

Dualidade

Tecnologia da Decisão I
TP065

Dualidade – contextualização 1

Deseja-se produzir 3 diferentes molhos a partir da mistura de *catchup* e mostarda. A quantidade disponível de *catchup* é 80 kg e de mostarda é 30 kg.

Seja o programa linear a seguir que consiste em definir as quantidades ótimas x_1 , x_2 e x_3 dos molhos do tipo 1, 2 e 3 que consistem em diferentes misturas do *catchup* e mostarda.

$$\begin{array}{ll} \max Z = & 10x_1 + 7x_2 + 15x_3 \\ \text{s.a} & 5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 80 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 30 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Problema de Programação Linear **PRIMAL**

Dualidade – contextualização 1

Suponha que um comprador propõe adquirir toda a matéria prima de fábrica, interrompendo a produção:

- Um kg de *catchup* custará $y_1 \geq 0$
- Um kg de mostarda custará $y_2 \geq 0$

Qual o preço mínimo de venda destes ingredientes para que o vendedor não saia no prejuízo?

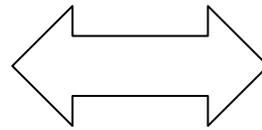
(restrições)

Qual é o preço que o comprador está disposto a desembolsar pelas matérias-primas?

(função objetivo)

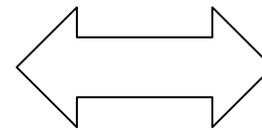
Primal e Dual

$$\begin{aligned} \max Z = & 10x_1 + 7x_2 + 15x_3 \\ \text{s.a} & 5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 80 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 30 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \min D = & 80y_1 + 30y_2 \\ \text{s.a} & 5y_1 + 2y_2 \geq 10 \\ & 4y_1 + 3y_2 \geq 7 \\ & y_1 + 5y_2 \geq 15 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max Z(x) = & cx \\ \text{s.a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \min D(y) = & yb^T \\ \text{s.a} & A^T y \geq c^T \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

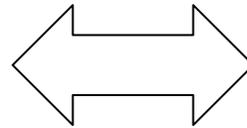
Problema **Primal** (PP)

Problema **Dual** (PD)

Dualidade – Propriedades

A cada modelo de PL corresponde um outro modelo, denominado de dual. Por exemplo:

$$\begin{array}{llll} \max Z = & c_1x_1 + & \dots + & c_nx_n \\ \text{s.a} & a_{11}x_1 + & \dots + & a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + & \dots + & a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \dots & \dots & \dots \\ & a_{m1}x_1 + & \dots + & a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1 \geq 0 & & x_n \geq 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{llll} \min D = & b_1y_1 + & \dots + & b_my_m \\ \text{s.a} & a_{11}y_1 + & \dots + & a_{m1}y_m \geq c_1 \\ & a_{12}y_1 + & \dots + & a_{m2}y_m \geq c_2 \\ & \dots & \dots & \dots \\ & a_{1n}y_1 + & \dots + & a_{mn}y_m \geq c_n \\ & y_1 \geq 0 & & y_m \geq 0 \end{array}$$

Observações:

- A função objetivo do dual é de minimização, e a do primal é de maximização (e vice-versa);
- Os elementos do vetor $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ do primal formam a função objetivo do dual;
- Os elementos do vetor $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ do primal formam o vetor do lado direito do dual;
- As restrições do dual são do tipo \geq , e do primal são do tipo \leq ;
- O número de variáveis do dual é igual ao número de restrições do primal;
- O número de restrições do dual é igual ao número de variáveis do primal;
- A matriz dos coeficientes do dual é a transposta da matriz dos coeficientes do primal.

RELAÇÃO ENTRE PRIMAL E DUAL

Primal (max) \Rightarrow Dual (min)

Restrição k é \leq

$y_k \geq 0$

Restrição k é $=$

y_k livre

Restrição k é \geq

$y_k \leq 0$

$x_p \geq 0$

Restrição p é \geq

x_p é livre

Restrição p é $=$

$x_p \leq 0$

Restrição p é \leq

Dual (max) \Leftarrow Primal (min)