forma um conjunto ortonormal em relação ao produto interno (2). Deixaremos a cargo do leitor a verificação do fato de que, ao adicionarmos as funções

$$\operatorname{sen} x,\ \operatorname{sen} 2x,\ \ldots,\ \operatorname{sen} nx$$

ao conjunto acima, obtemos outro conjunto ortonormal. Podemos, portanto, utilizar o Teorema 5.5.8 para encontrar a melhor aproximação de uma função contínua em termos de um polinômio trigonométrico de grau menor ou igual a um n dado, no sentido dos mínimos quadrados. Observe que

$$\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = \langle f, 1 \rangle \frac{1}{2}$$

de modo que, se

$$a_0 = \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

e

$$a_k = \langle f, \cos kx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx$$

$$b_k = \langle f, \operatorname{sen} kx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$, então esses coeficientes determinam a melhor aproximação de f por mínimos quadráticos. Os a_j e b_k são *coeficientes de Fourier*, bastante conhecidos, que aparecem em diversas aplicações envolvendo aproximação de funções por séries trigonométricas.

EXERCÍCIOS

1. Quais dos conjuntos de vetores a seguir formam uma base ortonormal para R^2?

(a) $\{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$

(b) $\{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})^T, (\frac{5}{13}, \frac{12}{13})^T\}$

(c) $\{(1, -1)^T, (1, 1)^T\}$

(d) $\left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)^T, \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^T \right\}$

2. Sejam

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}} \right)^T, \qquad \mathbf{u}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)^T$$

$$\mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T$$

(a) Mostre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ formam uma base ortonormal para R^3.

(b) Seja $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$. Escreva $\mathbf{x}$ como uma combinação linear de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ usando o Teorema 5.5.2 e use a fórmula de Parseval para calcular $\|\mathbf{x}\|$.

3. Seja S o subespaço de R^3 gerado pelos vetores $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ do Exercício 2. Seja $\mathbf{x} = (1, 2, 2)^T$. Encontre a projeção ortogonal $\mathbf{p}$ de $\mathbf{x}$ sobre S. Mostre que $(\mathbf{p} - \mathbf{x}) \perp \mathbf{u}_2$ e $(\mathbf{p} - \mathbf{x}) \perp \mathbf{u}_3$.

4. Seja θ um número real fixo e sejam

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ é uma base ortonormal para R^2.
(b) Escreva um vetor arbitrário $\mathbf{y}$ em R^2 como uma combinação linear $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$.
(c) Verifique que

$$c_1^2 + c_2^2 = \|\mathbf{y}\|^2 = y_1^2 + y_2^2$$

5. Suponha que $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ formam uma base ortonormal para R^2 e seja $\mathbf{u}$ um vetor unitário em R^2. Se $\mathbf{u}^T\mathbf{u}_1 = 1/2$, determine o valor de $|\mathbf{u}^T\mathbf{u}_2|$.

6. Seja $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ uma base ortonormal para um espaço V munido de produto interno e sejam

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 7\mathbf{u}_3$$

Determine o valor de: SUGESTÃO: COROLÁRIO 5.5.3 E 5.5.4
(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$;
(b) $\|\mathbf{u}\|$ e $\|\mathbf{v}\|$;
(c) o ângulo θ entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

7. As funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ formam um conjunto ortonormal em $C[-\pi, \pi]$. Se

$$f(x) = 3\cos x + 2\operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$$

use o Corolário 5.5.3 para determinar o valor de

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

8. O conjunto

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x \right\}$$

é um conjunto ortonormal de vetores em $C[-\pi, \pi]$ em relação ao produto interno definido por (2).
(a) Use identidades trigonométricas para escrever a função $\operatorname{sen}^4 x$ como uma combinação linear de elementos de S.
(b) Use o item (a) e o Teorema 5.5.2 para encontrar os valores das integrais a seguir.

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4 x \cos x\,dx$ (ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4 x \cos 2x\,dx$
(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4 x \cos 3x\,dx$ (iv) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4 x \cos 4x\,dx$

9. Prove que a transposta de uma matriz ortogonal é uma matriz ortogonal.

10. Se Q é uma matriz ortogonal $n \times n$ e se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vetores não-nulos em R^n, qual a relação entre o ângulo entre $Q\mathbf{x}$ e $Q\mathbf{y}$ e o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$? Prove.

11. Seja Q uma matriz ortogonal $n \times n$. Use indução matemática para provar cada uma das afirmações a seguir.
(a) $(Q^m)^{-1} = (Q^T)^m = (Q^m)^T$ para todo inteiro positivo m.
(b) $\|Q^m\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x} \in R^n$.

12. Seja $\mathbf{u}$ um vetor unitário em R^n e seja $H = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$. Mostre que H é ao mesmo tempo ortogonal e simétrica e, portanto, sua própria inversa.

13. Seja Q uma matriz ortogonal e seja $d = \det(Q)$. Mostre que $|d| = 1$.

14. Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais é ortogonal. O produto de duas matrizes de permutação é uma matriz de permutação? Explique.

15. Mostre que, se U é uma matriz ortogonal $n \times n$, então

$$\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T + \cdots + \mathbf{u}_n\mathbf{u}_n^T = I$$

16. Use indução matemática para mostrar que, se $Q \in R^{n \times n}$ é, ao mesmo tempo, triangular superior e ortogonal, então $\mathbf{q}_j = \pm\,\mathbf{e}_j$, $j = 1, \ldots, n$.