Dual Simplex

Tecnologia da Decisão I
TP065

Profª Mariana

Algoritmo Dual Simplex – Motivação

$$\begin{array}{ll} \max & Z = cx \\ \text{sa} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

escolhida uma base viável

$$\begin{array}{ll} \max & Z = c_B x_B + c_N x_N \\ \text{sa} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B \geq 0,\ x_N \geq 0 \end{array}$$

- A solução geral do sistema de restrições é $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$
- E qualquer coluna pode ser obtida por $\overline{A}_j = B^{-1}A_j$, em particular $\overline{b} = B^{-1}b$.
- Isso é válido para um novo b (lado direito do PL), p.ex., b', então $\overline{b'} = B^{-1}b'$.
- Um novo b' pode ocorrer depois que o PL original tiver sido resolvido.

Algoritmo Dual Simplex – Motivação

- Por exemplo seja o PL

$$
\begin{aligned}
\max Z = \; & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\
\text{s.a} \; & x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \quad \text{(restrição de horas-máquina)} \\
& x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq 9 \quad \text{(restrição de matéria-prima)} \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Quadro inicial

Base	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	b
Z	-2	-3	-1			
F_1	1	1	1	1		3
F_2	1	4	7		1	9

Quadro ótimo

Base	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	b
Z			3	5	1	8
x_1	1		-1	4/3	-1/3	1
x_2		1	2	-1/3	1/3	2

- Suponha que a disponibilidade de horas-máquina recuou para 2 unidades. Ou seja, tinhamos $b=[3\ 9]^T$ e agora temos $b'=[2\ 9]^T$. Qual será o novo valor das variáveis básicas (qual a nova solução ótima finita, se existir)?

- Temos duas opções:
  - Substituir b por b' e resolver o novo PL (desvantagens)
  - Atualizar b' ($\overline{b'} = B^{-1} b'$) e verificar o que acontece.

Algoritmo Dual Simplex – Motivação

- Substituindo b por b', tem-se, a partir do quadro ótimo:

Quadro inicial

Base	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	b'
Z	-2	-3	-1			
F_1	1	1	1	1		2
F_2	1	4	7		1	9

Quadro ótimo

Base	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	b'
Z			3	5	1	$\bar{Z}'$
x_1	1		-1	4/3	-1/3	$\overline{b_1}'$
x_2		1	2	-1/3	1/3	$\overline{b_2}'$

$$\overline{b}' = \begin{pmatrix} \overline{b_1}' \\ \overline{b_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- $$b' = [2 \;\; 9]^T \Rightarrow \overline{b}' = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{Z}' = 6$$

- Neste caso, a solução do primal será inviável pois $x_1 < 0$.

- Mas como a solução do dual é viável, há fortes indícios da existência de uma solução viável finita para o primal.

- A procura por esta "possível" solução viável finita pode ser feita usando o algoritmo **Dual Simplex**.

Algoritmo Dual Simplex

- No simplex "primal", a coluna b sempre é não-negativa, e portanto, a solução básica primal é viável em cada iteração.

- E se alguns elementos da coluna b são negativos? Em tal caso, o modelo primal não é viável.

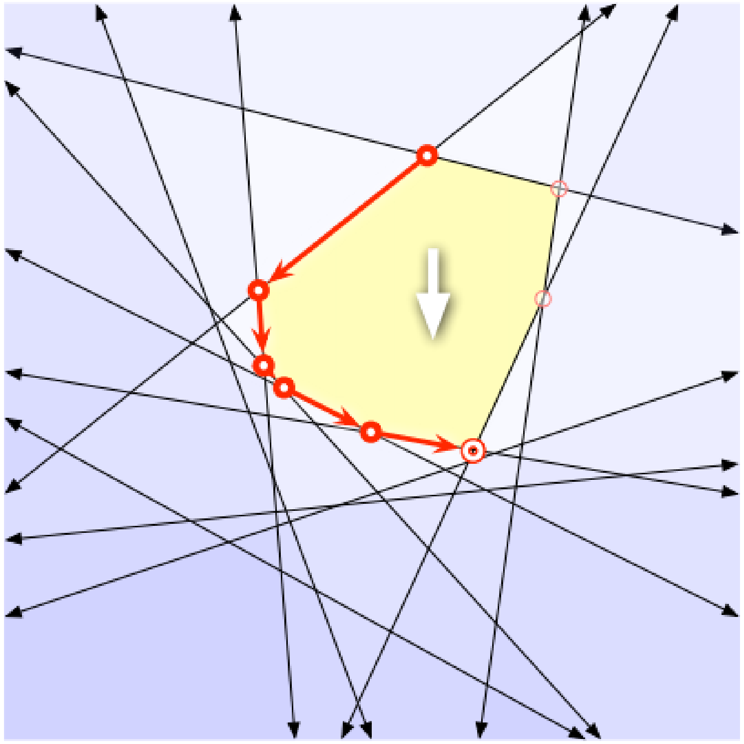
- Neste caso, o Algoritmo Dual Simplex (ADS) pode ser usado.

- ADS: particularmente útil para re-otimizar um problema depois da adição de uma restrição ou algum parâmetro do problema foi alterado (análise de sensibilidade), de tal maneira que a base previamente obtida não é mais viável.

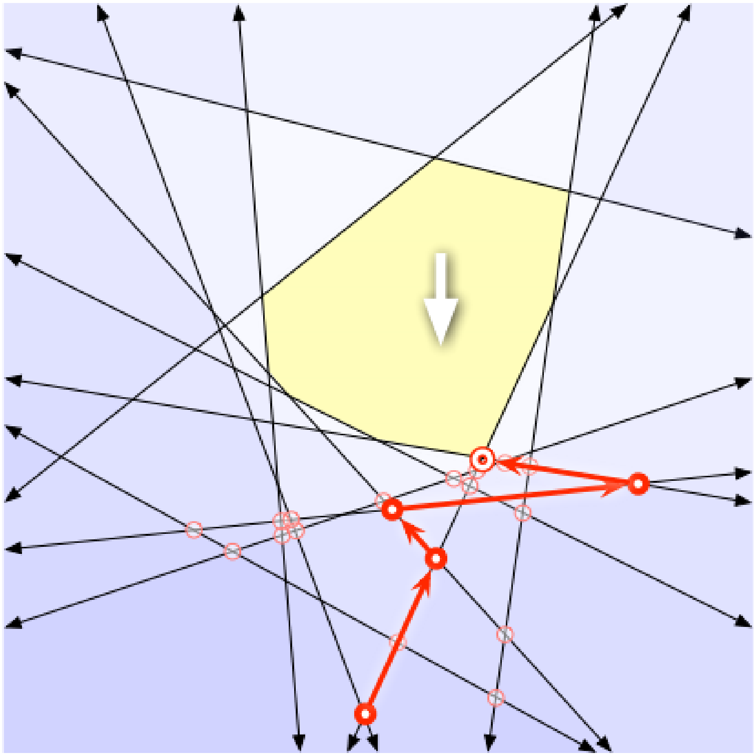
Algoritmo Dual Simplex

- **Em cada iteração do simplex primal:**
  - sempre manter a viabilidade primal ($b \geq 0$)
  - seguir na direção da otimalidade primal (em outras palavras, da viabilidade dual), ou seja, os coeficientes das variáveis na linha (Z) não negativos (≥ 0)
  - antes do quadro ótimo, a solução do dual correspondente sempre é inviável

- **Em cada iteração do dual simplex:**
  - manter sempre otimalidade primal, ou seja, os coeficientes das variáveis na linha (Z) não-negativos (≥ 0)
  - em outras palavras, sempre manter viabilidade dual
  - seguir na direção da viabilidade primal ($b \geq 0$)
  - terminar quando viabilidade primal é atingida, ou seja, todos os elementos da coluna $b \geq 0$



Algoritmo Primal Simplex



Algoritmo Dual Simplex

http://jeffe.cs.illinois.edu/teaching/algorithms/notes/27-simplex.pdf

Algoritmo Dual Simplex

Passo 1: Seleção da variável que sai da base (a mais negativa). Seja

$$b_r = \min_i \{ b_i \text{ para } b_i < 0 \}$$

Assim, a variável básica correspondente à linha r sairá da base.

Passo 2: Seleção da variável que entra na base (aquela que zerar mais rapidamente o coeficiente na linha (Z)). Seja

$$\frac{\underline{c}_k}{a_{rk}} = \max_j \left\{ \frac{\underline{c}_j}{a_{rj}} \text{ para } a_{rj} < 0 \right\}$$

Assim, a variável x_k entra na base.

Se não existe $a_{rj} < 0$, então o problema não tem solução viável.

Passo 3: Achar a nova solução básica em que a variável x_k se torna básica

Passo 4: Teste da viabilidade primal: se todos os b_i forem positivos então pare (solução ótima obtida); caso contrário, volte ao **Passo 1**.

Algoritmo Dual Simplex

Exemplo 1

Considere o PL

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -3x_1 - 4x_2 \\ \text{sa} \quad & -2x_1 + x_2 \leq -2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

<u>Etapa 1</u>: Multiplicar a segunda restrição (–1) para converter para a forma ≤

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -3x_1 - 4x_2 \\ \text{sa} \quad & -2x_1 + x_2 \leq -2 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Algoritmo Dual Simplex – Exemplo 1

Exemplo 1

Etapa 2: Adicionar as variáveis de folga, para converter na forma canônica

$$
\begin{aligned}
\max \quad & Z = -3x_1 - 4x_2 \\
\text{sa} \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\
& -x_1 - 2x_2 + x_4 = -4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

A forma canônica é

$$
\begin{aligned}
Z + 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \\
-2x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 &= -2 \\
-x_1 - 2x_2 + 0x_3 + x_4 &= -4
\end{aligned}
$$

Algoritmo Dual Simplex – Exemplo 1

1º Quadro

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	3	4	0	0	0
x_3	-2	1	1	0	-2
x_4	-1	**-2**	0	1	-4
razão	3/-1=-3	4/-2=-2			

sai

máximo da razão

entra

Algoritmo Dual Simplex – Exemplo 1

2º Quadro

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	1	0	0	2	-8
x_3	**-5/2**	0	1	1/2	-4
x_2	1/2	1	0	-1/2	2
razão	1/(-5/2)=-2/5				

sai

entra

Algoritmo Dual Simplex – Exemplo 1

3º Quadro (quadro final)

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	0	0	2/5	11/5	-48/5
x_1	1	0	-2/5	-1/5	8/5
x_2	0	1	1/5	-2/5	6/5

Note:

Todos os elementos de *b* agora são positivos (≥ 0)

Solução ótima primal finita: $Z = -48/5$, $x_1 = 8/5$, $x_2 = 6/5$

Algoritmo Dual Simplex – Exemplo 2

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
\max \quad & Z = -x_1 - 2x_2 \\
\text{sa} \quad & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -4 \\
& -2x_1 - x_2 + x_3 \leq -6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

1º Quadro

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Z	1	2	0	0	0	0
x_4	-1	2	-1	1	0	-4
x_5	**-2**	-1	1	0	1	-6
razão	1/-2=-1/2	2/-1=-2				

x_5 sai, x_1 entra

Algoritmo Dual Simplex – Exemplo 2

2º Quadro

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Z	0	3/2	1/2	0	½	-3
x_4	0	5/2	**-3/2**	1	-1/2	-1
x_1	1	1/2	-1/2	0	-1/2	3
razão			(1/2)/(-3/2)=-1/3		(1/2)/(-1/2)= -1	

x_4 sai, x_3 entra

3º Quadro (quadro final)

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Z	0	7/3	0	1/3	1/3	-10/3
x_3	0	-5/3	1	-2/3	1/3	2/3
x_1	1	-1/3	0	-1/3	-1/3	10/3

Solução ótima primal finita obtida: Z = -10/3, x_1=10/3, x_2=0