UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de Otimização II
Professor : Luiz Carlos Matioli

1. (Equação normal usando cálculo - livro do Watkins pg. 246) Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e a função diferenciável f, dada por

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x) = \|b - Ax\|_2^2.$$

(a) Mostre que f é uma função convexa (ver exercício 7).

(b) Calcule o gradiente de f.

(c) Use os itens (a) e (b), deste exercício, para obter a equação normal.

2. (Problema Antílope) Suponha os seguintes dados em relação ao Antílope:

t_i	1	2	4	5	8
y_i	3	4	6	11	20

sendo t_i o tempo em anos e y_i a população registrada de antílopes em centenas.

Suponha que o modelo seja conhecido e tenha a fómula (em geral modelo de crescimento populacional tem a forma exponencial):

$$\phi(x, t_i) = x_1 e^{x_2 t_i}$$

Considere $r(x)$ o vetor de resíduos, ou seja, cada componente $r_i(x) = \phi(x, t_i) - y_i$. Então o problema de mínimos quadrados consiste em minimizar $||r(x)||^2$. Denote $f(x) = ||r(x)||^2$ e resolva os ítens seguintes:

(a) Seja $x = (2, 1)^T$, calcule $r(x)$, $f(x)$, $\nabla r(x)$, $\nabla f(x)$, $r(x)r(x)^T$ e $\nabla^2 f(x)$.

(b) Faça duas iterações do método de Gauss-Newton sem busca e utilizando $x_0 = (2, 1)^T$.

3. (Retirado do livro Stephen G. Nash e Ariela Sofer - Linear and Nonlinear programming) Considere o seguinte modelo de quadrados mínimos

$$y = \phi(x, t) = x_1 e^{x_2 t} + x_3 + x_4 t.$$

Determine $r(x)$, $f(x)$, $\nabla r(x)$, $\nabla f(x)$, $r(x)r(x)^T$ e $\nabla^2 f(x)$ para o seguinte conjunto de dados gerais $\{(t_i, y_i\}_{i=1}^m$. (Nota $f(x)$ e $r(x)$ são definidas como no exercício 1) SUGESTÃO: usar ∇f e $\nabla^2 f$ calculadas, em sala de aula, para o caso geral.

4. Dados os pontos (1,2), (2,1), (3,2) e (4,1) no plano. Pede-se:

   (a) Encontre a reta que melhor ajusta os pontos dados (também chamada de reta de regressão).

   (b) Interprete o resultado desenhando os pontos e reta encontrada.

   (c) Se fosse pedido para ajustar por um polinômio de grau maior que 1, qual você escolheria? Porque ?

5. (Retirado do livro do Fletcher - Practical Methods of Optimization) Dada

$$\begin{pmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 0.1x^2 + x - 1 \end{pmatrix}$$

   aplicar o método de Gauss-Newton (sem busca) aplicado ao problema

$$\text{minimizar} \frac{1}{2}||r(x)||^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

   faça de 3 a 4 iterações iniciando em $x_0 = 1$.

6. Como visto em sala $p(t) = \sum_{j=1}^{m} x_j \phi_j(t)$ pode ser usado para interpolar um conjunto de pontos ou aproximar (quadrados mínimos) os pontos dados. Usando a base canônica para funções ϕ_j e a tabela de pontos do problema antílope, ajuste os seguintes polinômios: (i) polinômio de grau 1 e (ii) polinômio de grau 2. Faça uma interpretação geometrica de ambos os itens. Qual dos dois polinômios gerou uma melhor aproximação? Porque?

7. Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$.

   (a) Mostre que $A^T A$ é semidefinida positiva.

   (b) Mostre que $A^T A$ é positiva definida se e somente se A tem rank cheio. (ver livro Datta pg. 318)

8. (adptado do livro Algoritmos numéricos de Frederico Ferreira Campos Filho) Considere os dados históricos dos censos demográficos do Brasil, de acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE),

apresentados na seguinte tabela.

Ano	Urbana	Rural
1940	12.880.182	28.356.133
1950	18.782.891	33.161.506
1960	31.303.034	38.767.423
1970	52.084.984	41.054.053
1980	80.436.409	38.566.297
1991	110.990.990	35.834.485
1996	123.076.831	33.993.332
2000	137.953.959	31.845.211

(a) Plote os pontos dados em um gráfico no plano colocando no eixo x o ano e no eixo y a população.

(b) Faça uma análise do que aconteceu com a população Urbana e Rural.

(c) Faça uma aproximação por quadrados mínimos para cada um dos casos (Urbana e Rural). Utilize o item (a) para decidir qual a melhor função (linear, quadrática, exponencial,...) para fazer o ajuste.

(d) Supondo que a população do Brasil tem seguido o mesmo ritmo dos dados da tabela, determine a população do Brasil para o anos de 2010 e 2014. Cheque no site do IBGE (www.ibge.gov.br) se o número que você encontrou está próximo do número correto (determinado pelo censo).

REGIÃO DE CONFIANÇA

9. Considere $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = x^3 - x$.

   (a) Detemine os pontos críticos de f e verifique se são de máximos ou mínimos. (justifique sua resposta).

   (b) Faça duas iteração do método de região de confiança aplicado ao problema: minimizar$\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Utilize $\Delta_0 = 1/4$ e $x^0 = 0$.

10. Considere $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = x^2 + 1/x$. Pede-se:

    (a) Encontre a solução do problema minimizar$\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$. A a solução é única? (justifique).

    (b) Fazer duas iteraçõe do método de região de confiança, utilizando $\Delta_0 = 0.5$ e $x^0 = 2$.

    (c) Idem para $\Delta_0 = 1.5$ e $x^0 = 2$.

(d) Idem para $\Delta_0 = 0.1$ e $x^0 = 2$.

(d) Idem para $\Delta_0 = 0.1$ e $x^0 = 0.5$.

NOTA: Para os exercícios que forem convenientes pode ser utilizado o Matlab.