UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de Otimização II (PPGMA)
Professor : Luiz Carlos Matioli

NOTA: Os exercícios 2, 3, 6, 7 e 8 devem ser entregues até o dia 10/set/2015.

1. Considere os pontos $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_n, f_n)$ com x_i distintos e $p(x)$ um polinômio de grau menor ou igual a n que interpola os pontos dados. Mostre que o polinômio interpolador é único. (ver pg. Stewart pg. 138)

2. Considere $p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$
$+ c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$,
use $p(x_2)$ para mostrar que $c_2 = f[x_0, x_1, x_2)$ (livro Burden pg. 126).

3. Desenvolva o algoritmo da divisão sintética (Horner) para avaliar o polinômio de Newton em um ponto dado (como foi feito em aula para o polinômio na base canônica).

4. Dados os pontos $(-1, 1), (0, 1), (1, 2), (2, 0)$, determine o polinômio interpolador cúbico usando

   (i) a base canônica

   (ii) a base de Lagrange

   (iii) a base de Newton

   Mostre que as tres representações fornecem o mesmo polinômio.

5. (a) Considere o polinômio linear $p(x)$ que interpola x_0 e x_1. Supondo que $|f''(x)| \leq M$ mostre que o erro para $x \in [x_0, x_1]$ é limitado por $M\dfrac{(x_1 - x_0)^2}{8}$ (Stewart pg. 150).

   (b) Considere $f(x) = sen(x)$ e $h = x_1 - x_0$. Determine um limite para h tal que que a aproximação tenha uma precisão de 10^{-4} (idem).

6. Mostre que os polinômios de Lagrange e Newton possuem (aproximadamente) o número de operações dadas pela tabela abaixo:

   Sugestões: Para Lagrange verifique o número de operações para cada polinômio ℓ_i depois some a quantidade de termos em $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)\ell_i(x)$. Para Newton utilize a fórmula deduzida em sala para o cálculo das diferenças divididas, lembrando que estas formam uma matriz triangular inferior.

Método	Adições e divisões	Multiplicações	divisões
Lagrange	$2n^2 + 3n$	$2n^2 + n - 1$	$n + 1$
Newton	$n^2 + 3n$	n	$(n^2 + n)/2$

Tabela 1: Número de operações para Lagrange e Newton

7. Mostre que o polinômio de Hermite $H_{2n+1}(x)$ é o único polinômio de grau mínimo que coincide com f e f' em $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (Burden - exercício 11 pg. 134).

8. (exercício 5 livro do Burden) (a) Use os valores da tabela a seguir e aritmética de arredondamento de cinco algarismos para construir o polinômio interpolador de Hermite e aproximar $sen(0.34)$.

   (b) Determine um limitante do erro para a aproximação na parte (a) e compare-o com o erro real.

x	$sen(x)$	$D_x sen(x) = cos(x)$
0.30	0.29552	0.95534
0.32	0.31457	0.94924
0.35	0.34290	0.93937