Teoremas de Dualidade

Tecnologia da Decisão I
TP065

Profª Mariana

Sejam os problemas primal e dual, respectivamente:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = c^T x \\ \text{sa} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min \quad & D = b^T y \\ \text{sa} \quad & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Teorema Fraco da Dualidade

Se x e y são soluções viáveis para o par de problemas primal e dual, então $Z \leq D$.

Dem.: $Z = c^T x \leq \left(A^T y\right)^T x = y^T A x \leq y^T b = b^T y \quad \Rightarrow \quad Z \leq D$

Obs: $b^T y - c^T x$ é chamado de **gap de dualidade** associado a x e y viáveis.

Corolário

Se x* e y* são soluções viáveis para o par de PL's primal e dual, tais que Z* = D*, então elas constituem soluções ótimas.

Dem.: Pela definição de solução ótima sabe-se que, se x* e y* são soluções ótimas, então $Z \leq Z^*$ e $D \geq D^*$. Por hipótese tem-se $Z^* = c^T x^* = b^T y^* = D^*$. Se y é uma solução viável do dual, do teorema anterior tem-se que $c^T x^* \leq b^T y$ e portanto (devido a hipótese) $b^T y^* \leq b^T y$. A demonstração é semelhante para uma solução viável do primal.

Assim para as soluções ótimas x* e y* do primal e dual, temos:

$$Z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = D^*$$

Teorema Forte da Dualidade

Seja $X \neq \emptyset$ o conjunto das soluções viáveis do primal, e que Z(x) $\exists$ e é finito/limitado. Então $\exists x^* \in X$ e $y^* \in Y$ tal que $c^T x^* = b^T y^*$.

<u>Dem.</u>: Vamos derivar uma solução para o dual a partir da solução ótima do primal.

Seja $y^T = c_B^T B^{-1}$. Desejamos provar que y^T é solução ótima do dual.

i) <u>y é uma solução viável do dual</u>

- $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - y^T N \Rightarrow \left(c_N^T - y^T N\right)^T \geq 0$ (da otimalidade de x^*).
  $\Rightarrow c_N - \left(y^T N\right)^T \geq 0 \Rightarrow c_N - N^T y \geq 0 \Rightarrow N^T y \leq c_N$ Portanto $\boxed{N^T y \leq c_N}$
- $\bar{c}_B^T = c_B^T - c_B^T B^{-1} B = c_B^T - \left(c_B^T B^{-1}\right) B = c_B^T - y^T B = 0 \Rightarrow y^T B \leq c_B^T \Rightarrow \left(c_B^T - y^T B\right)^T = 0$
  $\Rightarrow c_B - \left(y^T B\right)^T = 0 \Rightarrow c_B - B^T y = 0 \Rightarrow B^T y \leq c_B$. Portanto $\boxed{B^T y \leq c_B}$.

ii) <u>y é uma solução ótima do dual</u>

$y^T b = \left(c_B^T B^{-1}\right) b = c_B^T \left(B^{-1} b\right) = c_B^T x_B^* = c^T x^*$. Portanto $y = y^*$.

Corolário

Se tanto o primal como o dual admitem soluções factíveis, então ambos têm soluções ótimas tais que $Z^*=D^*$.

Resultados importantes:

- Se o primal tende para o infinito, então o dual não tem solução viável;
- Se o dual tende para menos infinito, então o primal não tem solução viável;
- É possível que ambos não tenham solução viável.

Teorema da Folga Complementar

- O valor ótimo da variável y_i do dual é igual ao coeficiente na linha **(0)** do quadro ótimo da variável de folga x_{n+i} do primal, $i=1,...,m$;
- O valor ótimo da variável de folga y_{m+j} do dual é igual ao coeficiente na linha **(0)** do quadro ótimo da variável x_j do primal, $j=1,...,n$.

Dem.: https://docs.ufpr.br/~marianakleina/TeoremaFolgaComplementar.pdf

Corolários

- $y_i^* = 0$ quando $x_{n+i}^* > 0$ (i=1,2,...,m), ou seja, se a variável de folga x_{n+i}^* for básica, então a variável y_i^* do dual é não básica;

- $y_{m+j}^* = 0$ quando $x_j^* > 0$ (j=1,2,...,n), ou seja, se a variável x_j^* for básica, então a variável de folga do dual y_{m+j}^* é não básica.

Uso do **teorema da folga complementar** para determinar a solução ótima do dual a partir da solução ótima do primal (e vice-versa).

$$\begin{aligned} \max\ Z = \quad & 10x_1 + 7x_2 + 14x_3 \\ s.a \quad & 5x_1 + 4x_2 + x_3 \le 85 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 30 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ D = \quad & 85y_1 + 30y_2 \\ s.a \quad & 5y_1 + 2y_2 \ge 10 \\ & 4y_1 + 3y_2 \ge 7 \\ & y_1 + 5y_2 \ge 14 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

	E_1*	E_2*	E_3*	y_1*	y_2*	
Primal	x_1	x_2	x_3	F1	F2	b
Z*	0	8	11	0	5	150
F_1*	0	-3,5	-11,5	1	-2,5	10
x_1*	1	1,5	2,5	0	0,5	15

	F_1*	F_2*	x_1*	x_2*	x_3*	
Dual	y_1	y_2	E_1	E_2	E_3	b
-D*	10	0	15	0	0	-150
E_3*	11,5	0	-2,5	0	1	11
y_2*	2,5	1	-0,5	0	0	5
E_2*	3,5	0	-1,5	1	0	8

D*=150
y_1*=0
y_2*=5
E_1*=0
E_2*=8
E_3*=11

Z*=150
x_1*=15
x_2*=0
x_3*=0
F_1*=10
F_2*=0