SOLUÇÃO. Os autovalores de A são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$ com autovetores associados $\mathbf{x}_1 = (4, 3)^T$ e $\mathbf{x}_2 = (1, -1)^T$. Logo,

$$A = XDX^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

e a solução é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= e^{At}\mathbf{Y}_0 \\ &= Xe^{Dt}X^{-1}\mathbf{Y}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4e^{6t} + 2e^{-t} \\ 3e^{6t} - 2e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Compare com o Exemplo 1 da Seção 2. □

EXEMPLO 7. Use a exponencial de uma matriz para resolver o problema de valor inicial

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

SOLUÇÃO. Como a matriz A não é diagonalizável, vamos calcular e^{At} pela definição. Observe que $A^3 = O$, de modo que

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A solução do problema de valor inicial é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= e^{At}\mathbf{Y}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 + t + 2t^2 \\ 1 + 4t \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

EXERCÍCIOS

1. Fatore cada uma das matrizes A a seguir em um produto XDX^{-1}, onde D é diagonal.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

2. Para cada uma das matrizes no Exercício 1, use a fatoração XDX^{-1} para calcular A^6.

3. Para cada uma das matrizes invertíveis no Exercício 1, use a fatoração XDX^{-1} para calcular A^{-1}.

4. Para cada uma das matrizes a seguir, encontre uma matriz B tal que $B^2 = A$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = PD^{1/2}P^{-1}$

$B = PDP^{-1}$ neste caso $D^2 = D$ $B^2 = PDP^{-1} = A$

5. Seja A uma matriz diagonalizável $n \times n$ com matriz diagonalizante X. Mostre que a matriz $Y = (X^{-1})^T$ diagonaliza A^T.

6. Seja A uma matriz diagonalizável cujos autovalores são iguais a 1 ou a -1. Mostre que $A^{-1} = A$.

7. Mostre que qualquer matriz 3×3 da forma

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

não é diagonalizável.

8. Para cada uma das matrizes a seguir, encontre todos os valores possíveis do escalar α que faz com que a matriz não seja diagonalizável ou mostre que não existe tal valor.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

9. Seja A uma matriz 4×4 e seja λ um autovalor de multiplicidade 3. Se $A - \lambda I$ tem posto 1, A é diagonalizável? Explique.

10. Seja A uma matriz $n \times n$ com autovalores reais positivos $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$. Seja $\mathbf{x}_i$ o autovetor associado a λ_i para cada i e seja $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n$.

(a) Mostre que $A^m\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^m \mathbf{x}_i$.

(b) Se $\lambda_1 = 1$, mostre que $\lim_{m\to\infty} A^m\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1$.

11. Seja A uma matriz $n \times n$ com um autovalor λ de multiplicidade n. Mostre que A é diagonalizável se e somente se $A = \lambda I$.

12. Mostre que uma matriz nilpotente não-nula não é diagonalizável.

13. Seja A uma matriz diagonalizável com matriz diagonalizante X. Mostre que os vetores colunas de X associados aos autovalores não-nulos de A formam uma base para $R(A)$.