EXERCÍCIOS

1. Se

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

calcule:

(a) $2A$ (b) $A + B$ (c) $2A - 3B$
(d) $(2A)^T - (3B)^T$ (e) AB (f) BA
(g) $A^T B^T$ (h) $(BA)^T$

2. Para cada um dos pares de matrizes dados a seguir, determine se é ou não possível efetuar a multiplicação da primeira matriz pela segunda. Se for possível, efetue a multiplicação.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

3. Para cada um dos pares no Exercício 2 é possível multiplicar a segunda matriz pela primeira. Qual o tamanho da matriz produto?

4. Escreva cada um dos sistemas a seguir como uma equação matricial.

(a) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 5 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}- x_3} &= 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

5. Se

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

verifique que:

(a) $5A = 3A + 2A$ (b) $6A = 3(2A)$ (c) $(A^T)^T = A$

6. Se

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

verifique que:

(a) $A + B = B + A$ (b) $3(A + B) = 3A + 3B$ (c) $(A + B)^T = A^T + B^T$

7. Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

verifique que

8. Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

verifique que:

(a) $(A + B) + C = A + (B + C)$
(b) $(AB)C = A(BC)$
(c) $A(B + C) = AB + AC$
(d) $(A + B)C = AC + BC$

9. Prove a associatividade para a multiplicação de matrizes 2×2, isto é, considere

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

e mostre que

$$(AB)C = A(BC)$$

10. Seja

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calcule A^2 e A^3. O que deve ser A^n?

11. Seja

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calcule A^2 e A^3. O que devem ser A^{2n} e A^{2n+1}?

12. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mostre que $A^n = O$ para $n \geq 4$.

13. Encontre matrizes A e B 2×2 diferentes da matriz nula para as quais $AB = O$.

14. Encontre matrizes não-nulas A, B, C tais que

$$AC = BC \quad \text{e} \quad A \neq B$$

15. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

tem a propriedade que $A^2 = O$. É possível para uma matriz simétrica 2×2 ter essa propriedade? Prove sua resposta.

16. O produto de duas matrizes simétricas é necessariamente simétrico? Prove sua resposta.

17. Seja A uma matriz $m \times n$.

18. Sejam A e B matrizes simétricas $n \times n$. Prove que $AB = BA$ se e somente se AB também é simétrica.

19. Na Aplicação 1, suponha que João perdeu 4 quilos. Se ele continuar com o mesmo programa de exercícios, quantas calorias vai queimar a cada dia?

20. Na Aplicação 3, quantas mulheres estarão casadas e quantas estarão solteiras depois de 3 anos?

21. Considere a matriz

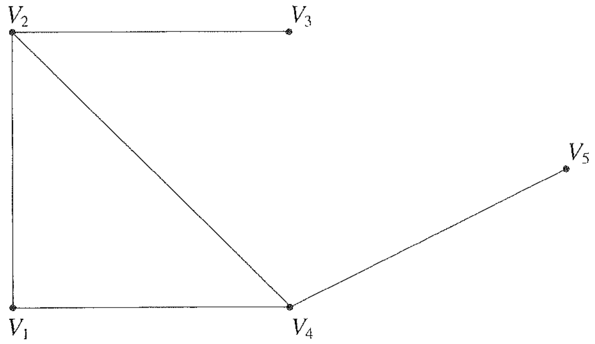
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Desenhe um grafo que tenha A como matriz de adjacência. Não se esqueça de marcar os vértices no gráfico.

(b) Analisando o grafo, determine o número de caminhos de comprimento 2 de V_2 a V_3 e de V_2 a V_5.

(c) Calcule a segunda linha de A^3 e use-a para determinar o número de caminhos de comprimento 3 de V_2 a V_3 e de V_2 a V_5.

22. Considere o grafo



(a) Encontre a matriz de adjacência A do grafo.

(b) Calcule A^2. O que os elementos da primeira linha de A^2 lhe dizem sobre os caminhos de comprimento 2 que começam em V_1?

(c) Calcule A^3. Quantos caminhos de comprimento 3 existem de V_2 a V_4? Quantos caminhos de comprimento menor ou igual a 3 existem de V_2 a V_4?

23. Seja A uma matriz 2×2 com $a_{11} \neq 0$ e seja $\alpha = a_{21}/a_{11}$. Mostre que A pode ser fatorada em um produto da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Qual o valor de b?

4 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

Vamos estudar, nesta seção, tipos especiais de matrizes, como matrizes triangulares, diagonais e elementares. Esses tipos especiais de matrizes têm um papel importante na solução de equações matriciais. Começamos considerando uma matriz especial I que age como a identidade multiplicativa, isto é,