para obter o conjunto ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$. O próximo algoritmo resume esse processo.

Algoritmo 5.6.4 (O Processo de Gram-Schmidt Modificado)

Para $k = 1, 2, \ldots, n$ *defina*

$$r_{kk} = \|\mathbf{a}_k\|$$

$$\mathbf{q}_k = \frac{1}{r_{kk}}\mathbf{a}_k$$

Para $j = k+1, k+2, \ldots, n$, *defina*

$$r_{kj} = \mathbf{q}_k^T \mathbf{a}_j$$

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j - r_{kj}\mathbf{q}_k$$

Fim do ciclo

Fim do ciclo

Se o processo de Gram-Schmidt modificado é aplicado aos vetores colunas de uma matriz A $m \times n$ de posto n, então, como anteriormente, podemos obter uma fatoração QR de A. Essa fatoração pode ser usada computacionalmente para se determinar a solução de mínimos quadráticos para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

EXERCÍCIOS

1. Para cada matriz a seguir, use o processo de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal para $I(A)$. → ESPAÇO COLUNA DE A

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$

2. Fatore cada uma das matrizes no Exercício 1 em um produto QR, onde Q é uma matriz ortogonal e R é triangular superior.

3. Dada a base $\{(1, 2, -2)^T, (4, 3, 2)^T, (1, 2, 1)^T\}$ para R^3, use o processo de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal.

4. Considere o espaço vetorial $C[-1, 1]$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

Encontre uma base ortonormal para o subespaço gerado por 1, x e x^2.

5. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

(a) Use o processo de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal para o espaço coluna de A.
(b) Fatore A em um produto QR, onde as colunas de Q formam um conjunto ortonormal de vetores e R é triangular superior.
(c) Resolva o problema de mínimos quadráticos para

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

6. Repita o Exercício 5 para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$