Dualidade

Tecnologia da Decisão I
TP065

Profª Mariana

Dualidade – contextualização 1

Deseja-se produzir 3 diferentes molhos a partir da mistura de *catchup* e mostarda. A quantidade disponível de *catchup* é 80 kg e de mostarda é 30 kg.

Seja o programa linear a seguir que consiste em definir as quantidades ótimas x_1, x_2 e x_3 dos molhos do tipo 1, 2 e 3 que consistem em diferentes misturas do *catchup* e mostarda.

$$
\begin{array}{ll}
\max\ Z = & 10x_1 + 7x_2 + 15x_3 \\
\ s.a & 5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 80 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 30 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Problema de Programação Linear **PRIMAL**

Dualidade – contextualização 1

Suponha que um comprador propõe adquirir toda a matéria prima de fábrica, interrompendo a produção:

- Um kg de *catchup* custará $y_1 \geq 0$
- Um kg de mostarda custará $y_2 \geq 0$

Qual o preço mínimo de venda destes ingredientes para que o vendedor não saia no prejuízo?
(restrições)

Qual é o preço que o comprador está disposto a desembolsar pelas matérias-primas?
(função objetivo)

Primal e Dual

$$
\begin{aligned}
\max\ Z = \quad & 10x_1 + 7x_2 + 15x_3 \\
s.a \quad & 5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 80 \\
& 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 30 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{aligned}
\min\ D = \quad & 80y_1 + 30y_2 \\
s.a \quad & 5y_1 + 2y_2 \geq 10 \\
& 4y_1 + 3y_2 \geq 7 \\
& y_1 + 5y_2 \geq 15 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max\ Z(x) = cx & \\
\text{s.a} \quad Ax \leq b & \\
x \geq 0 &
\end{aligned}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{aligned}
\min\ D(y) = yb^T & \\
\text{s.a} \quad A^T y \geq c^T & \\
y \geq 0 &
\end{aligned}
$$

Problema **Primal** (PP)

Problema **Dual** (PD)

Dualidade – Propriedades

A cada modelo de PL corresponde um outro modelo, denominado de dual. Por exemplo:

$$
\begin{array}{lllll}
\max Z = & c_1x_1 + & \ldots + & c_nx_n & \\
\text{s.a} & a_{11}x_1 + & \ldots + & a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + & \ldots + & a_{2n}x_n & \leq b_2 \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & a_{m1}x_1 + & \ldots + & a_{mn}x_n & \leq b_m \\
 & x_1 \geq 0 & & x_n \geq 0 &
\end{array}
$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$
\begin{array}{lllll}
\min D = & b_1y_1 + & \ldots + & b_my_m & \\
\text{s.a} & a_{11}y_1 + & \ldots + & a_{m1}y_m & \geq c_1 \\
 & a_{12}y_1 + & \ldots + & a_{m2}y_m + & \geq c_2 \\
 & & & & \\
 & a_{1n}y_1 + & \ldots + & a_{mn}y_m & \geq c_n \\
 & y_1 \geq 0 & & y_m \geq 0 &
\end{array}
$$

Observações:

- A função objetivo do dual é de minimização, e a do primal é de maximização (e vice-versa);
- Os elementos do vetor $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ do primal formam a função objetivo do dual;
- Os elementos do vetor $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ do primal formam o vetor do lado direito do dual;
- As restrições do dual são do tipo $\geq$, e do primal são do tipo $\leq$;
- O número de variáveis do dual é igual ao número de restrições do primal;
- O número de restrições do dual é igual ao número de variáveis do primal;
- A matriz dos coeficientes do dual é a transposta da matriz dos coeficientes do primal.

RELAÇÃO ENTRE PRIMAL E DUAL

Primal (max) $\Rightarrow$	Dual (min)
Restrição k é $\leq$	$y_k \geq 0$
Restrição k é $=$	y_k livre
Restrição k é $\geq$	$y_k \leq 0$
$x_p \geq 0$	Restrição p é $\geq$
x_p é livre	Rrestrição p é $=$
$x_p \leq 0$	Restrição p é $\leq$
Dual (max) $\Leftarrow$	**Primal (min)**