

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - DEPTO. DE MATEMÁTICA

Lista de exercícios de PNL - Professor Luiz Carlos Matioli

1. Prove que se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são definidas positivas, então $A + B$ é definida positiva.
2. Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica decomposta na forma $A = R^T R$ em que R é triangular superior cujas colunas são linearmente independentes. Mostre que A é definida positiva.

3. Determine os valores de b tal que a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & b \\ -1 & 2 & -1 \\ b & -1 & 2 \end{pmatrix}$ seja definida positiva.

4. Mostre que se uma matriz simétrica A é definida positiva, então os autovalores de A são todos positivos.

NOTA: A recíproca desse resultado é verdadeira, ou seja: se os autovalores de uma matriz simétrica A são todos positivos, então A é uma matriz definida positiva. A prova desse resultado utiliza conceitos de Álgebra linear que podem não ser do conhecimento de todos.

5. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Mostre que A é definida positiva utilizando:

(a) A definição.

(b) Determinantes.

(c) Autovalores.

6. Obtenha os polinômios de Taylor de ordens 1 e 2 das funções dadas em torno do ponto $0 \in \mathbb{R}^n$.

(a) $f(x) = \frac{x_1}{1 + x_2}$.

(b) $f(x) = e^{x_1} \sqrt{1 + x_2^2}$.

7. Aproxime $f(x) = e^x$ em $\bar{x} = 0$ pelos polinômios de Taylor de ordens 3 e 4. A seguir, calcule os valores dessas aproximações em $x = 0$, $x = 2$ e $x = 1$ e compare com os valores corretos.

8. Calcule os polinômios de Taylor de ordens 1, 2 e 3 das funções $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = \ln(x+1)$ em $\bar{x} = 0$. A seguir, calcule os valores dessas aproximações em $x = 0$, $x = 2$ e $x = 1$ e compare com os valores corretos.