Teorema da Folga Complementar

Sejam os problemas primal e dual

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \min\ D = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,2,\ldots, m \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad j = 1,2,\ldots, n$$

$$x_j \ge 0 \quad j = 1,2,\ldots, n \qquad\qquad y_i \ge 0 \quad i = 1,2,\ldots, m$$

Nomenclatura

- Z: função objetivo do primal a ser maximizada
- D: função objetivo do dual a ser minimizada
- Z*: valor ótimo para Z
- D*: valor ótimo para D
- x_j: solução viável do primal
- y_i: solução viável do dual
- x_j^*: solução ótima do primal
- y_i^*: solução ótima do dual

Seja o primal representado pelo *tableau* inicial

Base	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}	b	
Z	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	0	**(0)**
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	b_1	**(1)**
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	b_2	**(2)**
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	**...**
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	b_m	**(m)**

As variáveis do PRIMAL são: x_j (j=1,2,...,n)
As variáveis de folga do PRIMAL são: x_{n+i} (i=1,2,...,m)
As variáveis do DUAL são: y_i (i=1,2,...,m)
As variáveis de folga do DUAL são: y_{m+j} (j=1,2,...,n)

Após algumas iterações tem-se o seguinte *tableau*

Base	x_1 x_j ... x_n	x_{n+1} x_{n+i} ... x_{n+m}	b	
Z	$\bar{c}_j = p_j - c_j$	$\bar{c}_{n+i} = p_{n+i}$		**(0)**
				(1) **(2)** **...** **(m)**

$p_j - c_j$ coeficiente de x_j na função objetivo (linha **(0)**) para j=1,2,...,n;

p_j quantidade líquida acrescentada ao coeficiente $-c_j$ (j=1,2,...,n) Linha **(0)**;

p_{n+i} coeficiente atual de x_{n+1} na linha **(0)** para i=1,2,...,m.

Teorema

(a) O valor ótimo da variável y_i do dual é igual ao coeficiente na linha **(0)** do quadro ótimo da variável de folga x_{n+i} do primal, isto é, $y_i^* = p_{n+i}^*$, $(i = 1,2,\ldots, m)$.

(b) O valor ótimo da variável de folga y_{m+j} do dual é igual ao coeficiente na linha **(0)** do quadro ótimo da variável x_j do primal, isto é, $y^*_{m+j} = p^*_j - c_j,\ (j = 1,2,\dots,n)$

Dem.: (**a**) $c_{n+i} = 0,\ i = 1,\dots,m$. No *tableau* ótimo, na linha (0) o coeficiente da variável x_{n+i} é p^*_{n+i}. Logo pode-se dizer que a *i*-ésima linha foi somada p^*_{n+i} vezes à linha (0) do *tableau* inicial. isto é

(i) $p^*_j = \sum_{i=1}^{m} p^*_{n+i} a_{ij}$ (j=1,2,...,n) (ii) $Z^* = \sum_{i=1}^{m} p^*_{n+i} b_i$

Como a solução do primal é ótima, todos os coeficientes da linha (0) do tableau final são positivos ou nulos, então

(iii) $p^*_{n+i} \geq 0, i = 1,2,\dots,m$ (iv) $p^*_j - c_j \geq 0 \therefore p^*_j \geq c_j,\ j = 1,2,\dots,n$

(v) $\sum_{i=1}^{m} p^*_{n+i} a_{ij} \geq c_j,\ j = 1,2,\dots,n$

Portanto, de (v) tem-se que p^*_{n+i} i=1,2,...,m é uma solução viável do dual

Logo, a função objetivo será $D = \sum_{i=1}^{m} p^*_{n+i} b_i$. Sabe-se que $Z \leq D$ e da solução (ii) que

$Z^* = \sum_{i=1}^{m} p^*_{n+i} b_i$. Como x^*_j, j=1,2,...,n é solução ótima do primal vem que

$Z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x^*_j = \sum_{i=1}^{m} p^*_{n+i} b_i = D^*$. Portanto, p^*_{n+i} i=1,2,...,m é solução ótima do dual, isto é

$y^*_i = p^*_{n+i}$ i=1,2,...,m.

(**b**) Provar que $y^*_{m+j} = p^*_j - c_{j,}$ j=1,2,...,n. Tem-se que $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j$,

$y^*_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_j - c_j$ j=1,2,...,n (vi). Da parte (**a**) do teorema tem-se que $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p^*_{n+i} = p^*_j$

(vii). De (vi) e (vii) tem-se que $y^*_{m+j} = p^*_j - c_{j,}$ j=1,2,...,n. ■