Modelagem

Tecnologia da Decisão I
TP065

Profª Mariana

Modelagem

- Um problema de programação matemática tem por objetivo encontrar os valores para as variáveis de decisão que otimizam (**maximizam** ou **minimizam**) uma função objetivo, respeitando um conjunto de restrições.

Tipos de modelos de programação matemática:

- Programação linear – Tecnologia da Decisão I
- Programação inteira – Tecnologia da Decisão II
- Programação binária – Tecnologia da Decisão II
- Programação não-linear – não abordado no curso
- Programação dinâmica – Tecnologia da Decisão III
- Outros.

Modelagem – Programação linear

- Maximizar ou minimizar uma função **linear**
- Sujeito a um conjunto de restrições **lineares** (igualdades ou desigualdades)

$$
\begin{array}{ll}
\max(\min) Z = & c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \\
\text{s.a} & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n * b_1 \\
 & \ldots \qquad \ldots \\
 & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n * b_m \\
 & x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \\
 & * \in \{\leq, =, \geq\}
\end{array}
$$

Problemas Clássicos

1. Problema da mistura
2. Problemas de alocação de recursos
3. Problemas de planejamento da produção
4. Problema de programação de projetos
5. Problemas de gestão financeira
6. Problema de escalonamento de horários
7. Problema de transporte e designação
8. Problemas de corte
9. Problemas da mochila

Problema de Mistura

Exemplo 1

Uma metalúrgica deseja maximizar sua receita bruta. A tabela a seguir ilustra a quantidade de cada material na mistura para a obtenção das ligas possíveis de fabricação, assim como a disponibilidade de cada matéria prima (em toneladas) e os preços de venda por tonelada de cada liga.

	Liga 1	**Liga 2**	**Disponibilidade**
Cobre	0,50 ton	0,2 ton	16 ton
Zinco	0,25 ton	0,3 ton	11 ton
Chumbo	0,25 ton	0,5 ton	15 ton
Preço (R$)	3000	5000	

Construa o modelo matemático com o objetivo de maximizar o lucro.

Problema de Mistura

Exemplo 2

Uma agroindústria deve produzir um tipo de ração para determinado animal. Essa ração é produzida pela mistura de farinhas de três *ingredientes* básicos: osso, soja e resto de peixe. Cada um desses três ingredientes contém diferentes quantidades de dois *nutrientes* necessários a uma dieta nutricional balanceada: proteína e cálcio. O nutricionista especifica as necessidades mínimas desses nutrientes em 1kg de ração. Cada ingrediente é adquirido no mercado com um certo custo unitário ($/kg). Na Tabela 2.1, os dados do problema são apresentados. Por exemplo, a farinha de osso é constituída de 20% de proteína e 60% de cálcio; a ração deve ser composta de *pelo menos* 30% de proteína e 50% de cálcio; 1kg da farinha de osso custa $0,56

	Ingredientes			
Nutrientes	*Osso*	*Soja*	*Peixe*	*Ração*
Proteína	0,2	0,5	0,4	0,3
Cálcio	0,6	0,4	0,4	0,5
Custos ($/kg)	0,56	0,81	0,46	

(os ingredientes podem ser constituídos por outros elementos, mas que não são importantes para o problema em questão).

Deve-se determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir uma ração que satisfaça às restrições nutricionais com o mínimo custo.

Arenales *et. al (2007)*, pag. 17

Problema de Mistura

Exemplo 3

Uma refinaria utiliza quatro tipos de gasolina brutas, mistura elas, e produz três tipos de combustíveis. Os dados do problema são apresentados na tabela.

Tipo de gasolina	Taxa de octanagem	Disponibilidade de barris por dia	Preço por barril
1	68	4000	\$ 1,02
2	86	5050	\$ 1,15
3	91	7100	\$ 1,35
4	99	4300	\$ 2,75

Combustível	Taxa de octanagem mínima	Preço de venda (\$/barril)	Demanda
1	95	5,15	No máximo 10000 barris/dia
2	90	3,95	Qualquer quantidade
3	85	2,99	Pelo menos 8000 barris/dia

Sobras de gasolina bruta são revendidas por \$2,95/barril se a taxa de octanagem é maior que 90 e por \$1,85/barril se a taxa de octanagem é menor ou igual a 90. Como a refinaria pode maximizar seu lucro diário?

Katta, M. (1976), pag. 04

Exemplo 4

No programa de produção para o próximo período, uma empresa poderá produzir 3 tipos de produtos: P1, P2 e P3. O quadro abaixo mostra os montantes demandados (em unidades) na produção.

Produto	Contribuição (lucro em $ por unidade)	Horas de trabalho	Horas de uso de máquina	Demanda máxima
P1	$ 2100	6	12	800
P2	$ 1200	4	6	600
P3	$ 600	6	2	600

A empresa dispõe de 4800 horas de trabalho para o período; considerando o usos de três máquinas terá a disposição 7200 horas de uso de máquina.

Construa o modelo matemático com o objetivo de maximizar o lucro.

Exemplo 5

Uma fábrica utiliza dois tipos de insumos:

- A, a um custo unitário C_A e com uma quantidade máxima disponível D_A;
- B , a um custo unitário C_B e com uma quantidade máxima disponível D_B.

Estes insumos podem ser processados pelos processos I, II e III a um custo operacional nulo. Serão produzidos os produtos α, β e γ, que alcançaram preços de venda P_α, P_β e P_γ, respectivamente (preços unitários).

- Uma unidade de A processada em I produz, simultaneamente, 5 α e 1γ
- Uma unidade de A junto com duas unidades de B conjuntamente processadas em II produz, simultaneamente 3α, 9β e 8γ
- Uma unidade de B processada em III produz simultaneamente 1α, 4β e 1γ

Formule o problema como programação linear de modo a maximizar o lucro.

Problemas de Planejamento da Produção

Exemplo 6

A empresa quer planejar a produção agregada para os próximos 6 meses. As encomendas previstas estão listados na tabela. Ao longo do período de 6 meses, as unidades podem ser produzidas em um mês e estocadas/armazenadas para satisfazer a procura de meses mais tarde. Devido a fatores sazonais, o custo de produção não é constante, como mostrado na tabela.

O custo de manter um item estocado por 1 mês é $ 4/unidade/mês. Itens produzidos e vendidos no mesmo mês não são colocados no estoque. O número máximo de unidades que podem ser mantidos em estoque é 250. O nível de estoque inicial no início do horizonte de planejamento é de 200 unidades; o nível estocado no fim do horizonte de planejamento deve ser 100. O problema é determinar a quantidade ideal para produzir em cada mês de modo que a demanda seja atendida enquanto minimiza o custo total de produção e de estocagem. Escassez não é permitida.

Mês	Demanda (unidades)	Custo da Produção ($/unid)
1	1300	100
2	1400	105
3	1000	110
4	800	115
5	1700	110
6	1900	110

http://www.me.utexas.edu/~jensen/or_site/models/unit/lp_model/agg_plan/agg_pln.html

Problemas de Planejamento da Produção

Exemplo 7

Uma empresa foi contratada por outra para fornecer 210 motores elétricos em Janeiro, 140 em Fevereiro, 180 em Março e 160 em Abril (admita-se que são fornecidos ao cliente no fim de cada mês).

A capacidade normal de produção é de 150 motores/mês e os custos de produção normal são 20, 22, 25 e 27 KPTE/motor (KPTE: *high radial load capacity*), em cada mês, respectivamente.

Utilizando horas extras a empresa consegue produzir um adicional de 30 motores/mês ao custo unitário de 25, 27,30 e 32 KPTE/motor, em cada mês do período.

A empresa pode ainda subcontratar a produção de qualquer quantidade de motores ao custo unitário de 30 KPTE em Jan/Fev e 35 KPTE em Mar/Abr.

Custos	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
Custo Produção Horário Normal	20	22	25	27
Custo Produção Horário Extraordinário	25	27	30	32
Custo Produção por Subcontratação	30	30	35	35

Sabe-se que a capacidade de armazenagem da empresa apenas é suficiente para 220 motores. Em estoque existem 50 motores armazenados, sendo o custo de armazenamento de 0,5 KPTE/motor/mês.

Sabendo-se que a empresa se comprometeu a fornecer os motores no prazo (caso contrário será penalizada por quebra de contrato), o diretor de produção pretende determinar o programa de produção que permita minimizar o custo total de produção e armazenagem. Os motores são entregues no último dia do mês e o custo de estocagem incide sobre motores produzidos durante o mês e nos meses subsequentes.

Problema de Programação de Projetos

- Tarefas competem por recursos e possuem precedência;
- Uma tarefa dura um certo tempo;
- Um projeto pode ter inúmeras tarefas;
- Deseja-se saber a ordem de um conjunto de tarefas de tal forma a obter o menor tempo para conclusão do projeto;
- Busca determinar a ordem em que um conjunto de atividades é realizada, minimizando o tempo para conclusão.

Problema de Programação de Projetos

Exemplo 8

Uma empresa deseja construir pilares de uma edificação, tarefa constituída basicamente por oito atividades relacionadas na tabela abaixo. O projeto se inicia no instante 0.

Atividades	Descrição	Predecessor imediato	Duração (h)
A	Preparo da armadura	-	6
B	Preparo da forma	-	5
C	Lançamento da armadura	A	4
D	Lançamento da forma	B, C	2
E	Providências para concretagem	-	2
F	Aplicação do concreto	E, D	3
G	Cura do concreto	F	72
H	Desforma do pilar	G	3

Deseja-se saber qual é o momento que cada tarefa deve ser iniciada.

Arenales *et. al (2007)*

Problema de Gestão Financeira

- O Fluxo de Caixa é um instrumento de gestão que diz respeito à quantidade de dinheiro que entra e sai da empresa, em um período de tempo (diário, semanal, mensal, etc.);
- Estes problemas podem ser vistos como um objeto matemático com o objetivo de facilitar o estudo e os efeitos da análise de uma certa aplicação, que pode ser um investimento, empréstimo, financiamento, etc.;
- Modelos lineares também podem ser utilizados para apoiar decisões em problemas de gestão financeira, por exemplo, no gerenciamento do fluxo e caixa;
- Um dos objetivos é maximizar lucro da empresa otimizando o fluxo.

Problema de Gestão Financeira

Exemplo 9

Deseja-se investir $14000. Foram identificadas 4 oportunidades de investimentos:

- Investimento 1 requer $5000 e tem um valor presente de $8000;
- Investimento 2 requer $7000 e tem um valor presente de $11000;
- Investimento 3 requer $4000 e tem um valor presente de $6000; e
- Investimento 4 requer $3000 e tem um valor presente de $4000.

Em quais investimentos deve-se aplicar o capital disponível de modo a maximizar o valor presente total?

Problema de Gestão Financeira

Exemplo 10

Deseja-se investir \$14.000, \$12.000 e \$15.000 em cada mês do próximo trimestre. Foram identificadas 4 oportunidades de investimento:

- Investimento 1 requer \$5.000, \$8.000 e \$2.000 no mês 1, 2 e 3, respectivamente, e tem um valor presente de \$18.000;
- Investimento 2 requer \$7.000 no mês 1 e \$10.000 no mês 3, tendo um valor presente de \$19.000;
- Investimento 3 requer \$4.000 no período 2 e \$6.000 no período 3, tendo um valor presente de \$12.000;
- Investimento 4 requer \$3.000, \$4.000 e \$5.000, tendo valor presente de \$15.000.

Como realizar o investimento?

Problema de Gestão Financeira

Exemplo 11

Considere uma empresa que gostaria de maximizar o retorno de seu fluxo de caixa ao final e um horizonte de planejamento de *n* períodos. A empresa tem boas previsões de fluxo de entrada e de saída de caixa no início de cada período.

Dados:

e_t: entrada de caixa no início do período t, $t=1,...,n$

s_t: saída de caixa no início do período t, $t=1,...,n$

Apenas estão disponíveis duas opções de investimento do dinheiro do caixa no início de cada período:

(1) Deixar parte ou todo dinheiro no próprio caixa durante todo período, com taxa de juros α

(2) Utilizar parte ou todo dinheiro em uma aplicação financeira com menor liquidez do que a opção 1 (isto é, resgate restrito), porém com taxa de juros β, $\beta > \alpha$ (p.ex. fundos de ações, títulos públicos etc.)

As conversões entre as opções 1 e 2 podem ser realizadas apenas do início de cada período t. Os custos unitários de conversão (p.ex. impostos, taxas de administração, etc.) são:

$c_{1,2}$: custo de mudar da opção 1 para a opção 2

$c_{2,1}$: custo de mudar da opção 2 para a opção 1

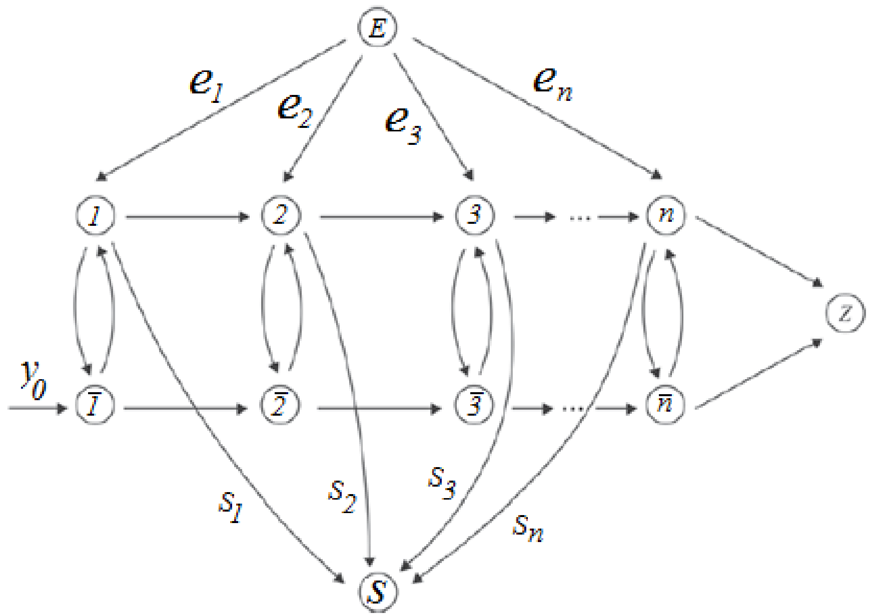
- No início do horizonte de planejamento, a empresa dispõe de y_0 unidades monetárias aplicadas na opção 2

⇒

Arenales *et. al (2007)*

Problema de Gestão Financeira

Exemplo 11



- O nó *E* simboliza a entrada de caixa (origem das contas a receber de clientes)
- O nó *S* simboliza a saída de caixa (destino das contas a pagar aos fornecedores)
- Os nós 1,2, ..., n e os nós $\overline{1}$, $\overline{2}$, ..., $\overline{n}$ simbolizam os inícios dos períodos para as opções de investimento 1 e 2, respectivamente
- O nó Z representa o final do planejamento

Maximizar o retorno do seu fluxo no final do horizonte de planejamento.

Arenales *et. al (2007)*

Problema de Escalonamento de Horários

Exemplo 12

Uma empresa que explora um pedágio em uma rodovia possui uma demanda de funcionários conforme a tabela.

Horário	Nº de funcionários
00 às 06 horas	2
06 às 10 horas	6
10 às 12 horas	4
12 às 14 horas	5
14 às 16 horas	4
16 às 18 horas	6
18 às 22 horas	4
22 às 00 horas	3

Os funcionários iniciam em hora par e trabalham 8h interruptas. Qual é o número mínimo de funcionários para satisfazer a demanda e quantos devem iniciar em cada hora par?

Problema de Escalonamento de Horários

Exemplo 13

Devido ao número inconstante de passageiros, uma companhia de ônibus necessita de um número variado de motoristas dependendo do horário considerado. A tabela a seguir especifica a quantidade de motoristas necessários.

Horário	**Quantidade de Motoristas**
01 às 05 horas	15
05 às 09 horas	30
09 às 13 horas	26
13 às 17 horas	32
17 às 21 horas	30
21 às 01 hora	19

Considere que cada motorista trabalha 8 horas seguidas e que o serviço pode ser iniciado as 1, 5, 9, 13, 17, ou 21h. Formule este problema como um PL de modo que as demandas sejam atendidas e o número de motoristas seja o menor possível.

Problema de Transporte

- Referem-se ao transporte ou distribuição de produtos dos centros de produção (origem) aos mercados consumidores (destino);
- O transporte deve respeitar as limitações de oferta e atender à demanda requisitada;
- Em alguns problemas, podem-se usar localidades intermediárias (ou de transbordo): depósitos ou centros de distribuição;
- No problema de transbordo, a quantidade que sai do centro intermediário deve ser igual à quantidade de produto que chega dos centros produtores;
- Modelos de transporte podem representar outras situações: existem *n* tarefas que precisam ser distribuídas a *n* pessoas (problema de designação).

Problema de Transporte

Exemplo 14

A calçados Romano possui 3 unidades de produção de calçados e 2 lojas que fazem as vendas dos produtos. A primeira unidade possui 1000 pares em estoque, a segunda, 2000 e a terceira, 2200. Para a próxima semana, as lojas vão requerer 2500 e 2700 pares, respectivamente. O custo de transporte de 100 pares da unidade 1 para a loja 1 é de R$20. Os outros custos entre unidades e lojas são oferecidos na tabela a seguir.

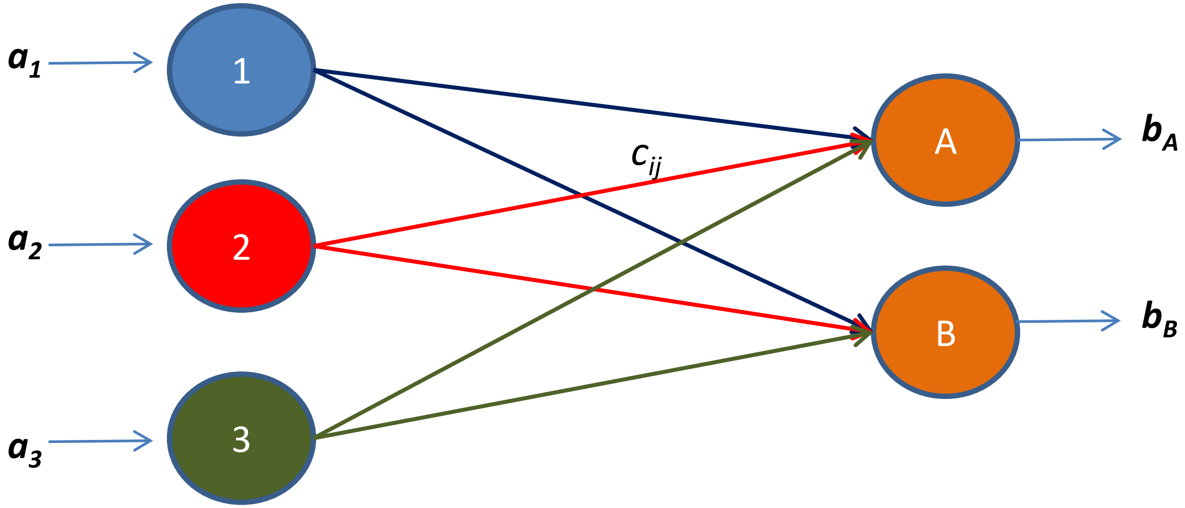
Unidade	**Estoque (pares)**	**Custo de transporte da unidade para a loja em R$**	
		1	**2**
1	1000	20	10
2	2000	5	8
3	2200	6	19
Demanda da loja	-	2500	2700

Os calçados podem ser deixados nos estoques, mas a demanda das lojas deve ser atendida. Com o intuito de minimizar custos de transporte, que unidade atende que loja e em que quantidades?

Exemplo 15

Uma empresa produz um produto em *m* fábricas, para atender a demanda de *n* locais de demanda. A capacidade de produção da fábrica *i* é no máximo igual a a_i, $i=1,\dots,m$. A demanda da cidade *j* é igual a b_j, $j=1,..,n$. Sabendo-se que o custo de envio de uma unidade do produto da fábrica *i* para o local de demanda *j* é c_{ij}, determinar a quantidade que deve ser enviada de cada fábrica para cada local de demanda, de modo a minimizar os custos de transporte desta empresa.

$m = 3$ e $n = 2$



Problema de Designação

Exemplo 16

É um caso particular de transporte, onde tem-se:

$a_1 = a_2 = ... = a_m = 1$ e $b_1 = b_2 = ... = b_n = 1$.

Exemplo 17

A Metalúrgica Araucária S/A, dentro de 60 dias, deverá começar a funcionar em sua nova sede localizada na Cidade Industrial de Curitiba (CIC). O Presidente da Metalúrgica deseja que a distribuição das salas, dessa nova instalação, seja feita de modo a atender, na medida do possível, as preferências já manifestadas. Em uma pesquisa realizada, os Diretores manifestaram as suas preferências:

	Sala 1	Sala 2	Sala 3	Sala 4	Sala 5	Sala 6
Diretor 1	2	4	3	1	5	6
Diretor 2	1	5	4	6	3	2
Diretor 3	5	3	4	2	1	6
Diretor 4	1	3	2	4	6	5
Diretor 5	3	2	5	6	1	3

Se você fosse convidado a opinar sobre a distribuição das salas qual seria a sua recomendação?

Obs: Considere 6 a maior preferência e 1 a menor preferência.

Problema da Mochila

Exemplo 18

Um viajante dispõe de n itens que deve selecionar para colocar em uma mochila que está sendo preparada para uma viagem. O peso do item j é igual a_j e o "lucro" obtido caso ele seja selecionado e colocado na mochila é igual a c_j, para $j=1,\ldots,n$. Quais itens devem ser selecionados, sabendo-se que o peso máximo que o viajante pode carregar na mochila é igual a b?

Problema da Mochila

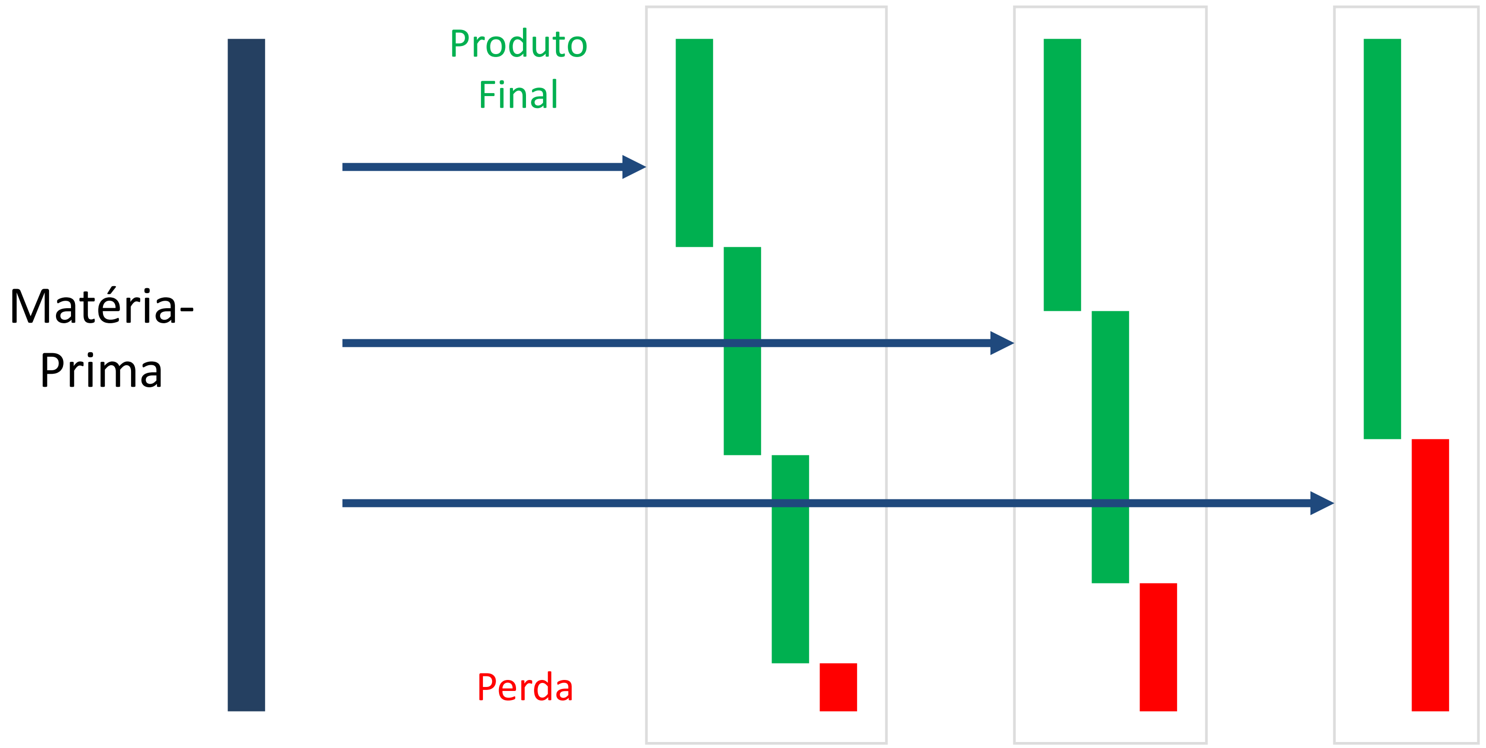
Exemplo 19

Um excursionista planeja fazer uma viagem acampando. Há cinco itens que o excursionista deseja levar consigo, mas estes juntos excedem o limite de 30kg que ela supõe ser capaz de carregar. Para ajudar a si própria no processo de seleção, ela atribuiu valores, por ordem crescente de importância, a cada um dos itens, segundo a tabela.

Item	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Peso (kg)	22	13	15	7	3
Valor	100	60	70	15	15

Que itens devem ser levados de forma a maximizar o valor total sem exceder as restrições de peso?

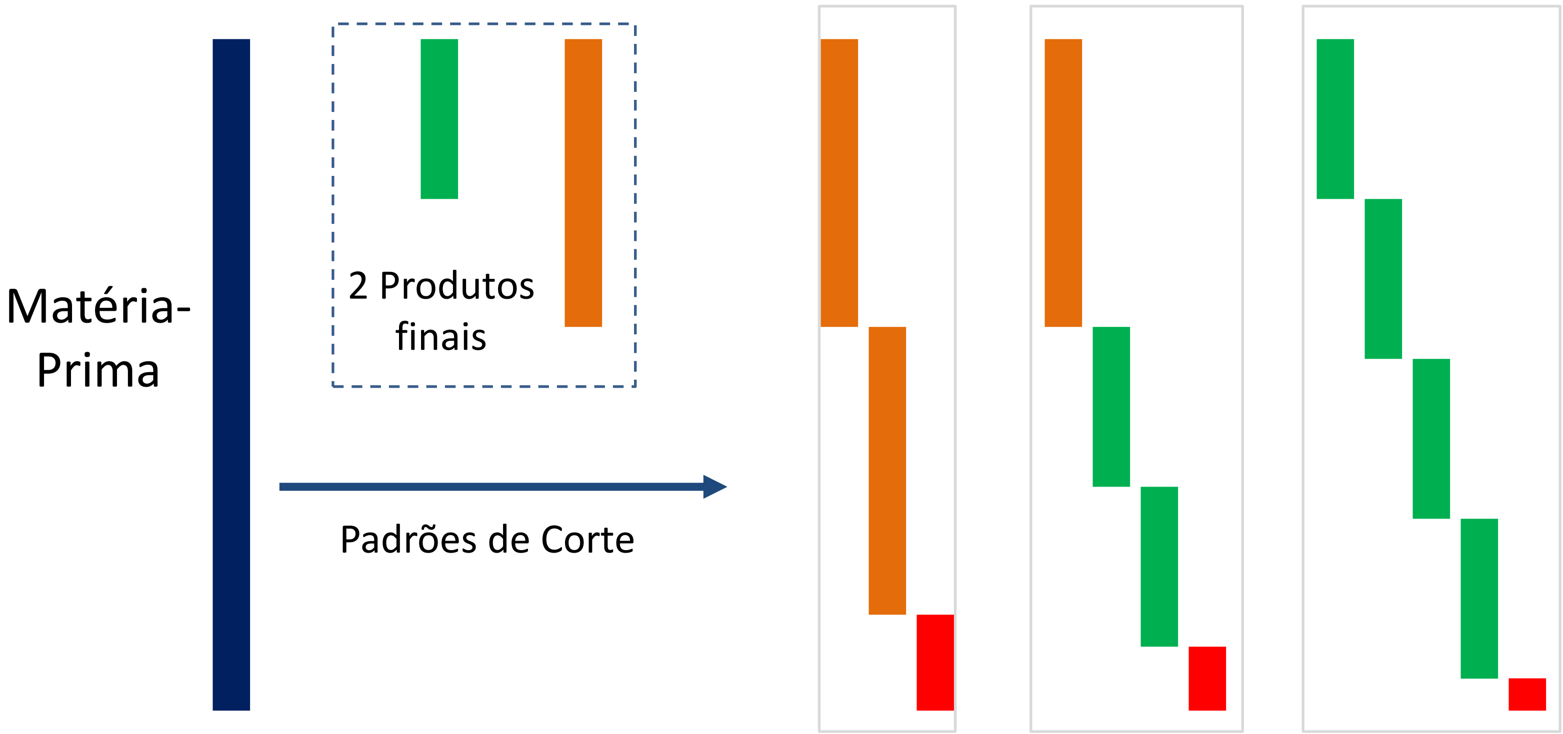
Problema de Corte



Matéria-Prima:
a) Tubos; b) bobinas de papel ou têxtil; c) barras; d) varetas ou barras de madeira; e) chapas de aço.

Objetivos:
a) minimização da perda total ou a quantidade de matéria-prima cortada
b) maximização do número de produtos montados/acabados/fabricados

Problema de Corte



Variáveis de decisão: O valor da variável determina o número de unidades de matéria-prima que será cortado/fatiado de acordo com o correspondente padrão (encontrados a partir de todos os padrões de corte possíveis).

Problema de Corte

Exemplo 20

Uma fábrica necessita cortar uma fita de aço de 12 cm de largura em tiras de 2,4 cm, 3,4 cm e 4,5 cm de largura. As necessidades globais de tiras de cada largura são as seguintes:

Tira	**Largura (cm)**	**Demanda**
1	2,4	2500
2	3,4	4500
3	4,5	8000

Formule um modelo que permita otimizar o consumo da fita a ser cortada, minimizando a perda de material.

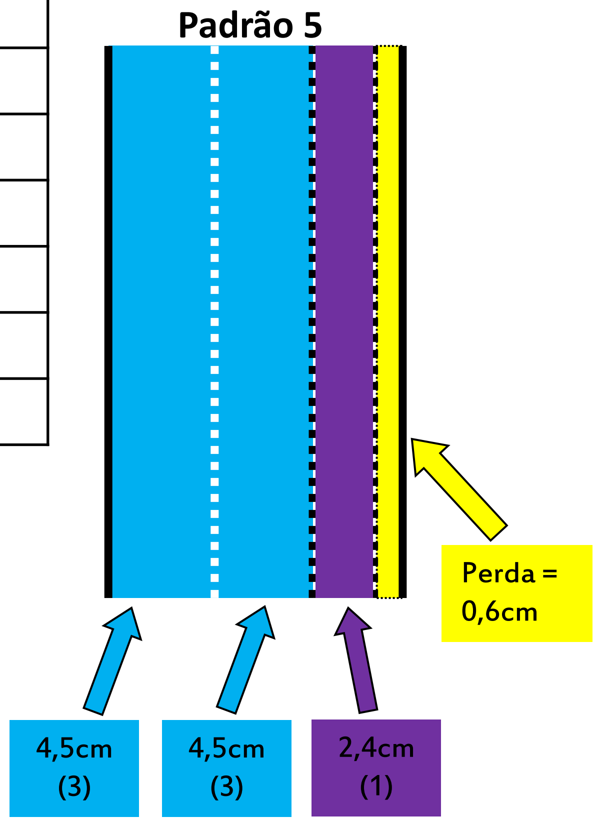
⇒

Problema de Corte

Exemplo 20

Precisamos determinar todos os padrões de corte possíveis de uma fita.

Padrão	Tiras 1	Tiras 2	Tiras 3	Perda (cm)
1	5	0	0	0,0
2	3	1	0	1,4
3	3	0	1	0,3
4	2	2	0	0,4
5	1	0	2	0,6
6	0	3	0	1,8
7	0	2	1	0,7
...	...	...	...	...



Considerando apenas 7 padrões de corte

Exemplo 21

Uma indústria dispõe de barras de 7m de comprimento, que devem ser cortadas em barras menores (de 2m e 3m) para atender a seguinte demanda:

Comprimento	2m	3m
Demanda mínima	90	85

a) Formule um modelo de PL que atenda a demanda com menor desperdício possível;

b) Cortar barras tem custo (considere R$1 para cada corte realizado). Formule o PL que atenda a demanda e minimize desperdícios e custos.