IRDM11	0,027894	-0,103%	0,0016%
JSRE11	0,014854	0,049%	0,0026%
KISU11	0,004414	0,041%	0,0002%
KNRI11	0,055604	1,699%	0,0039%
KNHY11	0,018744	0,345%	0,0004%
KNIP11	0,055604	0,476%	0,0012%
KNCR11	0,004414	0,139%	0,0000%
KNSC11	0,012074	0,134%	0,0002%
MALL11	0,010894	0,376%	0,0009%
MCCI11	0,015954	0,216%	0,0003%
MXRF11	0,006404	0,186%	0,0001%
MGFF11	0,006404	0,048%	0,0007%
PATL11	0,006404	0,047%	0,0006%
RBRY11	0,012074	0,332%	0,0004%
RBRP11	0,006944	-0,096%	0,0008%
RBRF11	0,006404	0,138%	0,0007%
RBRR11	0,012074	0,193%	0,0003%
RECR11	0,016094	0,128%	0,0006%
RBVA11	0,016094	0,274%	0,0007%
RZAK11	0,008644	0,225%	0,0004%
RZTR11	0,011434	0,287%	0,0007%
SARE11	0,005134	-0,092%	0,0009%
TGAR11	0,005134	0,089%	0,0003%
TORD11	0,005134	-0,270%	0,0006%
TRXF11	0,017894	0,530%	0,0005%
URPR11	0,010874	0,121%	0,0005%
VGHF11	0,013644	0,377%	0,0003%
VGIP11	0,013644	0,166%	0,0004%
VGIR11	0,013644	-1,183%	0,0000%
CVBI11	0,024724	0,354%	0,0003%
LVBI11	0,005134	0,148%	0,0006%
PVBI11	0,006404	0,139%	0,0006%
VCJR11	0,013644	0,278%	0,0003%
VSLH11	0,024504	-0,809%	0,0027%
VILG11	0,015374	0,150%	0,0020%
VINO11	0,007344	-0,139%	0,0008%
VISC11	0,024504	0,559%	0,0019%
XPCI11	0,008184	0,069%	0,0004%
XPLG11	0,029084	0,581%	0,0034%
XPML11	0,033354	0,683%	0,0022%
XPPR11	0,033354	-1,859%	0,0026%

Ativo	Wi	R(e)	V
XPSF11	0,004254	0,033%	0,0005%
Somatório Total	1	8,115%	0,0678%

Fonte: O autor (2023).

A partir disso, utilizou-se o módulo de *solver* presente dentro do Microsoft Excel, capaz de resolver problemas quadráticos. A função objetivo foi definida como maximizar o somatório total da variância ponderada pelo percentual de cada ativo da carteira. Existem três restrições, conforme descrito na seção 3.4. A primeira busca que a soma total dos ativos deve ser igual a 1, a segunda que a rentabilidade total da carteira deve ser maior ou igual a rentabilidade do índice (8,115%) e a terceira dita que o percentual de cada ativo deve ser maior ou igual à zero.

FIGURA 4 – ESCRITA DA FUNÇÃO OBJETIVO E RESTRIÇÕES DO PROBLEMA NO SOLVER DO EXCEL



Fonte: O autor (2023).

Uma vez executado, o algoritmo retornou o resultado presente na Tabela 4.

TABELA 4 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MÉTODO GRG

Ativo	Wi	R(e)	V
ALZR11	0,000269%	0,000%	-0,000000011%
RZAT11	0,000356%	0,000%	0,000000029%
BBPO11	0,000398%	0,000%	-0,000000032%
BCFF11	0,000509%	0,000%	-0,000000017%
BRCR11	0,000950%	0,000%	-0,000000059%
BRCO11	0,001164%	0,000%	0,000000025%
BTAL11	0,001032%	0,000%	-0,000000013%
BTCI11	0,002597%	-0,002%	0,000001428%
BTLG11	0,000512%	0,000%	0,000000003%
CPTS11	0,000718%	0,000%	0,000000065%
HGCR11	0,000477%	0,000%	0,000000002%
HGLG11	0,000117%	0,000%	0,000000001%
HGRU11	1,527277%	0,434%	-0,000028130%
DEVA11	0,001272%	0,000%	0,0000000514%
VRTA11	0,000382%	0,000%	0,000000031%
GTWR11	0,000923%	0,000%	-0,000000036%
GGRC11	0,000700%	0,000%	0,000000024%
HABT11	0,000299%	0,000%	0,000000011%
HCTR11	0,001094%	0,000%	0,000000373%
HGBS11	0,000148%	0,000%	0,000000001%
HGRE11	0,000174%	0,000%	0,000000001%
HSML11	0,000760%	0,000%	-0,000000009%
HFOF11	0,000898%	0,000%	0,000000019%
IRDM11	0,001105%	0,000%	0,000000113%
JSRE11	0,000702%	0,000%	0,000000103%
KISU11	0,000289%	0,000%	-0,000000006%
KNRI11	0,000527%	0,000%	-0,000000015%
KNHY11	0,572589%	0,105%	0,000010074%
KNIP11	0,000132%	0,000%	0,000000005%
KNCR11	3,583624%	1,127%	0,000019988%
KNSC11	0,000183%	0,000%	0,000000009%
MALL11	9,673279%	3,342%	-0,000042699%
MCCI11	0,000055%	0,000%	0,000000000%
MXRF11	2,945076%	0,855%	-0,000037328%
MGFF11	0,000072%	0,000%	-0,000000002%
PATL11	0,000066%	0,000%	-0,000000002%
RBRY11	0,000222%	0,000%	0,000000011%
RBRP11	0,000044%	0,000%	-0,000000002%
RBRF11	0,000079%	0,000%	0,000000000%
RBRR11	0,000189%	0,000%	0,000000004%
RECR11	0,000290%	0,000%	0,000000013%
RBVA11	0,000340%	0,000%	-0,000000016%
RZAK11	0,000454%	0,000%	0,000000021%
RZTR11	0,000387%	0,000%	0,000000027%

Ativo	Wi	R(e)	V
SARE11	0,000743%	0,000%	0,000000132%
TGAR11	0,000375%	0,000%	0,000000022%
TORD11	0,001509%	-0,001%	0,000000703%
TRXF11	3,768231%	1,116%	-0,000050787%
URPR11	0,000185%	0,000%	0,000000016%
VGHF11	1,882339%	0,520%	0,000084015%
VGIP11	0,000111%	0,000%	0,000000004%
VGIR11	0,190013%	-0,165%	-0,000021128%
CVBI11	0,000100%	0,000%	0,000000002%
LVBI11	0,000963%	0,000%	0,000000019%
PVBI11	0,000485%	0,000%	-0,000000012%
VCJR11	0,000128%	0,000%	0,000000006%
VSLH11	0,001098%	0,000%	0,000000576%
VILG11	0,932303%	0,091%	-0,000002227%
VINO11	0,000000%	0,000%	0,000000000%
VISC11	3,029774%	0,691%	0,000063980%
XPCI11	0,000686%	0,000%	0,000000024%
XPLG11	0,000704%	0,000%	0,000000039%
XPML11	0,000548%	0,000%	-0,000000006%
XPPR11	0,000926%	-0,001%	0,000000067%
XPSF11	0,000679%	0,000%	0,000000022%
Somatório Total	1	8,115%	-0,000000016%

Como é possível observar, a rentabilidade da carteira permaneceu a mesma, 8,115%, entre jul./2021 e jul./2023. Porém, a variância reduziu de 0,0678% para -0,000000016%, ou seja, uma melhora significativa na grandeza, sendo de 10^6 .

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, foram utilizadas técnicas de investimentos e pesquisa operacional para selecionar uma carteira otimizada de Fundos de Investimento Imobiliário (FIIs). A metodologia adotada envolveu a aplicação de métodos quantitativos na seleção de ativos que comporiam a carteira, com o objetivo de maximizar o retorno esperado, minimizar a variância e, conseqüentemente, reduzir o risco associado à carteira de FIIs.

A pesquisa seguiu uma abordagem aplicada, buscando fornecer uma contribuição prática e relevante para profissionais do mercado financeiro, investidores e pesquisadores interessados na diversificação de FIIs. Para atingir os objetivos propostos, foi realizada uma análise detalhada das métricas e conceitos relevantes da Teoria Moderna de Portfólio, da Programação Quadrática e do mercado de Fundos de Investimentos Imobiliários.

Os resultados obtidos após a aplicação do modelo de Programação Quadrática indicaram uma melhora na grandeza de 10^6 na diversificação dos ativos. O algoritmo não linear GRG minimizou a variância, levando em consideração as restrições de participação de ativos e o retorno mínimo desejado. A carteira otimizada apresentou uma composição que difere da composição inicial do IFIX L, indicando que a diversificação eficiente pode levar a melhores resultados.

No entanto, é importante ressaltar que os resultados obtidos neste estudo são baseados em dados históricos e em um modelo matemático, o que implica que as condições do mercado podem mudar e, portanto, a composição da carteira deve ser revisada e ajustada ao longo do tempo. Além disso, a pesquisa não considerou outros fatores externos que podem afetar o desempenho dos FIIs, como eventos econômicos, políticos e globais ou também de natureza de mercado (eventos de liquidez, riscos de execução, taxas de corretagem entre outros diversos fatores que podem afetar os resultados).

Em suma, este trabalho fornece uma abordagem quantitativa para a seleção de carteiras de FIIs, demonstrando a importância da diversificação eficiente na busca por melhores resultados financeiros. A metodologia apresentada pode servir como base para futuras pesquisas e tomadas de decisão no mercado de investimentos imobiliários, contribuindo para a construção de carteiras mais sólidas e resilientes.

5.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Ampliação do universo de ativos: Este estudo considerou uma seleção de ativos específica com base no Índice de Fundos de Investimentos Imobiliários de Alta Liquidez. Para trabalhos futuros, seria interessante expandir o universo de ativos considerados, incluindo FIs com menor liquidez e outros tipos de ativos financeiros, como ações, títulos e *commodities*. Isso permitiria uma análise mais abrangente e diversificada.

Incorporação de informações macroeconômicas: A inclusão de variáveis macroeconômicas, como taxas de juros, inflação e indicadores econômicos, pode enriquecer a análise de portfólio. Trabalhos futuros podem explorar como essas variáveis influenciam a alocação de ativos e o desempenho da carteira de FIs.

Implementação de estratégias de gestão ativa: Este estudo se concentrou em uma abordagem de otimização de portfólio estático. Trabalhos futuros podem explorar estratégias de gestão ativa, que envolvem ajustes periódicos na carteira com base em mudanças nas condições de mercado e nas previsões de retorno e risco. Isso pode incluir a revisão regular das alocações de ativos e a incorporação de informações em tempo real.

Consideração de diferentes métricas de risco: Além da covariância e volatilidade, trabalhos futuros podem examinar outras métricas de risco, como *Value at Risk* (VaR) e *Conditional Value at Risk* (CVaR), para avaliar o potencial de perdas em situações adversas do mercado.

Análise de fatores específicos do setor imobiliário: Uma análise mais aprofundada dos fatores que afetam o desempenho dos FIs, como a localização dos imóveis subjacentes, as condições do mercado imobiliário e a qualidade dos locatários, pode ser um caminho interessante para pesquisas futuras.

Consideração de estratégias de otimização alternativas: Além da Teoria do Portfólio de Markowitz, outras técnicas de otimização, como a Teoria de Opções Reais e a Simulação Monte Carlo, podem ser exploradas em futuros estudos para comparar a eficácia e a estabilidade das carteiras resultantes.

Validação da estratégia em diferentes períodos: Testar a estratégia em diferentes janelas de tempo pode fornecer informações valiosas sobre a robustez da abordagem proposta em diferentes contextos de mercado.

Avaliação de custos de transação e impactos fiscais: Trabalhos futuros podem incorporar considerações de custos de transação, como taxas de corretagem, e impactos fiscais na seleção e gestão de carteiras de FIs. Isso pode oferecer uma visão mais realista do desempenho da carteira.

Análise de sensibilidade: Realizar análises de sensibilidade para avaliar como pequenas mudanças nos parâmetros, como metas de retorno ou restrições de risco, afetam a alocação de ativos e os resultados da carteira.

Estudos de caso práticos: Além de abordagens teóricas, trabalhos futuros podem incluir estudos de caso práticos que aplicam a metodologia proposta a cenários reais de investimento em FIs, demonstrando sua aplicabilidade e utilidade no mercado financeiro.

Essas recomendações visam aprimorar a pesquisa e oferecer *insights* valiosos para investidores, gestores de carteira e profissionais do mercado financeiro que buscam estratégias eficazes de alocação de ativos em Fundos de Investimentos Imobiliários.

REFERÊNCIAS

- ARENALES, M. *et al.* **Pesquisa Operacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- BARRETO, A. V. P.; HONORATO, C. de F. **Manual de sobrevivência na selva acadêmica**. Rio de Janeiro: Objeto Direto, 1998.
- BONINI, A. C. *et al.* **Um estudo teórico sobre a história da pesquisa operacional**. Anais do EVINCI-UniBrasil, v. 1, n. 4, p. 1666-1670, 2015.
- CASTELLO BRANCO, Carlos Eduardo; MONTEIRO, Eliane de Mello Alves Rebouças. **Estudo sobre a indústria de fundos de investimentos imobiliários no Brasil**. Revista do BNDES, Rio de Janeiro, v. 10, n. 20, p. [261]-295, dez. 2003.
- CHAPRA, S.C., CANALE, R.P. (2009) **Numerical Methods for Engineers. 6th Edition**, McGraw Hill Science/Engineering/Math, New York.
- DANTZIG, G. B. **Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities**. *In*: KOOPMANS, T. C. (ed.). Activity Analysis of Production and Allocation. New York; London: Wiley & Chapman-Hall, 1947. p. 339-347.
- DI SIERVO, J. **Aplicação de programação linear na seleção de carteiras de investimento**. Sorocaba: UFSCAR 2017.
- Lima Jr., J.R. 2011. **Fundos imobiliários têm futuro no Brasil?** Carta do NRE-POLI nº 24. Disponível em: www.realestate.br/dash/uploads/sistema/images/File/NewsLetter/CartaNRE24-2-11.pdf. Acesso em: 18/10/2023.
- MANSINI, R.; OGRYCZAK, W.; SPERANZA, M. G. *et al.* **Twenty years of linear programming based portfolio optimization**. European Journal of Operational Research, v. 234, p. 518-535, 2014.
- MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, mar. 1952.
- PALMA, A. N. *et al.* **Análise de risco: uma comparação entre fundos imobiliários e demais formas de investimento**. 2023. 84 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia de Produção Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2023.
- SACOMAN, M. A. R. **Otimização de Projetos utilizando GRG, Solver e Excel**. *In*: XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2012, Belém. Anais ... Belém: COBENGE, 2012. 12p.
- SOLA, L. F. **Condições para estruturação de fundos imobiliários com renda proveniente de locações residenciais**. São Paulo: USP 2014

ROESCH, S. M. A. **Projetos de Estágio e de Pesquisa em Administração**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2007.