(a) Encontre matrizes elementares E_1, E_2, E_3 tais que

$$E_3E_2E_1A = U$$

onde U é uma matriz triangular superior.

(b) Determine as inversas de E_1, E_2, E_3 e defina $L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$. Que tipo de matriz é L? Verifique que $A = LU$.

7. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Verifique que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Use A^{-1} para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para as seguintes escolhas de $\mathbf{b}$:

(i) $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$
(ii) $\mathbf{b} = (1, 2, 3)^T$
(iii) $\mathbf{b} = (-2, 1, 0)^T$

8. Encontre a inversa de cada uma das matrizes a seguir.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

9. Dadas

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

calcule A^{-1} e use-a para:

(a) encontrar uma matriz X 2×2 tal que $AX = B$;
(b) encontrar uma matriz Y 2×2 tal que $YA = B$.

10. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolva cada uma das equações matriciais a seguir.

(a) $AX + B = C$
(b) $XA + B = C$
(c) $AX + B = X$
(d) $XA + C = X$

11. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Mostre que, se $d = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, então

$$A^{-1} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

12. Seja A uma matriz não-singular. Mostre que A^{-1} também é não-singular e que $(A^{-1})^{-1} = A$.

13. Prove que, se A é invertível, então A^T é invertível e

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

[*Sugestão:* $(AB)^T = B^T A^T$.]

14. Seja A uma matriz invertível $n \times n$. Use indução matemática para provar que A^m é invertível e que

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$$

para $m = 1, 2, 3, \ldots$.

15. A transposta de uma matriz elementar é uma matriz elementar do mesmo tipo? O produto de duas matrizes elementares é uma matriz elementar?

16. Seja U e R matrizes triangulares superiores $n \times n$ e seja $T = UR$. Mostre que T também é triangular superior e que $t_{jj} = u_{jj}r_{jj}$ para $j = 1, \ldots, n$.

17. Sejam A e B matrizes $n \times n$ e seja $C = AB$. Prove que, se B é singular, então C tem que ser singular.

[*Sugestão:* Use o Teorema 1.4.3.]

18. Seja U uma matriz triangular superior com todos os elementos diagonais diferentes de zero.
(a) Explique por que U tem que ser invertível.
(b) Explique por que U^{-1} tem que ser triangular superior.

19. Sejam A uma matriz invertível $n \times n$ e B uma matriz $n \times r$. Mostre que a forma escada reduzida por linhas de $(A|B)$ é $(I|C)$, onde $C = A^{-1}B$.

20. Em geral, a multiplicação de matrizes não é comutativa (isto é, $AB \neq BA$). No entanto, existem certos casos especiais em que a comutatividade é válida. Mostre que:
(a) se D_1 e D_2 são matrizes diagonais, então $D_1D_2 = D_2D_1$;
(b) se A é uma matriz $n \times n$ e

$$B = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_k A^k$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_k$ são escalares, então $AB = BA$.

21. Mostre que, se A é uma matriz simétrica invertível, então A^{-1} também é simétrica.

22. Prove que, se A é equivalente por linhas a B, então B é equivalente por linhas a A.

23. (a) Prove que, se A é equivalente por linhas a B e se B é equivalente por linhas a C, então A é equivalente por linhas a C.
(b) Prove que duas matrizes invertíveis $n \times n$ quaisquer são equivalentes por linha.

24. Prove que B é equivalente por linhas a A se e somente se existe uma matriz invertível M tal que $B = MA$.

25. Dado um vetor $\mathbf{x} \in R^{n+1}$, a matriz V $(n+1) \times (n+1)$, definida por

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = 1 \\ x_i^{j-1} & \text{para } j = 2, \ldots, n+1 \end{cases}$$

é chamada de matriz de Vandermonde.
(a) Mostre que, se

$$V\mathbf{c} = \mathbf{y}$$

e

$$p(x) = c_1 + c_2 x + \cdots + c_{n+1} x^n$$

então

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

NÃO FAZER

(b) Suponha que $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ são todos distintos. Mostre que, se $\mathbf{c}$ é uma solução de $V\mathbf{x} = \mathbf{0}$, então os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ têm que ser todos nulos e, portanto, V tem que ser invertível.