LISTA 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de Otimização II PPGMA
Professor : Luiz Carlos Matioli

1. (Nash-Ariela) Considere o problema com restrição de caixa

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & \ell \leq x \leq u \end{array}$$

onde ℓ e u são vetores limites inferiores e superiores, tal que $\ell < u$. Se $\bar{x}$ é um minimizador local do problema (P), mostre que:

$$\begin{aligned} \text{se } \bar{x}_i = \ell_i \quad & \text{então } \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \geq 0, \\ \text{se } \bar{x}_i = u_i \quad & \text{então } \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \leq 0, \\ \text{se } \ell_i < \bar{x}_i < u_i \quad & \text{então } \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0. \end{aligned}$$

2. (a) Considere p uma função unidimensional da variável $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$ definida por

$$p(\lambda) = -(B + \lambda I)^{-1} g.$$

em que B é uma matriz real simétrica $n \times n$, I é uma matriz identidade de mesma dimensão que B e g é um vetor em $\mathbb{R}^n$. Utilizando o teorema espectral, mostre que para $\lambda \neq -\lambda_j, j = 1, 2, \ldots, n$, tem se

$$p(\lambda) = -Q(D + \lambda I)^{-1} Q^T g = -\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j^T g}{(\lambda_j + \lambda)} q_j, \tag{1}$$

sendo $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_1 \leq \lambda_2, \leq, \ldots \leq \lambda_n$, e q_j os vetores colunas da matriz ortogonal gerada pelo teorema espectral.

(b) Utilizando a ortogonalidade de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, mostre que

$$\|p(\lambda)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{(q_j^T g)^2}{(\lambda_j + \lambda)^2}.$$

(c) Mostre que

$$\frac{d}{d\lambda} \|p(\lambda\|^2 = -2 \sum_{j=1}^{n} \frac{(q_j^T g)^2}{(\lambda_j + \lambda)^3}.$$

3. (Adaptado do Livro do Nocedal) Considere $p(\lambda)$ definido como no exercício 2 item (a) e Δ um número positivo. Defina a função ϕ como

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\|p(\lambda)\|}. \tag{2}$$

e o seguinte algoritmo:

Algoritmo 1: Método de Newton para resolver $\phi(\lambda) = 0$.	
Dados:	$\lambda^0 > -\lambda_1$ e $\Delta > 0$. Faça $k = 0$ ($-\lambda_1$ é o maior autovalor de B).
Passo 1.	Fatore $B + \lambda^k I = R^T R$.
Passo 2.	Resolva $R^T R p = -g$.
Passo 3.	Resolva $R^T q = p$.
Passo 4.	Faça $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \left(\frac{\|p\| - \Delta}{\Delta}\right)\left(\frac{\|p\|}{\|q\|}\right)^2$.
Passo 5.	Faça $k = k + 1$ e volte ao Passo 1.

É conhecido que o método de Newton para resolver $\phi(\lambda) = 0$ é dado por:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k - \frac{\phi(\lambda^k)}{\phi'(\lambda^k)}. \tag{3}$$

(a) Mostre que $\|q\|^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(q_j^T g)^2}{(\lambda_j + \lambda)^3}$. (dica: utilize a equação (1) e a informação do Passo 3 do Algoritmo 1, ou seja, $\|q\|^2 = \|R^{-T}p\|^2 = p^T(B + \lambda I)^{-1}p = \ldots$)

(b) Mostre que λ^{k+1} em (3) é equivalente a λ^{k+1} do Passo 4 do Algoritmo 1, com ϕ definida em (2) e $p(\lambda)$ no exercício 2 item (a).

Dica: Utilize o artifício

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\|p(\lambda)\|}\right) = \frac{d}{d\lambda}(\|p(\lambda)\|^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(\|p(\lambda)\|^2)^{-3/2}\frac{d}{d\lambda}\|p(\lambda)\|^2,$$

e depois o exercício 2 item (c).

PPGMAT - ATÉ AQUI

4. Mostre que se B é uma matriz simétrica qualquer, então existe $\lambda \geq 0$ tal que $B + \lambda I$ é positiva definida.

5. (Problema Antílope) Suponha os seguintes dados em relação ao Antílope:

t_i	1	2	4	5	8
y_i	3	4	6	11	20