Conceitos e Teoremas

Tecnologia da Decisão I
TP065

Profª Mariana

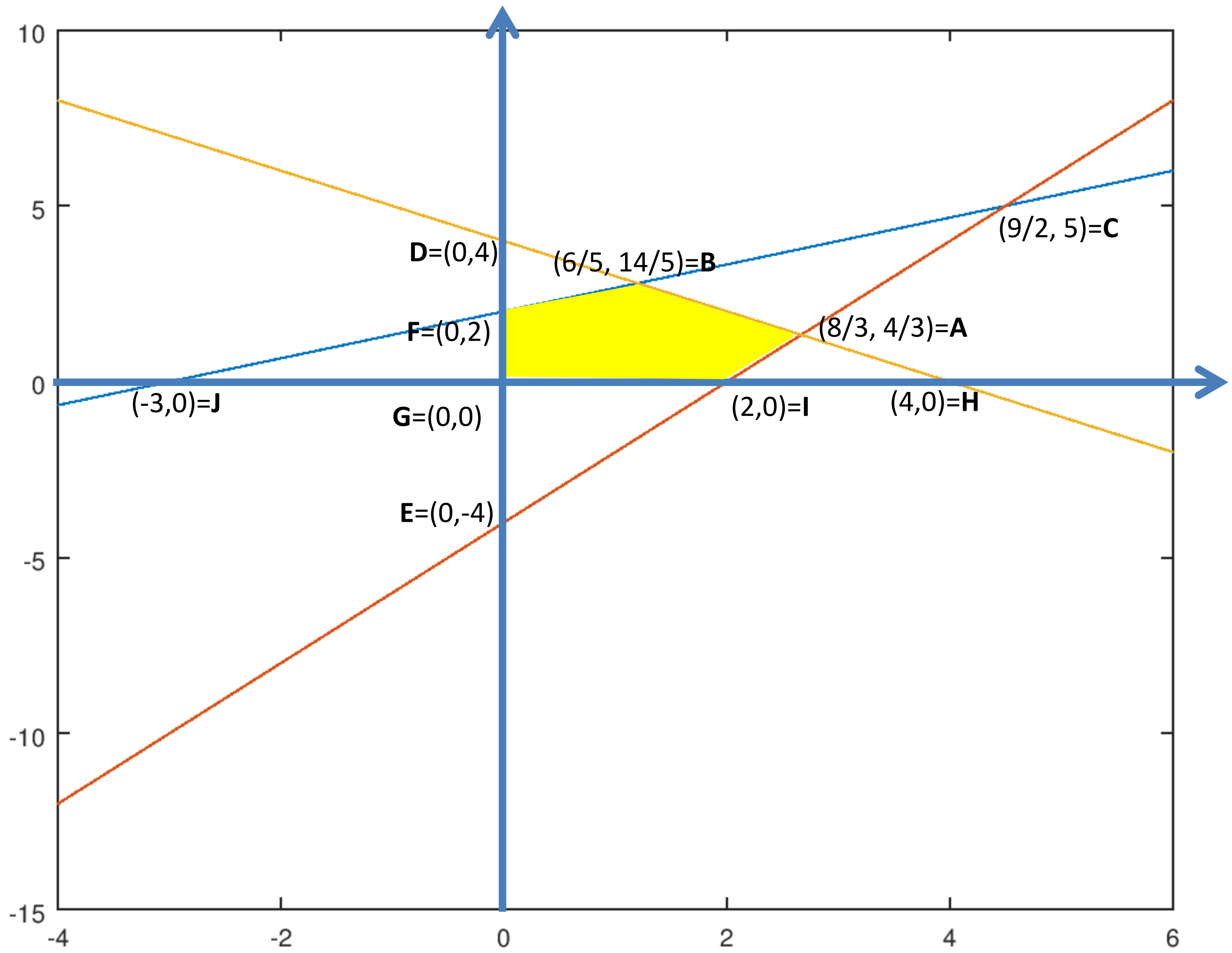
Restrições de um PL:

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$2x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$\begin{array}{llllll} \max Z = & c_1 x_1 + & \ldots + & c_n x_n & \\ \text{s.a} & a_{11} x_1 + & \ldots + & a_{1n} x_n & = b_1 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & a_{m1} x_1 + & \ldots + & a_{mn} x_n & = b_m \\ & x_1 \geq 0 & \ldots & x_n \geq 0 & \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \max z = & cx \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Definição 1: (Solução Viável) Um vetor *x* que satisfaça as restrições de um problema de programação linear é denominado de solução viável ou factível.

Definição 2: (Solução Inviável) Um vetor que não satisfaça alguma restrição é chamado de solução inviável.

Definição 3: (Região Viável) O conjunto de todos os vetores viáveis é denominado de região viável.

Definição 4: (Base) Considere a matriz de restrições aumentada *A* de dimensão *m* x n, tal que seu posto seja igual a *m*. Um conjunto formado por *m* colunas de *A* que sejam linearmente independentes é chamado de base (B_{mxm}). O número de linhas linearmente independentes é o posto de *A.*

Definição 5: (Variavel Básica) As *m variáveis* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ correspondentes às colunas de B_{mxm} designam-se por variáveis básicas.

Definição 6: (Variável Não básica) Uma variável que não for básica é dita ser não básica.

Definição 7: (Solução Básica) Uma solução básica é qualquer solução que satisfaz Ax = b obtida fixando as variáveis não-básicas igual a zero.

Definição 8: (Solução Básica Viável) É uma solução básica que satisfaz Ax = b e a restrição de não negatividade $x \geq 0$.

Definição 9: (Solução Básica inviável) É uma solução básica que satisfaz Ax = b, mas não satisfaz $x \geq 0$.

Resolução de um sistema – termos

$A=[B \;\; N]$ com $B_{m\times m}$ (somente B quadrada) e tal que $\exists B^{-1}$

$$Ax=b \Rightarrow [B \quad N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}=b \Rightarrow Bx_B+Nx_N=b \Rightarrow Bx_B=b-Nx_N \Rightarrow B^{-1}(Bx_B)=B^{-1}(b-Nx_N)$$

$$Ix_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N \Rightarrow x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N \; (\text{solução geral})$$

Seja um sistema com m equações e n variáveis. Considere uma partição $A=[B \;\; N]$ e a seguinte solução obtida ao se fixar as $n-m$ variáveis de x_N em zero:

$$\begin{cases} x_B = B^{-1}b \\ x_N = 0 \end{cases}$$

A solução x assim obtida é chamada SOLUÇÃO BÁSICA.

Se $x_B = B^{-1}b \geq 0$, dizemos que x é uma SOLUÇÃO BÁSICA VIÁVEL.

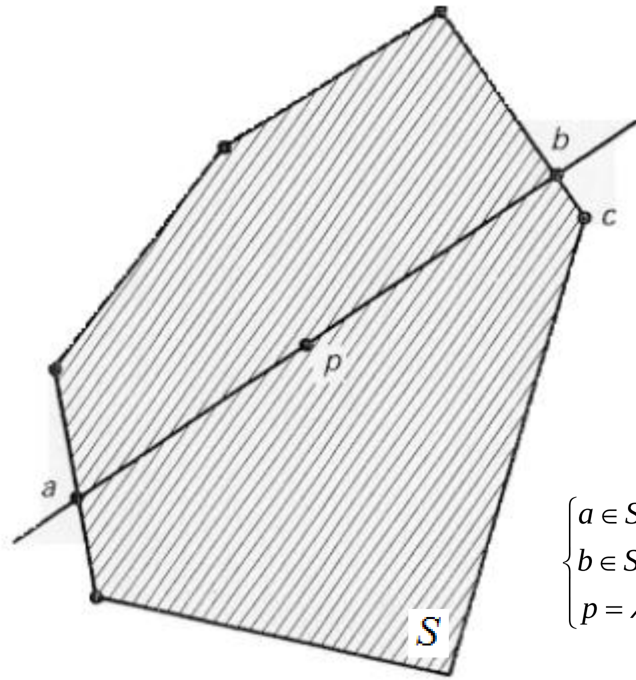
Se $x_B = B^{-1}b > 0$, dizemos que x é uma SOLUÇÃO BÁSICA VIÁVEL NÃO DEGENERADA.

Teoremas

- Convexidade da região viável
- Solução básica viável é um ponto extremo
- Conjunto de soluções básicas viáveis é finito
- A solução básica viável ótima é um ponto extremo

Teorema 1: (Região Viável é Convexa) Em um problema de programação linear, a região viável é um conjunto convexo.

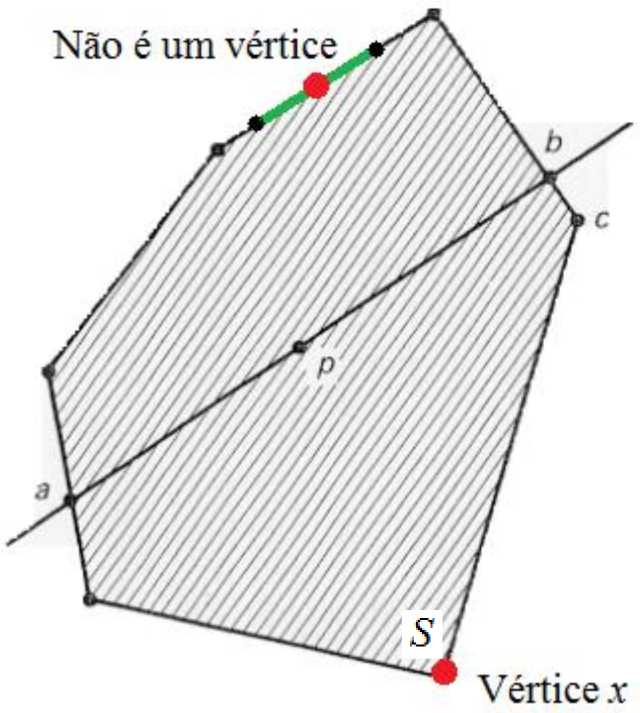
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_m = b_m \end{cases} \Rightarrow S$$



$$\begin{cases} a \in S \\ b \in S \\ p = \lambda a + (1-\lambda)b \in S, \quad 0 \le \lambda \le 1 \end{cases}$$

<u>Demonstração</u>: Seja S o conjunto formado pelos pontos x tais que $Ax = b,\ x \ge 0$. Vamos demonstrar que o conjunto S é convexo. Sejam $x_1, x_2 \in S$; precisamos mostrar que $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in S,\ 0 \le \alpha \le 1$. Sejam x_1, x_2 tal que $Ax_1 = b$, $Ax_2 = b$ e $x_1, x_2 \ge 0$. $Ax = A[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = \alpha A x_1 + (1-\alpha)Ax_2 = \alpha b + (1-\alpha)b = b$. Uma vez que $x_1, x_2 \ge 0$ e $\alpha \le 1$ então $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \ge 0$.

Definição: (Vértice ou Ponto Extremo) Um vértice da região convexa S é um ponto que não pode ser expresso como uma combinação linear convexa de 2 pontos distintos da região S.



Algebricamente:
x é um vértice de S se não existe $y_1, y_2 \in S, y_1 \neq y_2$ e $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$x = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$$

Teorema 2: (Solução Básica Viável é um vértice) As **soluções básicas viáveis** de um problema de programação linear localizam-se em **vértices** da região viável.

Dem: Seja x uma solução básica associada a submatriz base $B \in R^{m \times m}$. Então, sem perda de generalidade, suponha que $x = (x_B, x_N)$ com $x_i=0$ para $i=m+1,...,n$. Logo, $Ax=Bx_B=b$ e portanto B é matriz não singular. Por contradição suponhamos que x não seja ponto extremo ou vértice de S, então $\exists y,z \in S$ tal que $x = \alpha y + (1-\alpha)z$, $\alpha \in [0, 1]$ e $y \neq z$ pois $x \neq 0$. Como $x_i=0$ $i=m+1,...,n$, então $\alpha y_i=0$ e $(1-\alpha)z_i=0$ para $i=m+1,...,n$, e portanto $y_i = z_i = 0$ $i=m+1,...,n$. Logo $y=(y_B, y_N)$ e $z=(z_B, z_N)$. Como $y,z \in S$, $Ay=b$ e $Az=b$, e portanto $By_B=b$ e $Bz_B=b$.

Portanto $0 = b - b = By_B - Bz_B = B(y_B - z_B)$.

Mas $y_B \neq z_B$ e então $y_B - z_B \neq 0$, contradição pois por hipótese B é uma submatriz base e portanto não singular!

Portanto:
Toda solução básica viável do sistema Ax= b é um vértice do conjunto de soluções factíveis S.

Teorema 3: (O Número Soluções Básicas é Finito) A coleção de todas as soluções básicas formam um conjunto finito.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Teorema 4: Se a função objetivo possui um máximo (mínimo) finito, então pelo menos uma **solução ótima é um vértice** do conjunto *S* convexo do **Teorema 1**.

<u>Dem</u>: Seja $Z(x)$ a função objetivo que toma o valor máximo *M* no ponto x_o, então pode-se afirmar que: $M = Z(x_o) \geq Z(x) \text{ para todo } x \in S$. Sejam $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p$ os pontos extremos do conjunto *S*. Precisamos provar que x_o é um desses pontos extremos. Suponha que x_o não seja um ponto extremo de S. Então, ele pode ser obtido pela combinação convexa de seus pontos extremos:

$x_o = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \bar{x}_i$ sendo $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,p)$ e $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ **-> (a)**. Assim

$Z(x_o) = Z\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \bar{x}_i\right) = Z(\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \ldots + \alpha_p \bar{x}_p) = \; = \alpha_1 Z(\bar{x}_1) + \alpha_2 Z(\bar{x}_2) + \ldots + \alpha_p Z(\bar{x}_p) = M$ **-> (b)**.

Consideremos o ponto extremo $\bar{x}_M$ definido pela relação $Z(\bar{x}_M) = \max Z(\bar{x}_i)$, $i = 1,2,\ldots,p$ **-> (c)**

Devido as relações (a) e (c) a relação (b) pode sofrer as seguintes modificações:

$Z(x_o) \leq \alpha_1 Z(\bar{x}_M) + \alpha_2 Z(\bar{x}_M) + \ldots + \alpha_p Z(\bar{x}_M)$, ou seja, $Z(x_o) \leq Z(\bar{x}_M) \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$, isto é $Z(x_o) \leq Z(\bar{x}_M)$. Mas tínhamos $M = Z(x_o) \geq Z(x) \; \forall x \in S$. Então é necessário ter $Z(x_o) = M = Z(\bar{x}_M)$ e fica provado que a solução ótima x_o é um ponto extremo do conjunto convexo *S*.

Método das Soluções Básicas – testando vértices viáveis

$$\begin{aligned} \max\ Z = \ & 6x1 + 3x2 \\ sa\quad & 2x1 + 4x2 \leq 720 \\ & 4x1 + 4x2 \leq 880 \\ & x1 + 0x2 \leq 160 \\ & x1, x2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ Z = \ & 6x1 + 3x2 \\ sa\quad & 2x1 + 4x2 + F1 = 720 \\ & 4x1 + 4x2 + F2 = 880 \\ & x1 + 0x2 + F3 = 160 \\ & x1, x2, F1, F2, F3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(2)!} = \frac{5.4.3!}{3!2} = 10$$

$$x_B^{(1)} = \{x1, x2, F1\} \qquad x_B^{(2)} = \{x1, x2, F2\} \qquad x_B^{(3)} = \{x1, x2, F3\}$$

$$x_B^{(4)} = \{x1, F1, F2\} \qquad x_B^{(5)} = \{x1, F1, F3\} \qquad x_B^{(6)} = \{x1, F2, F3\}$$

$$x_B^{(7)} = \{x2, F1, F2\} \qquad x_B^{(8)} = \{x2, F1, F3\} \qquad x_B^{(9)} = \{x2, F2, F3\}$$

$$x_B^{(10)} = \{F1, F2, F3\}$$

Método das Soluções Básicas – testando vértices viáveis

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ F1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$x_B^{(1)} = (x1, x2, F1) = (160,60,160)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ F2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$x_B^{(2)} = (x1, x2, F2) = (160,100,-160)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$x_B^{(3)} = (x1, x2, F3) = (80,140,80)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ F1 \\ F2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$x_B^{(4)} = (x1, F1, F2) = (160,400,240)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ F1 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$x_B^{(5)} = (x1, F1, F3) = (220,280,-60)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$x_B^{(6)} = (x1, F2, F3) = (360,-560,-200)$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x2 \\ F1 \\ F2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$x_B^{(7)} = (x2, F1, F2) = ???$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x2 \\ F1 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$x_B^{(8)} = (x2, F1, F3) = (220, -160, -160)$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x2 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$x_B^{(9)} = (x2, F2, F3) = (180,160,160)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$x_B^{(10)} = (F1, F2, F3) = (16,12,28)$

Método das Soluções Básicas – testando vértices viáveis

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ F1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(1)} = (x1, x2, F1) = (160,60,160)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ F2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(2)} = (x1, x2, F2) = (160,100,-160)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(3)} = (x1, x2, F3) = (80,140,80)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ F1 \\ F2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(4)} = (x1, F1, F2) = (160,400,240)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ F1 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(5)} = (x1, F1, F3) = (220,280,-60)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(6)} = (x1, F2, F3) = (360,-560,-200)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x2 \\ F1 \\ F2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(7)} = (x2, F1, F2) = ???$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x2 \\ F1 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(8)} = (x2, F1, F3) = (220, -160, -160)$$

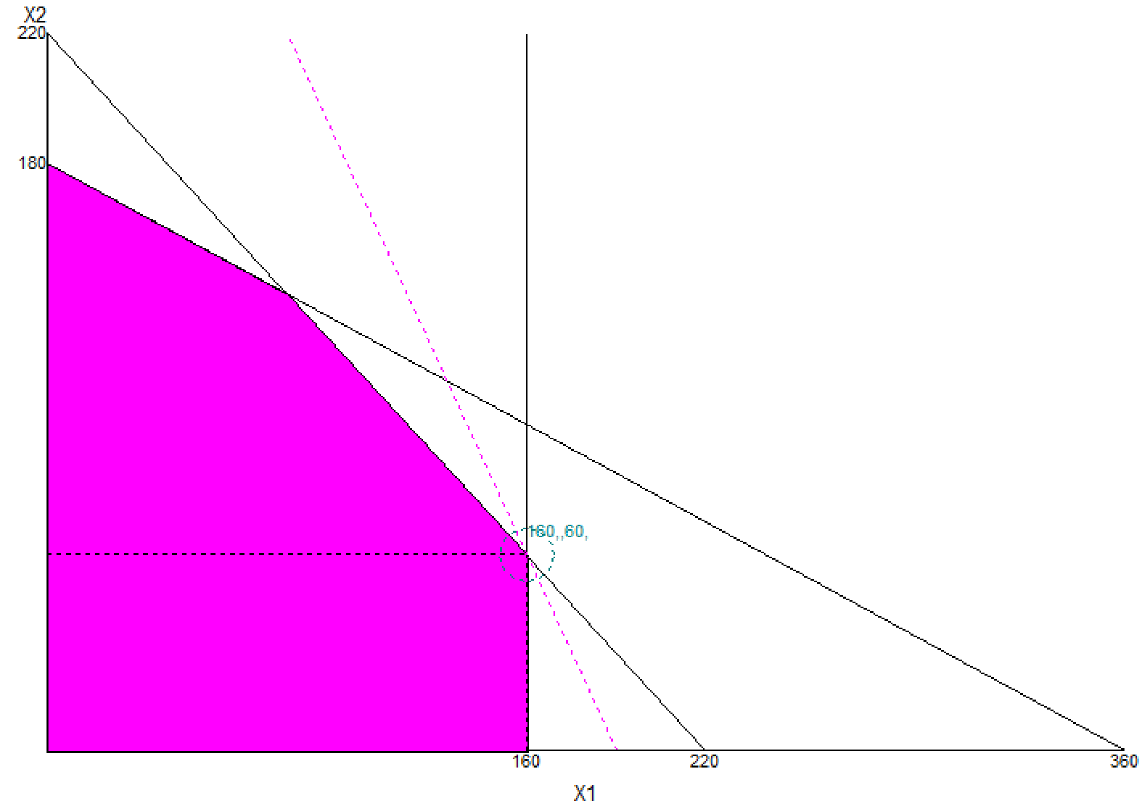
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x2 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(9)} = (x2, F2, F3) = (180,160,160)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(10)} = (F1, F2, F3) = (16,12,28)$$

Método das Soluções Básicas – testando vértices viáveis



$$x_B^{(7)} = (x2, F1, F2) = ???$$ pois a restrição $x1 + 0x2 \leq 160$ não tem intersecção com o eixo x2

Método das Soluções Básicas – testando vértices viáveis

Soluções Básicas Viáveis

$$\begin{cases} x_B^{(1)} = (x1, x2, F1) = (160{,}60{,}160) \\ Z = 1140 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(3)} = (x1, x2, F3) = (80{,}140{,}80) \\ Z = 900 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(4)} = (x1, F1, F2) = (160{,}400{,}240) \\ Z = 960 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(9)} = (x2, F2, F3) = (180{,}160{,}160) \\ Z = 540 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(10)} = (F1, F2, F3) = (16{,}12{,}28) \\ Z = 0 \end{cases}$$

Soluções Básicas Não Viáveis

$$x_B^{(2)} = (x1, x2, F2) = (160{,}100{,}-160) \quad x_B^{(5)} = (x1, F1, F3) = (220{,}280{,}-60) \quad x_B^{(6)} = (x1, F2, F3) = (360{,}-560{,}-200)$$

$$x_B^{(8)} = (x2, F1, F2) = (220{,}-160{,}160)$$

Não é base

$$x^{(7)} = (x2, F1, F2) = ???$$

Para problemas grandes, a técnica de testar vértices se torna impraticável

$C_5^3 = 10$ vértices

$C_6^3 = 20$ vértices

$C_{130}^{30} = 2{,}6 \times 10^{29}$ vértices

Prévia de um algoritmo de otimização SIMPLEX

1. Obter uma solução básica inicial – a mais trivial e mais fácil;
2. Verificar se a solução atual é ótima;
3. Se a solução atual não for ótima, procurar outra solução básica;
4. Voltar ao passo 2.

Questões

a) Como achar a solução inicial?
b) Que critério usar para gerar uma nova solução básica?
c) Como posso saber se a solução atual é ótima?

$$
\begin{aligned}
\max \quad Z = \quad & x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \\
& 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\
sa \quad & -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 6 \\
& x_1, \ldots, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Iteração (0) – início – Passo(0)

Variáveis Básicas: x_5 e x_6
Variáveis Não Básicas: x_1, x_2, x_3, x_4

$$
\begin{cases}
x_5 = 8 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \\
x_6 = 6 + x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4
\end{cases}
$$

$$
(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0,0,0,0,8,6)
$$

Iteração (1)

$$\begin{cases} x_5 = 8 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_6 = 6 + x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

$$Z = \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$$

A solução é ótima?

Não, pois existe variável não básica com coeficiente positivo na Função Objetivo

Qual variável, então, entra na base?

x_2 pois possui o maior coeficiente positivo

Qual variável, então, sai da base?

$$\begin{cases} x_5 = 8 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_6 = 6 + x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 8 - 3x_2 \geq 0 \\ x_6 = 6 - x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 \leq \frac{8}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{8}{3}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(0, \frac{8}{3}, 0, 0, 0, \frac{10}{3}\right)$$

x_5 sai da base

Variáveis Básicas: x_2 e x_6
Variáveis Não Básicas: x_1, x_3, x_4, x_5

Iteração (2)

$$\begin{cases} x_2 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_6 = \frac{10}{3} + \frac{5}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \end{cases}$$

$$Z = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{10}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5$$

A solução é ótima?

Não, pois existe variável não básica com coeficiente positivo na Função Objetivo

Qual variável, então, entra na base?

x_4 pois possui o maior coeficiente positivo

Qual variável, então, sai da base?

$$\begin{cases} x_2 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_6 = \frac{10}{3} + \frac{5}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3}x_4 \geq 0 \\ x_6 = \frac{10}{3} - \frac{10}{3}x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_4 \leq 1 \Rightarrow x_4 = 1$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0,3,0,1,0,0)$$

x_6 sai da base

Variáveis Básicas: x_2 e x_4

Variáveis Não Básicas: x_1, x_3, x_5, x_6

Iteração (3)

$$\begin{cases} x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{10}x_5 - \frac{1}{10}x_6 \\ x_4 = 1 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{3}{10}x_6 \end{cases}$$

$$Z = 7 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6$$

A solução é ótima?

Não, pois existe variável não básica com coeficiente positivo na Função Objetivo

Qual variável, então, entra na base?

x_1 pois possui o maior coeficiente positivo

Qual variável, então, sai da base?

$$\begin{cases} x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{10}x_5 - \frac{1}{10}x_6 \\ x_4 = 1 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{3}{10}x_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \\ x_4 = 1 + \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 \leq 6 \Rightarrow x_1 = 6$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6,0,0,4,0,0)$$

x_2 sai da base

Variáveis Básicas: x_1 e x_4
Variáveis Não Básicas: x_2, x_3, x_5, x_6

Iteração (4) – término

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 + 1x_3 - \frac{3}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_6 \\ x_4 = 4 - 1x_2 + 1x_3 - \frac{1}{5}x_5 - \frac{2}{5}x_6 \end{cases}$$

$$Z = \quad 10 - x_2 - 2x_3 - \frac{4}{5}x_5 - \frac{3}{5}x_6$$

A solução é ótima?

Sim, pois não existe variável não básica com coeficiente positivo na Função Objetivo

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6{,}0{,}0{,}4{,}0{,}0)$$

$$Z = 10$$

Variáveis Básicas: x_1 e x_4
Variáveis Não Básicas: x_2, x_3, x_5, x_6