

Mariana Kleina

Resolução Numérica do Modelo de  
Lotka-Volterra

Curitiba

2009

Mariana Kleina

# Resolução Numérica do Modelo de Lotka Volterra

Monografia apresentada como requisito parcial à conclusão do curso de graduação em Matemática Industrial, pela Universidade Federal do Paraná.

Orientadora:

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ailín Ruiz de Zárate Fábregas

Curitiba

2009

## Termo de Aprovação

Mariana Kleina

Resolução Numérica do Modelo de Lotka-Volterra

Monografia aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Matemática Industrial, Setor de Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Ailín Ruiz de Zárate Fábregas

---

Prof. Dr. Manuel Jesus Cruz Barreda

---

Prof. Dr. Saulo Pomponet Oliveira

Curitiba, 17 de Novembro de 2009.

*“Ninguém é tão ignorante que não tenha nada a ensinar, nem tão sábio que não tenha nada a aprender.”*

*Para*

*Meus pais Aleixo e Dirlei e meus irmãos Leandro e Monica, que sempre me incentivam e me dão forças para que eu nunca desista dos meus objetivos.*

## Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que proporciona este momento na minha vida; a todas as pessoas que direta ou indiretamente me ajudaram a construir este trabalho; aos meus amigos e em especial a minha orientadora, a professora Ailín Ruiz de Zárate Fábregas, por toda a sua paciência e dedicação.

## Resumo

Nesta monografia estudaremos um modelo matemático bastante simplificado mas que desencadeou uma série de estudos para situações reais que ocorrem na natureza. Este modelo é o modelo de Lotka-Volterra, desenvolvido na década de 20, que descreve dinâmicas nos sistemas biológicos, particularmente quando duas espécies interagem: uma como presa e outra como predadora. Estudar o modelo significa saber em que condições as espécies irão coexistir, sem que haja extinção ou crescimento sem limites de algumas das espécies.

O modelo será resolvido numericamente através de métodos numéricos conhecidos, que serão implementados no *software* MATLAB e será observado que alguns destes métodos ilustram comportamentos qualitativos errados e outros representam bem a solução do modelo.

**Palavras-chave:** Pontos de Equilíbrio, Estabilidade de Sistemas Lineares e Não Lineares, Modelo de Lotka-Volterra.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Resultados básicos</b>	<b>12</b>
1.1 Estabilidade de um sistema de Equações Diferenciais . . . . .	12
1.2 Estudo qualitativo dos sistemas de Equações Diferenciais lineares no plano . . . . .	13
1.3 Estabilidade de um sistema não linear . . . . .	20
1.4 Resultados de otimização . . . . .	22
<b>2 O Modelo de Lotka-Volterra</b>	<b>23</b>
2.1 Formulação do modelo . . . . .	23
2.2 Estabilidade dos pontos de equilíbrio . . . . .	24
2.3 Órbitas periódicas . . . . .	31
<b>3 Resolução numérica do modelo de Lotka-Volterra</b>	<b>33</b>
3.1 Resolução numérica do modelo de Lotka-Volterra pelo método de Euler explícito . . . . .	33
3.2 Resolução numérica do modelo de Lotka-Volterra pelo método de Euler implícito . . . . .	35
3.3 Resolução numérica do modelo de Lotka-Volterra pelo método de Euler simplético . . . . .	38
3.4 Resolução numérica do modelo de Lotka-Volterra pelo método de Runge-Kutta de ordem quatro . . . . .	43
3.5 Comparação entre os métodos . . . . .	45



<b>Conclusão</b>	<b>48</b>
<b>Anexos</b>	<b>49</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>53</b>

# Introdução

O modelo de presa-predador de Lotka-Volterra é um modelo de importância histórica na modelagem matemática de sistemas ecológicos. Na natureza, muitas espécies (predadores) se alimentam de outras (presas), enquanto a presa se alimenta de outro tipo de comida. Esta situação se destacou e foi estudada independentemente por Alfred J. Lotka em 1925 e Vito Volterra em 1926. Este modelo pode ser descrito através de um par de equações diferenciais não lineares de primeira ordem.

Pretende-se dar ênfase na teoria qualitativa para Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e na resolução numérica do modelo por diferentes métodos numéricos, inclusive alguns que exploram as propriedades geométricas conhecidas do estudo qualitativo do sistema. Em particular é de interesse que o método preserve o invariante das órbitas periódicas. Serão implementados métodos simples para resolver numericamente este modelo. Preservar numericamente as propriedades geométricas de um sistema de equações e do fluxo que ele define, não somente produz um resultado com melhor comportamento qualitativo, mas também permite uma integração numérica mais precisa para períodos de tempo longos do que métodos para problemas gerais. O que estamos ilustrando num problema relativamente simples se manifesta em problemas mais complexos em diversas áreas da modelagem matemática.

## **Organização dos capítulos**

No Capítulo 1 apresentamos alguns conceitos matemáticos básicos que serão fundamentais para o desenvolvimento do presente trabalho, tais como esta-

bilidade de sistemas, resultados de otimização, entre outros. O Capítulo 2 apresenta a formulação do modelo de Lotka-Volterra, juntamente com o estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio. No Capítulo 3 iremos resolver numericamente o modelo de Lotka-Volterra através de métodos iterativos simples e conhecidos, comparando os resultados obtidos, pois alguns destes métodos expressam resultados errados e outros apresentam bons resultados com melhor comportamento qualitativo.

# Capítulo 1

## Resultados básicos

Para que se possa fazer um estudo aprofundado de qualquer modelo matemático, é fundamental se conhecer alguns teoremas, definições e técnicas matemáticas a serem aplicados na análise do mesmo. Para o modelo de Lotka-Volterra, este capítulo é de fundamental importância, pois nele são descritos resultados que estaremos utilizando durante todo este trabalho.

### 1.1 Estabilidade de um sistema de Equações Diferenciais

**Definição 1.1.1** *Um ponto de equilíbrio ou ponto crítico  $P$  (soluções estacionárias ou simplesmente soluções constantes) de um sistema de equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)  $X' = F(X)$  satisfaz  $F(P)=0$ .*

**Definição 1.1.2 (Estabilidade do ponto de equilíbrio)** *O ponto de equilíbrio  $P$  da equação autônoma (que não depende explicitamente do tempo)  $X' = F(X)$  é:*

- **Estável** se, e somente se,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0$  tal que se  $\phi(t)$  é solução de  $X' = F(X)$  e ainda  $|\phi(0) - P| < \delta_\epsilon$ , então  $|\phi(t) - P| < \epsilon, \forall t \geq 0$ . Ou seja, todas as soluções que começam suficientemente próximas de

$P$  (a uma distância menor que  $\delta_\epsilon$ ) permanecem próximas de  $P$  (a uma distância menor que  $\epsilon$ ).

- **Assintoticamente estável** se o ponto de equilíbrio é estável e além disso existe  $d > 0$  tal que para qualquer solução da equação  $X' = F(X)$ ,  $\phi(t)$  com dado inicial  $|\phi(0) - P| < d$  vale  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = P$ . Logo, as trajetórias que começam próximas de  $P$ , não apenas permanecem próximas, mas convergem para  $P$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .
- **Instável** se o ponto de equilíbrio não é estável.

## 1.2 Estudo qualitativo dos sistemas de Equações Diferenciais lineares no plano

Pelo fato de muitas equações diferenciais e sistemas de EDOs não serem convenientemente solúveis por métodos analíticos, torna-se importante considerar informações qualitativas obtidas de suas soluções, sem de fato resolvê-las. Vejamos como isso pode ser feito, começando com uma consideração sobre o sistema linear homogêneo de primeira ordem com coeficientes constantes, da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

onde  $\frac{dx}{dt} = x'$  e  $\frac{dy}{dt} = y'$ . Em notação vetorial, o sistema acima toma a forma

$$X' = AX, \tag{1.1}$$

onde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad e \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Considerando o que sabemos sobre equações lineares de primeira ordem, para resolver o sistema acima buscamos soluções da forma

$$X = X(t) = ve^{\lambda t},$$

onde  $v$  é um vetor coluna  $2 \times 1$  e  $\lambda$  é um número real, sendo  $t$  a variável independente.

Derivando a função  $X(t)$  e substituindo-a em (1.1), obtemos

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Logo,  $\lambda$  deve ser um autovalor da matriz  $A$  e  $v$  um autovetor associado a  $\lambda$ . Assim, as soluções de um sistema linear dependem diretamente dos autovalores e autovetores da matriz  $A$  que o determina. Os autovalores são obtidos através da equação característica, dada por

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

No sistema (1.1), os pontos  $x \in \mathbb{R}^2$  para os quais  $Ax = 0$  são os pontos de equilíbrio ou pontos críticos do sistema. Admitindo que  $\det(A) \neq 0$ , então  $A$  é inversível. Logo  $X = (0, 0)$  é o único ponto crítico do sistema.

Uma solução do sistema de equações  $X' = AX$ , sendo uma função definida num intervalo de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^2$  pode ser considerada como uma representação paramétrica de uma curva no plano. Podemos olhar para essa curva como uma trajetória percorrida por uma partícula em movimento, cuja velocidade  $X'$  é especificada pela equação diferencial. O plano  $xy$  é chamado plano de fase e um conjunto representativo de trajetórias é chamado de retrato de fase. Dependendo dos autovalores de  $A$ , as propriedades qualitativas das soluções e o retrato de fase de (1.1) mudam.

Agora, analisemos os diferentes casos das raízes da equação característica, pois o comportamento das soluções depende fundamentalmente da natureza destas raízes. Pela suposição feita sobre o determinante de  $A$  ser não nulo,  $A$  não possui autovalor nulo.

### Caso 1: Autovalores Reais e Distintos de mesmo sinal

Neste caso, a solução geral do sistema (1.1) é dada por

$$X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (1.2)$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são autovalores da matriz  $A$ , com autovetores  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente. Observamos que se os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são distintos, então  $v_1$  e  $v_2$  são linearmente independentes, em particular, são diferentes.

Suponha primeiro que  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . Segue da equação (1.2) que  $X(t) \rightarrow \vec{0}$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , independente dos valores de  $c_1$  e  $c_2$ ; em outras palavras, todas as soluções se aproximam do ponto crítico na origem quando  $t \rightarrow +\infty$ . Se a solução começa em um ponto inicial na reta contendo a origem na direção de  $v_1$ , então  $c_2 = 0$ . Em consequência, a solução permanece nessa reta para todo  $t$  e tende à origem quando  $t \rightarrow +\infty$ . Analogamente, se o ponto inicial pertence à reta na direção de  $v_2$ , então a solução tende à origem ao longo dessa reta.

Escrevendo (1.2) na forma  $X(t) = e^{\lambda_2 t} [c_1 v_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 v_2]$ , sabendo que  $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$ , enquanto  $c_2 \neq 0$ , o termo  $c_1 v_1 \exp[(\lambda_1 - \lambda_2)t]$  é desprezível comparando com  $c_2 v_2$  para valores suficientemente grandes de  $t$ . Assim quando  $t \rightarrow +\infty$ , não só as trajetórias se aproximam da origem, mas o fazem tangencialmente à reta na direção de  $v_2$ . Logo, todas as soluções são tangentes a  $v_2$  no ponto crítico, exceto as que começam exatamente na reta na direção de  $v_1$ . Esse tipo de ponto crítico é chamado de **nó atrator**.

Por outro lado, se  $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ , então  $X(t) \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ , isto é, as trajetórias tem as mesmas direções que as do caso anterior, porém sentidos contrários, ou seja, se afastam do ponto crítico na origem, em vez de se aproximarem. O ponto crítico é chamado **nó repulsor**.

### Caso 2: Autovalores Reais com sinais diferentes

A solução geral do sistema (1.1) é dada por

$$X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (1.3)$$

onde  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ . Se a solução começa em um ponto inicial na reta contendo a origem na direção de  $v_1$ , então  $c_2 = 0$ . Em consequência, a solução permanece nessa reta para todo  $t$  e, como  $\lambda_1 > 0$ ,  $\|X\| \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Se a solução começa em um ponto inicial pertencente à reta na direção de  $v_2$ , a situação é análoga, exceto que  $\|X\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , já que  $\lambda_2 < 0$ . Já as soluções que começam em outros pontos iniciais seguem trajetórias hiperbólicas. A exponencial positiva é o termo dominante na equação (1.3) para  $t$  grande, de modo que todas essas soluções tendem a infinito assintoticamente à reta determinada pelo autovetor  $v_1$  correspondente ao autovalor positivo  $\lambda_1$ . As únicas soluções que se aproximam do ponto crítico na origem são as que começam precisamente na reta determinada por  $v_2$ , porque para essas condições iniciais, a exponencial positiva está ausente da solução, de modo que  $\|X\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Para todas as outras condições iniciais, a exponencial positiva acaba dominando e faz com que  $\|X\|$  se torne ilimitada. O comportamento de  $y$  é semelhante. Nesse caso, a origem é chamada **ponto de sela**.

### Caso 3: Autovalores iguais

Vamos supor agora que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Vamos considerar o caso em que  $\lambda < 0$ ; se forem positivos, as trajetórias são semelhantes, mas o movimento é em sentido contrário. Existem dois subcasos, dependendo se o autovalor repetido tem dois autovetores linearmente independentes ou apenas um.

1. Dois autovetores linearmente independentes:

Seja  $\lambda$  o autovalor, a solução geral do sistema (1.1) é da forma

$$X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda t} + c_2 v_2 e^{\lambda t},$$

em que  $v_1$  e  $v_2$  são os autovetores linearmente independentes. Toda trajetória está sobre uma reta que passa pela origem. Se  $\lambda < 0$ , todas



as soluções convergem para a origem quando  $t \rightarrow +\infty$ , porém, se  $\lambda > 0$ , as soluções afastam-se da origem quando  $t$  cresce. Neste caso, o ponto crítico é chamado **nó próprio**.

2. Um autovetor linearmente independente:

Neste caso, o ponto crítico é chamado **nó impróprio** e a solução é dada por

$$X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda t} + c_2 (v_1 t e^{\lambda t} + v_2 e^{\lambda t}), \quad (1.4)$$

onde  $v_1$  é o autovetor e  $v_2$  é o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido  $((A - \lambda I)v_2 = v_1)$ . Para  $t$  muito grande, o termo dominante na equação (1.4) é  $c_2 v_1 t e^{\lambda t}$ . Assim, quando  $t \rightarrow +\infty$ , todas as trajetórias tendem à origem e são tangentes à reta na direção do autovetor  $v_1$ . Isso é verdadeiro mesmo quando  $c_2 = 0$ , pois nesse caso, a solução  $X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda t}$  pertence a essa reta. Analogamente, para valores negativos grandes de  $t$ , o termo  $c_2 v_1 t e^{\lambda t}$  é novamente dominante de modo que, quando  $t \rightarrow -\infty$ , cada trajetória é assintótica a uma reta paralela a  $v_1$ . Além disso, a orientação das trajetórias depende das posições relativas de  $v_1$  e  $v_2$  (ver [1]).

#### Caso 4: Autovalores complexos

Suponha que os autovalores sejam  $\lambda \pm i\mu$ , onde  $\lambda$  e  $\mu$  são reais,  $\lambda \neq 0$  e  $\mu > 0$ . Sistemas com autovalores  $\lambda \pm i\mu$  podem ser escritos via mudança de variáveis como

$$X' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} X, \quad (1.5)$$

ou, em forma escalar,

$$x' = \lambda x + \mu y, \quad y' = -\mu x + \lambda y. \quad (1.6)$$

Vamos introduzir coordenadas polares  $r, \theta$  dadas por

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = y/x, \quad x \neq 0.$$

Diferenciando essas equações, obtemos

$$rr' = xx' + yy', \quad (\sec^2 \theta)\theta' = (xy' - yx')/x^2. \quad (1.7)$$

Substituindo as equações (1.6) na primeira das equações (1.7), vemos que

$$r' = \lambda r,$$

e portanto,

$$r = ce^{\lambda t}, \quad (1.8)$$

onde  $c$  é uma constante. Analogamente, substituindo as equações (1.6) na segunda das equações (1.7) e usando o fato de que  $\sec^2 \theta = r^2/x^2$ , temos

$$\theta' = -\mu.$$

Logo,

$$\theta = -\mu t + \theta_0, \quad (1.9)$$

onde  $\theta_0$  é o valor de  $\theta$  quando  $t = 0$ .

As equações (1.8) e (1.9) são equações paramétricas em coordenadas polares das trajetórias do sistema (1.5). Como  $\mu > 0$ , segue da equação (1.9) que  $\theta$  diminui quando  $t$  aumenta, de modo que o movimento em uma trajetória é no sentido horário. Quando  $t \rightarrow +\infty$ , vemos da equação (1.8) que  $r \rightarrow 0$  se  $\lambda < 0$  e que  $r \rightarrow +\infty$  se  $\lambda > 0$ . Então, as trajetórias são espirais, que tendem ou se afastam da origem dependendo do sinal de  $\lambda$ . Os pontos críticos são chamados de **pontos espirais** nesse caso. Os termos **sumidouro espiral** e **fonte espiral** são usados para se referir a pontos espirais cujas trajetórias se aproximam ou se afastam, respectivamente, do ponto crítico.

Mais geralmente, é possível mostrar que, para qualquer sistema com autovalores complexos  $\lambda \pm i\mu$ , onde  $\lambda \neq 0$ , as trajetórias são sempre espirais. Elas estão orientadas para dentro ou para fora, respectivamente, dependendo se o sinal de  $\lambda$  é negativo ou positivo. Podem ser alongadas e tortas em

relação aos eixos coordenados, e o sentido do movimento pode ser horário ou trigonométrico.

### **Caso 5: Autovalores imaginários puros**

Nesse caso,  $\lambda = 0$  e o sistema (1.5) se reduz a

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} X,$$

com autovetores  $\pm i\mu$ . Usando a mesma idéia que no Caso 4, encontramos

$$r' = 0, \quad \theta' = -\mu,$$

e, portanto,

$$r = c, \quad \theta = -\mu t + \theta_0,$$

onde  $c$  e  $\theta_0$  são constantes. Logo, as trajetórias são círculos centrados na origem, percorridos no sentido horário se  $\mu > 0$  e no sentido trigonométrico se  $\mu < 0$ . Um circuito completo em torno da origem é feito em um intervalo de tempo de comprimento  $2\pi/\mu$ , de modo que todas as soluções são periódicas com período  $2\pi/\mu$ , exceto no ponto crítico. O ponto crítico é chamado de **centro**.

Em geral, quando os autovalores são imaginários puros, é possível mostrar que as trajetórias são elipses centradas na origem.

Mais detalhes e interpretação geométrica desta seção podem ser vistos em [1].

Os cinco casos anteriores podem ser resumidos na tabela a seguir:

Autovalores	Tipo de Ponto Crítico	Estabilidade
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nó	Instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nó	Assintoticamente estável
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Ponto de sela	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nó próprio ou impróprio	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nó próprio ou impróprio	Assintoticamente estável
$\lambda_1, \lambda_2 = \lambda \pm i\mu$	Ponto espiral	
$\lambda > 0$		Instável
$\lambda < 0$		Assintoticamente estável
$\lambda_1 = i\mu, \lambda_2 = -i\mu$	Centro	Estável

### 1.3 Estabilidade de um sistema não linear

**Definição 1.3.1** *Considere  $X' = F(X)$  com  $F^1 \in C(\mathbb{R}^2)$ ,  $F(P) = (0, 0)^T$ . Seja  $DF(P)$  a matriz Jacobiana de  $F$  no ponto  $P$ . Seja a parte real de todos os autovalores da matriz Jacobiana no ponto  $P$  forem diferentes de zero, dizemos que o ponto de equilíbrio é **hiperbólico**.*

**Teorema 1.3.1 (Teorema de linearização)** *Suponha  $X' = F(X)$ ,  $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$  com  $P \in \mathbb{R}^2$  um ponto de equilíbrio isolado,  $P$  hiperbólico, então as trajetórias do sistema não linear  $X' = F(X)$  perto do ponto de equilíbrio  $P$  são “parecidas” com as do sistema linear  $X' = DF(P)(X - P)$  perto de  $P$ , onde  $DF(P)$  é a matriz Jacobiana calculada no ponto  $P$ .*

O resultado do Teorema pode ser estabelecido em termos mais vigorosos [3]. O Teorema de linearização é uma ferramenta essencial no estudo qualitativo de sistemas não lineares e é o primeiro passo no desenho ou esboço do retrato de fase.

**Definição 1.3.2** *Para um sistema de equações diferenciais não-lineares da*

forma

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

denomina-se a **nuliclinal de  $x$**  o conjunto de pontos onde  $x' = 0$  e a **nuliclinal de  $y$**  o conjunto de pontos onde  $y' = 0$ . Com isto, o  $\mathbb{R}^2$  é dividido em regiões (para um sistema  $2 \times 2$ ), onde o campo vetorial aponta para diferentes direções do plano. A interseção das nuliclinais de  $x$  e  $y$  produz os pontos de equilíbrio.

O estudo das nuliclinais é uma ferramenta proveitosa para a análise de sistemas de equações diferenciais não-lineares pois pode-se prever o comportamento das soluções perto dos pontos de equilíbrio sem resolver o sistema.

**Teorema 1.3.2 (Liapunov)** *Seja  $X^*$  um ponto de equilíbrio isolado para  $X' = F(X)$ . Seja  $L : O \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável definida sobre um conjunto aberto  $O$  contendo  $X^*$ . Suponha ainda que:*

- $L(X^*) = 0$  e  $L(X) > 0$  se  $X \neq X^*$ ;
- $\dot{L} \leq 0$  em  $O - \{X^*\}$ ;

*Então  $X^*$  é estável. Além disso, se  $L$  também satisfaz:*

- $\dot{L} < 0$  em  $O - \{X^*\}$ ;

*Então  $X^*$  é assintoticamente estável.*

*Onde  $\dot{L}$  denota a derivada de  $L$  ao longo das trajetórias que satisfazem a EDO.*

O Teorema de Liapunov é especialmente útil em alguns casos onde o Teorema de linearização não se aplica.

## 1.4 Resultados de otimização

Nesta seção, vamos enunciar alguns resultados de otimização que estaremos utilizando durante este trabalho.

**Teorema 1.4.1** *Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e com derivadas parciais até segunda ordem contínuas em  $A = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 < r, r > 0\}$ . Suponha que  $f_x(a, b) = 0$  e  $f_y(a, b) = 0$ . Seja*

$$d = d(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

- Se  $d > 0$  e  $f_{xx}(a, b) > 0$ , então  $f(a, b)$  é um mínimo local.
- Se  $d > 0$  e  $f_{xx}(a, b) < 0$ , então  $f(a, b)$  é um máximo local.
- Se  $d < 0$ , então  $f(a, b)$  não é mínimo local nem máximo local.

**Definição 1.4.1** *Dizemos que uma sequência  $x_k \subset \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , é crítica em relação ao conjunto  $D$ , se  $x_k \subset D$  e  $\|x_k\| \rightarrow \infty$  ou  $x_k \rightarrow x \in \overline{D}$  quando  $k \rightarrow +\infty$ , onde  $\overline{D}$  representa o fecho do conjunto  $D$ .*

**Definição 1.4.2** *Dizemos que a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é coerciva no conjunto  $D$ , quando para toda sequência  $x_k$  crítica em relação a  $D$ , tem-se  $\limsup_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = +\infty$ .*

**Teorema 1.4.2** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto, uma função contínua coerciva em  $D$ . Então, o problema*

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D$$

*possui uma solução global.*

Mais detalhes sobre as definições e resultados enunciados nesta seção podem ser vistos em [4] e [5].

# Capítulo 2

## O Modelo de Lotka-Volterra

O Modelo de Lotka-Volterra, também conhecido como modelo Presa-Predador, estuda o comportamento de duas espécies de populações que interagem entre si. Uma das espécies (predador) se alimenta da outra (presa), enquanto a presa se alimenta de outro tipo de alimento. Este modelo, que envolve apenas duas espécies, não descreve completamente as complexas relações que ocorrem na natureza, mas o seu estudo e de outros modelos simples é o ponto de partida para a compreensão de fenômenos mais complicados.

### 2.1 Formulação do modelo

Em um instante de tempo  $t$ , denotamos por  $x$  a densidade da população de presa e por  $y$  a densidade de população do predador. Uma vez que estamos lidando com populações, levamos em consideração somente valores de  $x, y \geq 0$ .

Com as duas espécies em interação, fazemos as seguintes hipóteses:

- Na ausência do predador, a população de presas aumenta a uma taxa proporcional à população atual; assim,  $\frac{dx}{dt} = \alpha x$ ,  $\alpha > 0$ , quando  $y = 0$ .
- Na ausência da presa, a população de predadores decai; assim,  $\frac{dy}{dt} =$

$-\gamma y$ ,  $\gamma > 0$ , quando  $x = 0$ .

- O número de encontros entre presa e predador é proporcional ao produto das duas populações. Estes encontros fazem com que a população de predadores cresça e a de presas diminua. Com isso, a taxa de crescimento da população de predadores é aumentada por um termo da forma  $\delta xy$ , enquanto a taxa de crescimento para a população de presas é diminuída por um termo da forma  $-\beta xy$ , onde  $\beta$  e  $\delta$  são constantes positivas.

Podemos resumir estas hipóteses no seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy \\ y' = -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Lembrando que as constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são todas positivas;  $\alpha$  é a taxa de crescimento da população de presas na ausência de predadores,  $\gamma$  é a taxa de declínio da população de predadores na ausência de presas,  $\beta$  é a medida do efeito da interação das espécies no crescimento da presa e  $\delta$  é a medida do efeito da interação das espécies no crescimento do predador.

## 2.2 Estabilidade dos pontos de equilíbrio

Vamos fazer um estudo qualitativo para o modelo de Lotka-Volterra, fazendo uso da análise apresentada na Seção 1.2 e do teorema 1.3.1, pois o presente modelo é não linear.

A matriz Jacobiana para o sistema de Lotka-Volterra é:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}.$$



Os pontos críticos do sistema de Lotka-Volterra são soluções de

$$x(\alpha - \beta y) = 0, \quad y(-\gamma + \delta x) = 0,$$

isto é, os pontos  $(0, 0)$  e  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ . Vamos examinar, primeiro, as soluções do sistema linear correspondente perto de cada ponto crítico.

Em uma vizinhança do ponto  $(0, 0)$ ,  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ , o sistema linear correspondente é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Os autovalores e autovetores são

$$r_1 = \alpha, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_2 = -\gamma, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que a solução geral é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\alpha t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\gamma t}.$$

Logo, como temos um autovalor positivo e outro negativo, a origem é um ponto de sela e, portanto, instável. Sabemos que temos curvas estáveis e instáveis com direções tangentes coincidindo com os eixos  $y$  e  $x$  respectivamente. De fato, a curva estável ocorre no eixo  $y$ , ou seja, onde  $x$  vale zero,  $\forall t$ , o que significa que não há presas, logo a equação para a população de predadores fica  $y' = -\gamma y(t)$ , o que acarretará a extinção dos predadores. A curva instável ocorre no eixo  $x$ , isto é,  $y(t) = 0, \forall t$ , e ficamos com  $x' = \alpha x$ , logo, a população de presas crescerá sem limites.

Agora, consideremos o ponto crítico  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ .

O sistema linear correspondente em torno deste ponto é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \gamma/\delta \\ y - \alpha/\beta \end{pmatrix}.$$

Os autovalores deste sistema são  $r = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$ , de modo que o ponto crítico é um centro para o sistema. Contudo, não podemos concluir nada sobre a estabilidade deste ponto crítico a partir do Teorema da linearização (teorema 1.3.1), porque o ponto crítico é não hiperbólico.

Podemos esboçar as nuliclinais do sistema de Lotka-Volterra, usando a Definição 1.3.2, para analisar o comportamento da solução perto desse ponto crítico. As nuliclinais de  $x$  são dadas pelas retas  $x = 0$  e  $y = \frac{\alpha}{\beta}$ . As nuliclinais de  $y$  são dadas pelas retas  $y = 0$  e  $x = \frac{\gamma}{\delta}$ . As linhas nuliclinais não nulas separam a região  $x, y > 0$  em quatro regiões nas quais o campo vetorial aponta como indicado na Figura 2.1.

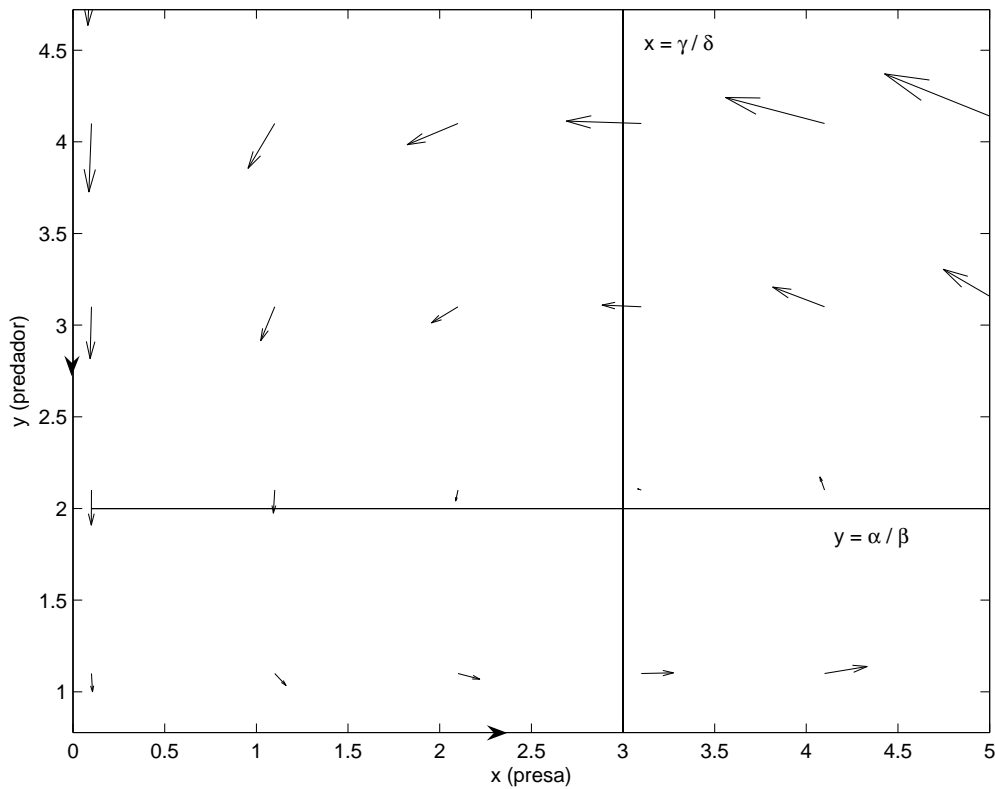


Figura 2.1: As nuliclinais e o campo de direções para o modelo presa-predador com  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\gamma = 0.75$  e  $\delta = 0.25$ .

As soluções devem girar no sentido anti-horário em torno do ponto de

equilíbrio  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ . Contudo, não podemos determinar com precisão o comportamento das soluções; elas poderiam girar em espiral se aproximando do ponto de equilíbrio, girar em espiral se aproximando de um ciclo limite, girar em espiral crescendo infinitamente ou então as soluções podem ser órbitas fechadas.

Vamos procurar uma função de Liapunov para o ponto de equilíbrio  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  do modelo de Lotka-Volterra em  $x > 0$  e  $y > 0$ , que chamaremos de região  $O$ , para podermos concluir algo sobre a estabilidade deste ponto.

Pela Regra da Cadeia e a derivada da função inversa, fazendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y(-\gamma + \delta x)}{x(\alpha - \beta y)} \quad \text{para } y \neq \frac{\alpha}{\beta},$$

obtemos uma equação em variáveis separáveis:

$$\frac{\alpha - \beta y}{y} dy = \frac{-\gamma + \delta x}{x} dx.$$

Integrando em relação a  $x$  e sendo  $y'dx = dy$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^y \frac{(\alpha - \beta Y)}{Y} dY &= \int_{x_0}^x \frac{(-\gamma + \delta X)}{X} dX, \\ \alpha \int_{y_0}^y \frac{dY}{Y} - \beta \int_{y_0}^y dY &= -\gamma \int_{x_0}^x \frac{dX}{X} + \delta \int_{x_0}^x dX, \\ (\alpha \ln |Y| - \beta Y) \Big|_{y_0}^y &= (-\gamma \ln |X| + \delta X) \Big|_{x_0}^x, \end{aligned}$$

sendo  $x, x_0, y, y_0 > 0$ , temos:

$$\alpha \ln y - \beta y - \alpha \ln y_0 + \beta y_0 = -\gamma \ln x + \delta x + \gamma \ln x_0 - \delta x_0.$$

Reorganizando, obtemos:

$$\delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y = \underbrace{\beta y_0 - \alpha \ln y_0 + \delta x_0 - \gamma \ln x_0}_{\text{constante que depende da condição inicial}}.$$

Cada trajetória  $x(t) > 0$ ,  $y(t) > 0$  do sistema não linear está contida numa curva de nível da função

$$H(x, y) = \delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y. \quad (2.1)$$

Para que a função cumpra a primeira condição de uma função de Liapunov, basta subtrair de  $H(x, y)$  o valor de  $H(x_0, y_0)$  para  $x_0 = \frac{\gamma}{\delta}$  e  $y_0 = \frac{\alpha}{\beta}$ , assim obtemos uma candidata a função de Liapunov:

$$L(x, y) = \delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y + \alpha \ln \frac{\alpha}{\beta} - \alpha + \gamma \ln \frac{\gamma}{\delta} - \gamma.$$

Verificando se  $L(x, y)$  é função de Liapunov:

- $L(X^*) = 0$  por construção, onde  $X^* = \left( \frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right)$ .
- $L(X) > 0$  se  $X \neq X^*$ , pois

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \delta - \frac{\gamma}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \beta - \frac{\alpha}{y}$$

Observando que  $\frac{\partial L}{\partial x}(X^*) = 0$  e  $\frac{\partial L}{\partial y}(X^*) = 0$ . Logo,  $X^*$  é candidato a mínimo ou a máximo local. De fato, analisando a matriz Hessiana:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\gamma}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{\alpha}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial xy} = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(X^*) = \frac{\delta^2}{\gamma}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(X^*) = \frac{\beta^2}{\alpha}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial xy}(X^*) = 0$$

Calculando o determinante da matriz Hessiana em  $X^*$ :

$$d = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix} = \frac{\delta^2}{\gamma} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\delta^2 \beta^2}{\gamma \alpha} > 0$$

Como  $L_{xx} = \frac{\delta^2}{\gamma} > 0$  e  $d > 0 \Rightarrow X^*$  é mínimo local.

Será que  $X^*$  é mínimo global?

Temos que  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x > 0}} \delta x - \gamma \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x > 0}} x \left( \delta - \gamma \frac{\ln x}{x} \right)$ .

Mas  $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  (por L'Hospital,  $\frac{1}{\frac{x}{1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$ ).

Logo,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x > 0}} x \left( \delta - \gamma \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty,$$

pois  $\delta > 0$  e  $\left( \delta - \gamma \frac{\ln x}{x} \right)$  é limitado e positivo para  $x$  suficientemente grande.

Analogamente,  $\lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y > 0}} \beta y - \alpha \ln y = +\infty$ .

Vamos verificar que  $L(x, y)$  é coerciva no seu domínio  $D = \{(x, y) \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$ , para fazermos uso do teorema 1.4.2.

Consideremos primeiro as sequências críticas  $(x_k, y_k)$  tais que  $x_k \geq z_0$  e  $y_k \geq z_0$  para algum  $z_0$  e  $\|(x_k, y_k)\| \rightarrow +\infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\lim_{\|(x_k, y_k)\| \rightarrow +\infty} L(x_k, y_k) = \lim_{\|(x_k, y_k)\| \rightarrow +\infty} \delta x_k - \gamma \ln x_k + \beta y_k - \alpha \ln y_k + \text{constante}$$

Para toda sequência  $(x_k, y_k)$  tal que  $\|(x_k, y_k)\| \rightarrow +\infty$  quando  $k \rightarrow +\infty$ , existe uma subsequência  $x_{k_i}$  ou  $y_{k_i}$  convergindo para  $+\infty$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $x_{k_i} \rightarrow +\infty$ . Essa subsequência  $x_k$  pode ser escolhida de forma tal que se ela não for toda a sequência  $x_k$ , então a subsequência  $y_{k_j}$ ,  $k_j \neq k_i$ ,  $\forall i, j \in \mathbb{N}$ , também converge para  $+\infty$ .

Então,  $\delta x_{k_i} - \gamma \ln x_{k_i} \rightarrow +\infty$  e o termo  $\beta y_{k_i} - \alpha \ln y_{k_i}$  vai estar limitado (neste caso, vai ser superado pelo valor de  $\delta x_{k_i} - \gamma \ln x_{k_i}$ ) ou vai ter uma subsequência indo para  $+\infty$  e outra subsequência limitada, sabemos que  $y_{k_i} \rightarrow +\infty$  implica  $\beta y_{k_i} - \alpha \ln y_{k_i} \rightarrow +\infty$ . De qualquer forma,

a soma vai para  $+\infty$  e vale  $\lim_{\|(x_{k_i}, y_{k_i})\| \rightarrow +\infty} L(x_{k_i}, y_{k_i}) = +\infty$ .

O raciocínio para provar que  $\lim_{\substack{\|(x_{k_j}, y_{k_j})\| \rightarrow +\infty \\ j \neq i, \forall i, j \in \mathbb{N}}} L(x_{k_j}, y_{k_j}) = +\infty$  é análogo.

Analisemos agora as sequências críticas  $(x_k, y_k)$  tais que  $(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y})$  tal que  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial D$ .

Sendo  $\partial D = F1 \cup F2 \cup F3$ , com

$$F1 = \{(0, y), y > 0\},$$

$$F2 = \{(x, 0), x > 0\},$$

$$F3 = \{(0, 0)\},$$

temos que se  $(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (0, \bar{y})$ ,  $\bar{y} > 0$ , então

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} L(x_k, y_k) = +\infty,$$

porque  $\delta x_k + \beta y_k - \alpha \ln y_k \rightarrow \beta \bar{y} - \alpha \ln \bar{y}$  e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} -\gamma \ln x_k = +\infty$ .

Se  $(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (\bar{x}, 0)$ ,  $\bar{x} > 0$ , então

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} L(x_k, y_k) = +\infty,$$

porque  $\delta x_k - \gamma \ln x_k + \beta y_k \rightarrow \delta \bar{x} - \gamma \ln \bar{x}$  e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} -\alpha \ln y_k = +\infty$ .

De maneira análoga, temos que se  $(x_k, y_k) \rightarrow (0, 0)$  ou  $(x_k, y_k) \rightarrow (+\infty, 0)$  ou  $(x_k, y_k) \rightarrow (0, +\infty)$  então  $\lim_{k \rightarrow +\infty} L(x_k, y_k) = +\infty$ .

Conclusão:  $\lim_{k \rightarrow +\infty} L(x_k, y_k) = +\infty$ , para toda sequência crítica  $(x_k, y_k)$ .

Usando o teorema 1.4.2, que garante a existência de um mínimo global para  $L(x, y)$  na região  $D$ , que no nosso caso é  $D = \{(x, y) \mid x >$

$0, y > 0\}$ , temos que  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ , que é o único ponto de mínimo local, é também mínimo global e portanto  $L(x, y) > L\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = 0, \forall (x, y) \neq \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ , assim sendo satisfeita a segunda condição do Teorema de Liapunov.

- $\dot{L} \leq 0$  em  $O - \{X^*\}$  pois

$$L(x, y) = \delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y + \delta \ln \frac{\alpha}{\beta} - \alpha + \gamma \ln \frac{\gamma}{\delta} - \gamma.$$

Logo

$$\dot{L}(x, y) = \delta x' - \gamma \frac{1}{x} x' + \beta y' - \alpha \frac{1}{y} y', \quad x > 0, \quad y > 0. \quad (2.2)$$

Substituindo  $x' = \alpha x - \beta xy$  e  $y' = -\gamma y + \delta xy$  em (2.2) temos que  $\dot{L}(x, y) = 0$ , o que já sabíamos porque  $L$  é constante ao longo das trajetórias.

Portanto,

$$L(x, y) = \delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y + \alpha \ln \frac{\alpha}{\beta} - \alpha + \gamma \ln \frac{\gamma}{\delta} - \gamma$$

é função de Liapunov para o modelo de Lotka-Volterra, e fazendo uso do Teorema de Liapunov (teorema 1.3.2), concluímos que o ponto  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  é um ponto de equilíbrio estável.

## 2.3 Órbitas periódicas

**Teorema 2.3.1** *Toda solução do sistema presa-predador é uma órbita fechada, exceto no ponto de equilíbrio  $X^* = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  e nas soluções contidas nos eixos coordenados.*

**Prova 2.3.1** *Suponha que a órbita do ponto  $(x_0, y_0)$  não é periódica com  $x_0 > 0$  e  $y_0 > 0$ . Considere as interseções dessa órbita com a nuliclinal  $y = \frac{\alpha}{\beta}$  para  $t > 0$ . Seja  $t_1 > 0$  o tempo em que acontece a primeira interseção no ponto  $\left(x_1, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ , a segunda para  $t_2$  no ponto  $\left(x_2, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  e a  $n$ ésima em  $\left(x_n, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ . Se em algum momento  $x_n = x_{n-j}$ ,  $n > j$ , então a órbita é periódica, pela unicidade da solução. Caso contrário, a sequência  $x_n$  tem que ter infinitos valores diferentes e portanto um ponto de acumulação  $p$  finito ou infinito, ou seja, existe uma subsequência  $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} p$ . Em qualquer caso,  $L\left(x_{n_k}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = c$ ,  $c$  constante, porque todos estes pontos estão na órbita e  $L$  é constante nas órbitas. Pela continuidade de  $L$ , temos que  $L\left(p, \frac{\alpha}{\beta}\right) = c$ . Por outro lado,  $L\left(x, \frac{\alpha}{\beta}\right) = cte + \delta x - \gamma \ln x$ ,  $x > 0$ . Chamando  $g(x) = \delta x - \gamma \ln x$ ,  $x > 0$ ,  $g'(x) = \delta - \frac{\gamma}{x} > 0$  para  $x > \frac{\gamma}{\delta}$  e  $g'(x) = \delta - \frac{\gamma}{x} < 0$  para  $x < \frac{\gamma}{\delta}$ . Logo  $L$  é crescente para valores de  $x > \frac{\gamma}{\delta}$  com  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  e decrescente para valores de  $x < \frac{\gamma}{\delta}$  com  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ . Portanto,  $g(x)$  não pode atingir um mesmo valor infinitas vezes. Isto contradiz a suposição de que a órbita no ponto  $(x_0, y_0)$  não é periódica, e pela unicidade da solução, temos que a órbita irá ser periódica em  $(x_n, y_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .*



## Capítulo 3

# Resolução numérica do modelo de Lotka-Volterra

Neste capítulo, faremos uso de alguns métodos conhecidos para resolução numérica do modelo de Lotka-Volterra. Como veremos adiante, alguns destes métodos ilustram comportamentos qualitativos errados das soluções numéricas. Serão implementados no *software* MATLAB 7.1 os métodos de Euler explícito, Euler implícito, Euler simplético e Runge-Kutta de ordem quatro para o modelo de Lotka-Volterra.

Consideremos um sistema de equações da forma

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y). \end{cases} \quad (3.1)$$

### 3.1 Resolução numérica do modelo de Lotka-Volterra pelo método de Euler explícito

O método de Euler explícito é um processo iterativo de primeira ordem para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias (EDOs) que parte de uma solução inicial e utiliza o resultado da iteração anterior para encontrar a solução do passo seguinte.

O método de Euler explícito para o sistema (3.1) é:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + hg(x_n, y_n) \end{cases}$$

onde  $h$  (fixo) é o tamanho do passo temporal utilizado para calcular, uma após a outra as aproximações de  $(x_n, y_n)$ .

Para o modelo de Lotka-Volterra,

$$f(x_n, y_n) = \alpha x_n - \beta x_n y_n = x_n(\alpha - \beta y_n),$$

$$g(x_n, y_n) = -\gamma y_n + \delta x_n y_n = y_n(-\gamma + \delta x_n).$$

Logo,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hx_n(\alpha - \beta y_n) \\ y_{n+1} = y_n + hy_n(-\gamma + \delta x_n). \end{cases}$$

**Exemplo 3.1** *Sejam  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 2$ . Consideremos também  $h = 0.01$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 20$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$  onde  $h =$  tamanho do passo,  $t_0 =$  tempo inicial,  $T =$  tempo final,  $x_0 =$  população inicial de presas,  $y_0 =$  população inicial de predadores.*

*Utilizando o programa “LV\_eulerexp”, anexo 1, obtemos a Figura 3.1.*

*Observe que a solução gira em espiral no sentido trigonométrico ao invés de ser uma órbita fechada.*

*Na Figura 3.2 é plotado  $H(x, y)$  avaliado nos pontos da solução numérica na medida que o tempo avança. Observa-se que  $H(x, y)$  começa no valor 3 em  $t = 0$  e cresce até o valor 3.065 em  $t = 20$ , ou seja, o valor do invariante vai aumentando na medida que o tempo avança. Logo, este método nos dá um erro relativo para  $H(x, y)$  de 2.2%.*

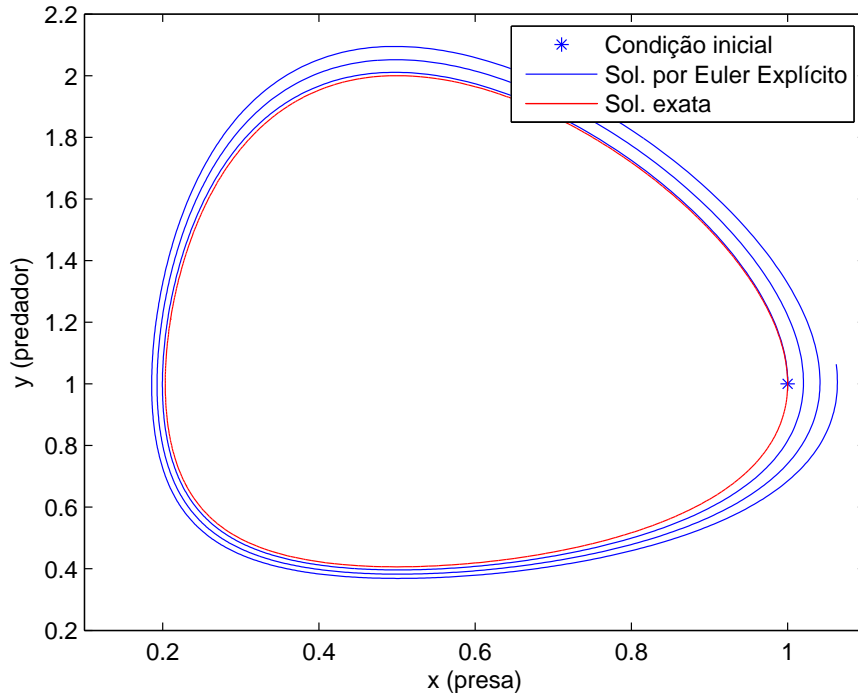


Figura 3.1: Resolução Numérica do Modelo de Lotka-Volterra através do método de Euler explícito e a solução exata dada pela curva de nível  $H(x, y) = 3$  para  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$  e  $\delta = 2$ .

### 3.2 Resolução numérica do modelo de Lotka-Volterra pelo método de Euler implícito

O método de Euler implícito é um método iterativo que parte de uma solução inicial, e que utiliza o resultado da iteração anterior (passo  $n$ ) e também da iteração atual (passo  $n + 1$ ) para descrever os valores da iteração  $n + 1$ . Com isto, o método é implícito porque em geral os valores da iteração  $n + 1$  não ficam em evidência.

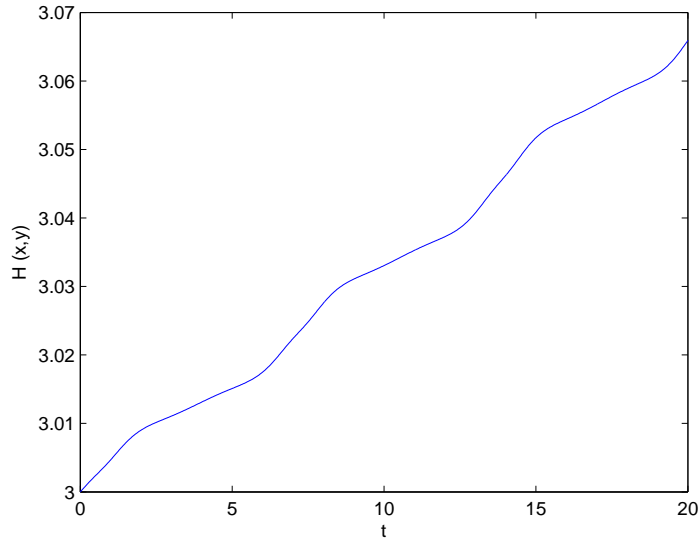


Figura 3.2:  $H(x, y)$  ao longo da solução numérica calculada através do método de Euler explícito.

O método de Euler implícito para o sistema (3.1) é:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_{n+1} = y_n + hg(x_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

Para o modelo de Lotka-Volterra,

$$f(x_{n+1}, y_{n+1}) = x_{n+1}(\alpha - \beta y_{n+1}),$$

$$g(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_{n+1}(-\gamma + \delta x_{n+1}).$$

Porém, para escrever  $x_{n+1}$  em função do passo anterior, precisamos resolver uma equação de segundo grau em  $y_{n+1}$  e  $x_{n+1}$ , que pode ser bastante complicada. Por isso, usamos uma predição utilizando o método de Euler explícito, isto é, calculamos  $x_{n+1}$  e  $y_{n+1}$  através do método de Euler explícito e substituímos os valores obtidos do lado direito da equação implícita. Nós não achamos  $x_{n+1}$ ,  $y_{n+1}$  via iterações de ponto fixo, de fato, estamos fazendo somente uma iteração de ponto fixo.

Logo,

$$\begin{cases} x_p = x_n + hx_n(\alpha - \beta y_n) \\ y_p = y_n + hy_n(-\gamma + \delta x_n) \\ x_{n+1} = x_n + hx_p(\alpha - \beta y_p) \\ y_{n+1} = y_n + hy_p(-\gamma + \delta x_p). \end{cases}$$

**Exemplo 3.2** Consideremos os mesmos dados do exemplo 3.1. Através do programa “LV\_eulerimp”, anexo 2, obtemos a Figura 3.3.

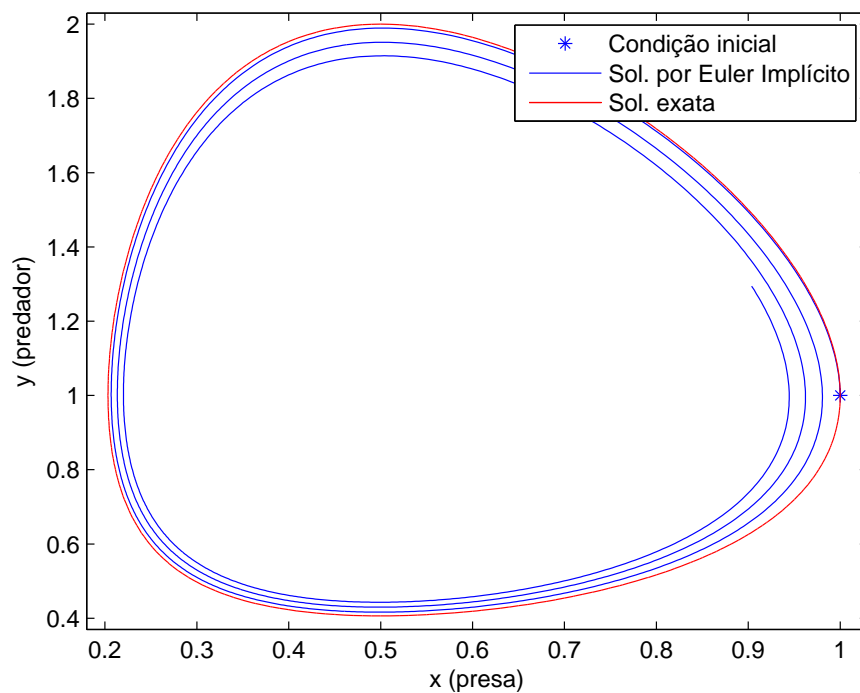


Figura 3.3: Resolução numérica do modelo de Lotka-Volterra através do método de Euler implícito e a solução exata dada pela curva de nível  $H(x, y) = 3$  para  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$  e  $\delta = 2$ .

*Observe que a solução gira em espiral no sentido trigonométrico ao invés*

de ser uma órbita fechada.

Na Figura 3.4 é plotado  $H(x, y)$  avaliado nos pontos da solução numérica na medida que o tempo avança. Observa-se que  $H(x, y)$  começa no valor 3 em  $t = 0$  e decresce para o valor 2.945 em  $t = 20$ , ou seja, o valor do invariante vai diminuindo a medida que o tempo avança. Logo, este método nos dá um erro relativo para  $H(x, y)$  de 1.8%.

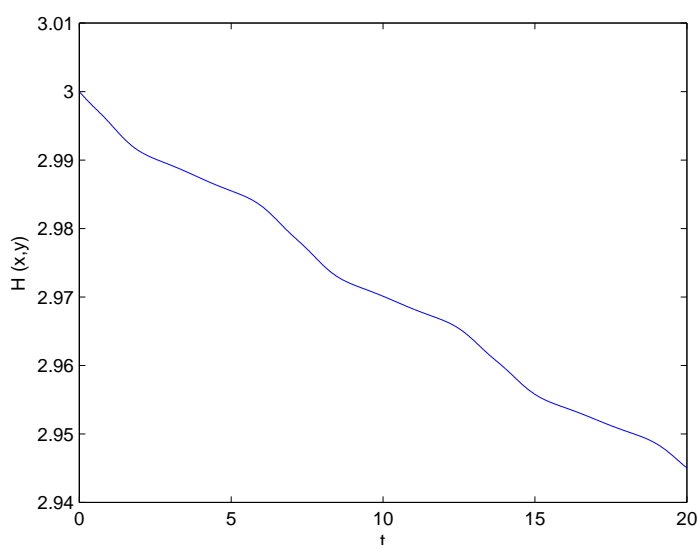


Figura 3.4:  $H(x, y)$  ao longo da solução numérica calculada através do método de Euler implícito.

### 3.3 Resolução numérica do modelo de Lotka-Volterra pelo método de Euler simplético

O método de Euler simplético, também conhecido como Euler particionado, é uma modificação do método de Euler, no qual o método é particionado e uma variável é tratada como no método de Euler explícito e outra como no

método de Euler implícito.

O método de Euler simplético para o sistema (3.1) é:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(x_n, y_{n+1}) \\ y_{n+1} = y_n + hg(x_n, y_{n+1}) \end{cases}$$

Para o modelo de Lotka-Volterra,

$$f(x_n, y_{n+1}) = x_n(\alpha - \beta y_{n+1}),$$

$$g(x_n, y_{n+1}) = y_{n+1}(-\gamma + \delta x_n).$$

Logo,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hx_n(\alpha - \beta y_{n+1}) \\ y_{n+1} = y_n + hy_{n+1}(-\gamma + \delta x_n), \end{cases} \quad (3.2)$$

donde  $y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + h(\gamma - \delta x_n)}$ , desde que  $x_n \neq \frac{1}{\delta h} + \frac{\gamma}{\delta}$ ,  $\delta, h > 0$ .

Substituindo o valor de  $y_{n+1}$  na primeira das equações, encontramos  $x_{n+1}$ .

**Exemplo 3.3** *Consideremos os mesmos dados do exemplo 3.1. Através do programa “LV\_eulersim”, anexo 3, obtemos a Figura 3.5.*

*Na Figura 3.6 é plotado  $H(x, y)$  avaliado nos pontos da solução numérica na medida que o tempo avança. Observa-se que  $H(x, y)$  começa no valor 3 em  $t = 0$  e fica oscilando entre os limites 2.9982 e 3.0025 a medida que o tempo avança, ou seja,  $H(x, y)$  é aproximadamente constante ao longo do tempo, com um erro relativo para  $H(x, y)$  de 0.1% .*

Logo, o método de Euler simplético representa bem a solução do problema. Este fato nos leva a estudar um pouco mais sobre este método aplicado ao modelo de Lotka-Volterra.

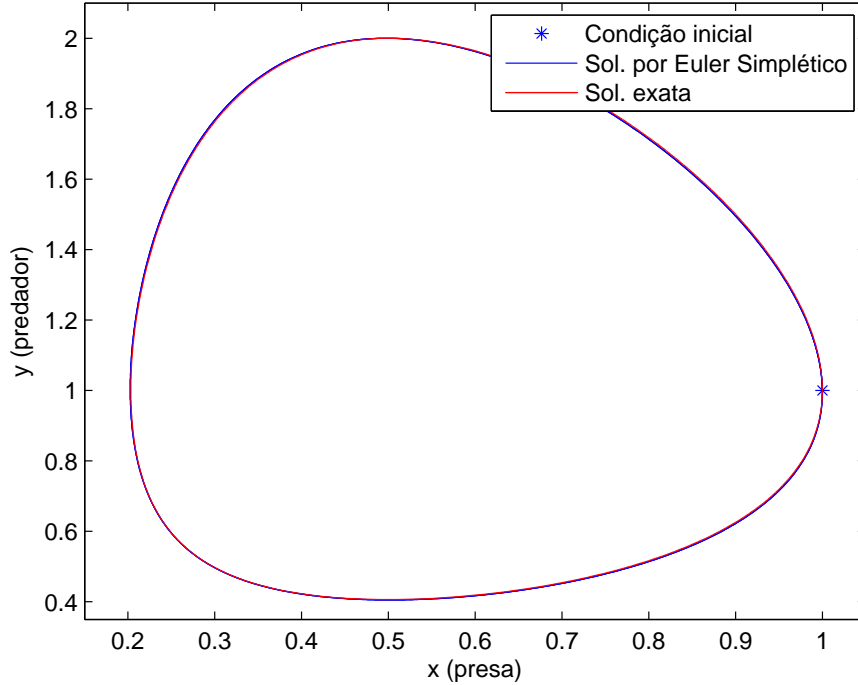


Figura 3.5: Resolução numérica do modelo de Lotka-Volterra através do método de Euler simplético e a solução exata dada pela curva de nível  $H(x, y) = 3$  para  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$  e  $\delta = 2$ .

**Definição 3.3.1** *Um mapa linear  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é simplético se  $A^T J A = J$ , onde  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .*

**Definição 3.3.2** *Um mapa  $G : O \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $O$  aberto de  $\mathbb{R}^2$ , é simplético se a matriz Jacobiana em cada ponto  $G'(x, y)$  satisfaz  $G'(x, y)^T J G'(x, y) = J$ .*

Para um sistema Hamiltoniano ( $\dot{x} = -H_y(x, y)$ ,  $\dot{y} = H_x(x, y)$ ), o método de Euler simplético é simplético de ordem 1 (este resultado é conhecido como Teorema de Vogelaere 1956, ver [2], página 189). Porém, o sistema de Lotka-Volterra não é um sistema Hamiltoniano. Mas ele é simplético no ponto de equilíbrio  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ .



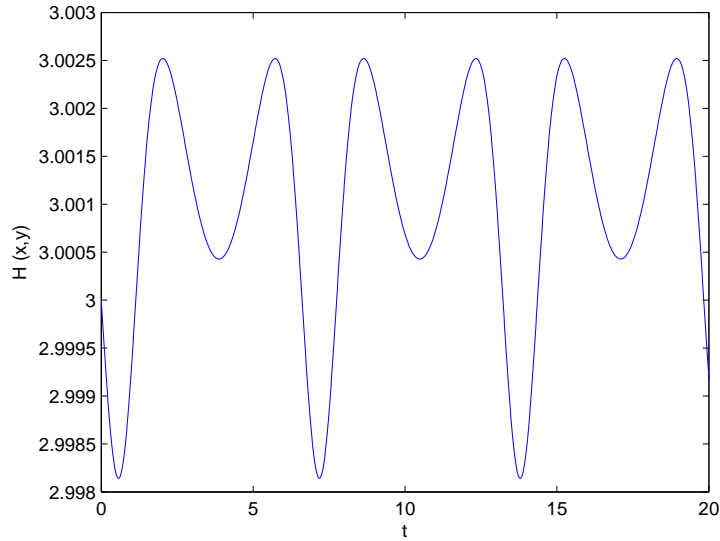


Figura 3.6:  $H(x, y)$  ao longo da solução numérica calculada através do método de Euler simplético.

Vamos verificar que o método de Euler simplético é simplético para o modelo de Lotka-Volterra no ponto de equilíbrio  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ , o que tem um bom efeito no comportamento das soluções numéricas perto deste ponto de equilíbrio:

Pela equação (3.2), temos que

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + h(\gamma - \delta x_n)} \quad \text{e} \quad x_{n+1} = x_n + \alpha h x_n - \frac{\beta h x_n y_n}{1 + h(\gamma - \delta x_n)}.$$

Logo,

$$G(x, y) = \left( x + \alpha h x - \frac{\beta h x y}{1 + h(\gamma - \delta x)}, \frac{y}{1 + h(\gamma - \delta x)} \right).$$

Temos que

$$G'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha h - \frac{\beta h y}{1 + h(\gamma - \delta x)} - \frac{\beta \delta h^2 x y}{[1 + h(\gamma - \delta x)]^2} & -\frac{\beta h x}{1 + h(\gamma - \delta x)} \\ \frac{\delta h y}{[1 + h(\gamma - \delta x)]^2} & \frac{1}{1 + h(\gamma - \delta x)} \end{pmatrix}.$$

Chamando  $\eta(x, y) = \frac{1 + \gamma h - \delta h x + \alpha h + \alpha \gamma h^2 - \alpha \delta h^2 x - \beta h y}{[1 + h(\gamma - \delta x)]^2}$ , temos que

$$G'(x, y)^T JG(x, y)' = \begin{pmatrix} 0 & \eta(x, y) \\ -\eta(x, y) & 0 \end{pmatrix}.$$

No ponto de equilíbrio  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ , temos que  $\eta\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = 1$ , ou seja,

$$G'\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)^T JG'\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo  $\det\left(G'\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)^T JG'\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)\right) = 1$ , isto é, a área é preservada. Este resultado já é um indício de por que o método de Euler simplético representa bem a solução exata do modelo estudado.

Multiplicando a primeira equação do sistema (3.2) por  $\delta$ , e a segunda equação por  $\beta$ , e depois somando as duas, obtemos:

$$\delta x_{n+1} + \beta y_{n+1} = \delta x_n + \alpha \delta h x_n - \beta \delta h x_n y_{n+1} + \beta y_n - \beta \gamma h y_{n+1} + \beta \delta h x_n y_{n+1}.$$

Simplificando:

$$\delta x_{n+1} + \beta y_{n+1} = \delta x_n + \beta y_n + h(\alpha \delta x_n - \beta \gamma y_{n+1}).$$

Ou seja,  $\delta x_{n+1} + \beta y_{n+1} = \delta x_n + \beta y_n + \omega$ , onde  $\omega$  representa um termo de ordem  $h$ . Comparando com o invariante  $H(x, y) = \delta x + \beta y - \gamma \ln x - \alpha \ln y$ , observamos que temos o mesmo termo linear  $(\delta x + \beta y)$  em ambas as expressões. Isso justifica o fato de que para o método de Euler simplético o invariante  $H(x, y)$  se mantém quase constante ao longo do tempo, salvo um erro de magnitude  $h$ .

### 3.4 Resolução numérica do modelo de Lotka-Volterra pelo método de Runge-Kutta de ordem quatro

O método de Runge-Kutta é uma importante família de métodos iterativos para aproximação de soluções de EDOs.

Os valores  $x_{n+1}$  e  $y_{n+1}$  são determinados pelo valor atual de  $x_n$  e  $y_n$ , mais o produto do tamanho do intervalo  $h$  e uma inclinação estimada. A inclinação é uma média ponderada de inclinações:

- $F1$  e  $\bar{F}1$  são as inclinações no início do intervalo;
- $F2$  e  $\bar{F}2$  são as inclinações no ponto médio do intervalo, usando as inclinações  $F1$  e  $\bar{F}1$  para determinar os valores de  $x$  e  $y$  respectivamente no ponto  $t_n + h/2$  através do método de Euler;
- $F3$  e  $\bar{F}3$  são novamente as inclinações no ponto médio, mas agora usando as inclinações  $F2$  e  $\bar{F}2$  para determinar os valores de  $x$  e  $y$  respectivamente;
- $F4$  e  $\bar{F}4$  são as inclinações no final do intervalo, com os valores de  $x$  e  $y$  determinados usando  $F3$  e  $\bar{F}3$ .

Ou seja, o método de Runge-Kutta de ordem quatro para o sistema (3.1) é:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(F1 + F2 + F3 + F4) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(\bar{F}1 + \bar{F}2 + \bar{F}3 + \bar{F}4) \end{cases}$$

Onde:

$$F1 = f(t_n, x_n, y_n)$$

$$\bar{F}1 = g(t_n, x_n, y_n)$$

$$F2 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}F1, y_n + \frac{h}{2}\bar{F}1)$$

$$\bar{F}2 = g(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}F1, y_n + \frac{h}{2}\bar{F}1)$$

$$F3 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}F2, y_n + \frac{h}{2}\bar{F}2)$$

$$\bar{F}3 = g(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}F2, y_n + \frac{h}{2}\bar{F}2)$$

$$F4 = f(t_n + h, x_n + hF3, y_n + h\bar{F}3)$$

$$\bar{F}4 = g(t_n + h, x_n + hF3, y_n + h\bar{F}3)$$

Para o modelo de Lotka-Volterra,

$$f(x_n, y_n) = x_n(\alpha - \beta y_n),$$

$$g(x_n, y_n) = y_n(-\gamma + \delta x_n).$$

Logo,

$$F1 = x_n(\alpha - \beta y_n)$$

$$\bar{F}1 = y_n(-\gamma + \delta x_n)$$

$$F2 = (x_n + \frac{h}{2}F1)(\alpha - \beta(y_n + \frac{h}{2}\bar{F}1))$$

$$\bar{F}2 = (y_n + \frac{h}{2}\bar{F}1)(-\gamma + \delta(x_n + \frac{h}{2}F1))$$

$$F3 = (x_n + \frac{h}{2}F2)(\alpha - \beta(y_n + \frac{h}{2}\bar{F}2))$$

$$\bar{F}3 = (y_n + \frac{h}{2}\bar{F}2)(-\gamma + \delta(x_n + \frac{h}{2}F2))$$

$$F4 = (x_n + hF3)(\alpha - \beta(y_n + h\bar{F}3))$$

$$\bar{F}4 = (y_n + h\bar{F}3)(-\gamma + \delta(x_n + hF3))$$

**Exemplo 3.4** Consideremos os mesmos dados do exemplo 3.1. Através do programa “LV\_RK4”, anexo 4, obtemos a Figura 3.7.

Na Figura 3.8 é plotado  $H(x, y)$  avaliado nos pontos da solução numérica na medida que o tempo avança. Observa-se que  $H(x, y)$  é aproximadamente constante ao longo do tempo, com um erro relativo para  $H(x, y)$  de  $5 \times 10^{-11}\%$ .

### 3.5 Comparação entre os métodos

Pelo teorema 2.3.1, sabemos que as soluções do modelo de Lotka-Volterra são órbitas fechadas (exceto no ponto de equilíbrio  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  e nos eixos coordenados). Para os métodos de Euler explícito e implícito, o comportamento qualitativo do sistema de Lotka-Volterra é incorreto, pois temos soluções em espirais, onde o invariante  $H(x, y)$  cresce e decresce respectivamente ao longo

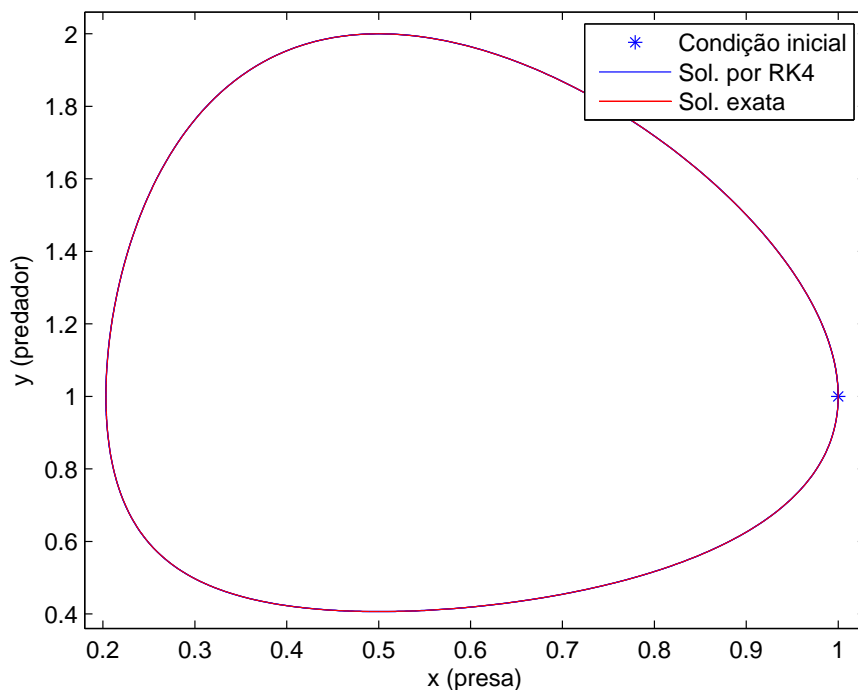


Figura 3.7: Resolução Numérica do Modelo de Lotka-Volterra através do método de Runge-Kutta de ordem quatro e a solução exata dada pela curva de nível  $H(x, y) = 3$  para  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$  e  $\delta = 2$ .

do tempo, em contraste com o método de Euler simplético, que representa bem a periodicidade das órbitas, mantendo o invariante praticamente constante. Os três métodos são de ordem 1 e na Seção 3.3 analisamos o método de Euler simplético para tentar entender por quê funciona tão bem.

O método de Runge-Kutta de ordem quatro, como o próprio nome diz, é de ordem 4, isto é, o método é bem mais preciso do que os outros métodos analisados. Isto justifica o excelente desempenho do método aplicado ao modelo de Lotka-Volterra.

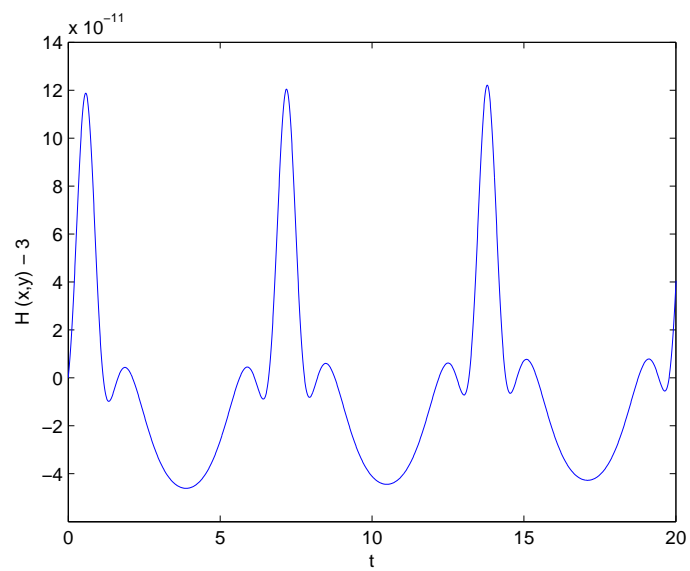


Figura 3.8:  $H(x, y) - 3$  ao longo da solução numérica calculada através do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

# Conclusão

Apesar do modelo de Lotka-Volterra não representar bem as complexas relações existentes na natureza, pois apenas tratamos da interação básica entre duas espécies, desconsiderando outros fatores ambientais, o seu estudo foi bastante vantajoso para compreender diversas propriedades que podem ser aplicadas a modelos mais realistas.

Vimos que as soluções do modelo de Lotka-Volterra são órbitas fechadas, ou seja, para haver coexistência entre as espécies, a solução é um ciclo fechado, isto é, nenhuma das espécies irá se extinguir nem crescer ser limites.

Observamos que os métodos de Euler explícito e implícito não preservam o invariante do modelo, ou seja, o valor do invariante não é constante ao longo das órbitas. Já para o método de Euler simplético, é observada uma boa solução para o modelo, pois o valor do invariante se mantém constante com um erro de 0.1%. O método de Runge-Kutta de quarta ordem também é aplicado à resolução do modelo e é o que melhor se aproxima da solução exata, pois ele é um método com maior precisão devido a sua ordem.

## **Motivação para trabalhos futuros**

Pode-se fazer uma análise mais detalhada do método de Runge-Kutta de quarta ordem para estudar suas propriedades qualitativas quando aplicado ao modelo de Lotka-Volterra. Também é interessante estudar o método de Runge-Kutta simplético aplicado ao modelo.



# Anexos

1. Programa “LV\_eulerexp”, implementado em MATLAB:

```
function [x,y]=LV_eulerexp(h,t0,T,x0,y0,alpha,beta,gamma,delta)
%h=tamanho do passo, t0=tempo inicial, T=tempo final,
%x0=pop inicial de presas, y0=pop inicial de predadores,
%alpha, beta, gamma, delta parâmetros.
n=(T-t0)/h+1;
t=t0;
x=x0;
y=y0;
t(1)=t0;
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for i=1:n
    x(i+1)=x(i)+(x(i)*(alpha-beta*y(i)))*h;
    y(i+1)=y(i)+(y(i)*(-gamma+delta*x(i)))*h;
    t(i+1)=t(i)+h;
end
end
```

2. Programa “LV\_eulerimp”, implementado em MATLAB:

```

function [x,y]=LV_eulerimp(h,t0,T,x0,y0,alpha,beta,gamma,delta)
%h=tamanho do passo, t0=tempo inicial, T=tempo final,
%x0=pop inicial de presas, y0=pop inicial de predadores,
%alpha, beta, gamma, delta parâmetros.
n=(T-t0)/h+1;
t=t0;
x=x0;
y=y0;
t(1)=t0;
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for i=1:n
    xp=x(i)+h*x(i)*(alpha-beta*y(i));
    yp=y(i)+h*y(i)*(-gamma+delta*x(i));
    x(i+1)=x(i)+h*xp*(alpha-beta*yp);
    y(i+1)=y(i)+h*yp*(-gamma+delta*xp);
    t(i+1)=t(i)+h;
end
end

```

3. Programa “LV\_eulersim”, implementado em MATLAB:

```

function [x,y]=LV_eulersim(h,t0,T,x0,y0,alpha,beta,gamma,delta)
%h=tamanho do passo, t0=tempo inicial, T=tempo final,
%x0=pop inicial de presas, y0=pop inicial de predadores,
%alpha, beta, gamma, delta parâmetros.
n=(T-t0)/h+1;
t=t0;
x=x0;
y=y0;
t(1)=t0;
x(1)=x0;

```

```

y(1)=y0;
for i=1:n
    y(i+1)=y(i)/(1+gamma*h-delta*h*x(i));
    x(i+1)=x(i)+h*(alpha*x(i)-beta*x(i)*y(i+1));
    t(i+1)=t(i)+h;
end
end

```

4. Programa “LV\_RK4”, implementado em MATLAB:

```

function [x,y]=LV_RK4(h,t0,T,x0,y0,alpha,beta,gamma,delta)
%h=tamanho do passo, t0=tempo inicial, T=tempo final,
%x0=pop inicial de presas, y0=pop inicial de predadores,
%alpha, beta, gamma, delta parâmetros.
n=(T-t0)/h+1;
t=t0;
x=x0;
y=y0;
t(1)=t0;
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for i=1:n
    F1x=x(i)*(alpha-beta*y(i));
    F1y=y(i)*(-gamma+delta*x(i));
    F2x=(x(i)+(F1x*h)/2)*(alpha-beta*(y(i)+(F1y*h)/2));
    F2y=(y(i)+(F1y*h)/2)*(-gamma+delta*(x(i)+(F1x*h)/2));
    F3x=(x(i)+(F2x*h)/2)*(alpha-beta*(y(i)+(F2y*h)/2));
    F3y=(y(i)+(F2y*h)/2)*(-gamma+delta*(x(i)+(F2x*h)/2));
    F4x=(x(i)+(F3x*h))*(alpha-beta*(y(i)+(F3y*h)));
    F4y=(y(i)+(F3y*h))*(-gamma+delta*(x(i)+(F3x*h)));
    x(i+1)=x(i)+h*(F1x+2*F2x+2*F3x+F4x)/6;
    y(i+1)=y(i)+h*(F1y+2*F2y+2*F3y+F4y)/6;
end

```

```
t(i+1)=t(i)+h;  
end  
end
```

# Referências Bibliográficas

- [1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8ª edição. LTC, 2006.
- [2] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner. *Geometric Numerical Integration*. 2ª edição. Springer, 2006.
- [3] M. W. Hirsch, S. Smale and R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. 2ª edição. Elsevier Academic Press, 2004.
- [4] A. Izmailov, M. Solador . *Otimização - Condições de otimalidade, elementos de análise convexa e dualidade*. Volume 1. IMPA, 2005.
- [5] J. Stewart. *Cálculo*. 5ª edição. Pioneira Thomson, 2005.