

$$\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = -1\vec{u} + 27\vec{v} = -(3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}) + 27(2\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} + 54\vec{i} - 27\vec{j} = 51\vec{i} - 25\vec{j} + 6\vec{k}$$

Comparando $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ e $\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})$, verifica-se que:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}).$$

3.16 Problemas Propostos

- 1) Dados os vetores $\vec{u} = (1, a, -2a - 1)$, $\vec{v} = (a, a - 1, 1)$ e $\vec{w} = (a, -1, 1)$, determinar a de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

- 2) Dados os pontos $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 1)$ e $C(0, 1, 3)$, determinar o vetor \vec{x} tal que $2\vec{x} - \vec{AB} = \vec{x} + (\vec{BC} \cdot \vec{AB}) \vec{AC}$.

- 3) Determinar o vetor \vec{v} , sabendo que

$$(3, 7, 1) + 2\vec{v} = (6, 10, 4) - \vec{v}.$$

- 4) Dados os pontos $A(1, 2, 3)$, $B(-6, -2, 3)$ e $C(1, 2, 1)$, determinar o versor do vetor $3\vec{BA} - 2\vec{BC}$.

- 5) Verificar se são unitários os seguintes vetores:

$$\vec{u} = (1, 1, 1) \text{ e } \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

- 6) Determinar o valor de n para que o vetor $\vec{v} = (n, \frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ seja unitário.

- 7) Seja o vetor $\vec{v} = (m + 7)\vec{i} + (m + 2)\vec{j} + 5\vec{k}$. Calcular m para que $|\vec{v}| = \sqrt{38}$.

- 8) Dados os pontos $A(1, 0, -1)$, $B(4, 2, 1)$ e $C(1, 2, 0)$, determinar o valor de m para que $|\vec{v}| = 7$, sendo $\vec{v} = m\vec{AC} + \vec{BC}$.

- 9) Dados os pontos $A(3, m - 1, -4)$ e $B(8, 2m - 1, m)$, determinar m de modo que $|\vec{AB}| = \sqrt{35}$.

- 10) Calcular o perímetro do triângulo de vértices $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 0, -1)$ e $C(2, -1, 0)$.

- 11) Obter um ponto P do eixo das abscissas equidistante dos pontos $A(2, -3, 1)$ e $B(-2, 1, -1)$.
- 12) Seja o triângulo de vértices $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ e $C(3, -2, 1)$. Determinar o ângulo interno ao vértice B .
- 13) Os pontos A , B e C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 10 cm. Calcular o produto escalar dos vetores \vec{AB} e \vec{AC} .
- 14) Os lados de um triângulo retângulo ABC (reto em A) medem 5, 12 e 13. Calcular $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BA} \cdot \vec{BC} + \vec{CA} \cdot \vec{CB}$.
- 15) Determinar os ângulos do triângulo de vértices $A(2, 1, 3)$, $B(1, 0, -1)$ e $C(-1, 2, 1)$.
- 16) Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, m+2)$ é $\frac{\pi}{3}$, determinar m .
- 17) Calcular n para que seja de 30° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, n, 2)$ e \vec{j} .
- 18) Dados os vetores $\vec{a} = (2, 1, \alpha)$, $\vec{b} = (\alpha + 2, -5, 2)$ e $\vec{c} = (2\alpha, 8, \alpha)$, determinar o valor de α para que o vetor $\vec{a} + \vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c} - \vec{a}$.
- 19) Determinar o vetor \vec{v} , paralelo ao vetor $\vec{u} = (1, -1, 2)$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -18$.
 $(-3, 3, -6)$
 $-3 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) - 6 \cdot 2 = -18$
- 20) Determinar o vetor \vec{v} ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2, -3, -12)$ e colinear ao vetor $\vec{w} = (-6, 4, -2)$.
- 21) Determinar o vetor \vec{v} , colinear ao vetor $\vec{u} = (-4, 2, 6)$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{w} = -12$, sendo $\vec{w} = (-1, 4, 2)$.
- 22) Provar que os pontos $A(5, 1, 5)$, $B(4, 3, 2)$ e $C(-3, -2, 1)$ são vértices de um triângulo retângulo.
- 23) Qual o valor de α para que os vetores $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{b} = (\alpha + 1)\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ sejam ortogonais?
- 24) Verificar se existe ângulo reto no triângulo ABC , sendo $A(2, 1, 3)$, $B(3, 3, 5)$ e $C(0, 4, 1)$.
- 25) Os ângulos diretores de um vetor podem ser de 45° , 60° e 90° ? Justificar.
- 26) Os ângulos diretores de um vetor são 45° , 60° e γ . Determinar γ .

- 27) Determinar o vetor \vec{v} , sabendo que $|\vec{v}| = 5$, \vec{v} é ortogonal ao eixo Oz, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$ e $\vec{w} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.
- 28) Sabe-se que $|\vec{v}| = 2$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ e $\cos \beta = -\frac{1}{4}$. Determinar \vec{v} .
- 29) Determinar um vetor unitário ortogonal ao vetor $\vec{v} = (2, -1, 1)$.
- 30) Determinar um vetor de módulo 5 paralelo ao vetor $\vec{v} = (1, -1, 2)$.
- 31) O vetor \vec{v} é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -1, 3)$ e $\vec{w} = (1, 0, -2)$ e forma ângulo agudo com o vetor \vec{j} . Calcular \vec{v} , sabendo que $|\vec{v}| = 3\sqrt{6}$.
- 32) Determinar o vetor \vec{v} , ortogonal ao eixo Oz, que satisfaz as condições $\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 10$ e $\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = -5$, sendo $\vec{v}_1 = (2, 3, -1)$ e $\vec{v}_2 = (1, -1, 2)$.
- 33) Determinar o vetor projeção do vetor $\vec{u} = (1, 2, -3)$ na direção de $\vec{v} = (2, 1, -2)$.
- 34) Qual o comprimento do vetor projeção de $\vec{u} = (3, 5, 2)$ sobre o eixo dos x?
- 35) Se o vetor \vec{AB} tem co-senos diretores p, q e r e ângulos diretores α, β e γ , quais são os co-senos e os ângulos diretores de \vec{BA} ?
- 36) Mostrar que se \vec{u} e \vec{v} são vetores, tal que $\vec{u} + \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u} - \vec{v}$, então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.
- 37) Mostrar que, se \vec{u} é ortogonal a \vec{v} e \vec{w} , \vec{u} é também ortogonal a $\vec{v} + \vec{w}$.
- 38) Calcular o módulo dos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, sabendo que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ e o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} é de 60° .
- 39) Sabendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e que \vec{u} e \vec{v} formam um ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ rad, determinar $|(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})|$.
- 40) Determinar $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$, sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = \sqrt{5}$.
- 41) O vetor \vec{v} é ortogonal aos vetores $\vec{a} = (1, 2, 0)$ e $\vec{b} = (1, 4, 3)$ e forma ângulo agudo com o eixo dos x. Determinar \vec{v} , sabendo que $|\vec{v}| = 14$.
- 42) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$, calcular:

- a) $\vec{w} \times \vec{v}$
- b) $\vec{v} \times (\vec{w} - \vec{u})$
- c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$
- d) $(2\vec{u}) \times (3\vec{v})$
- e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
- f) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ e $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
- g) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ e $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
- h) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$

43) Dados os vetores $\vec{a} = (1, 2, 1)$ e $\vec{b} = (2, 1, 0)$, calcular:

- a) $2\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})$
- b) $(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})$

44) Dados os pontos $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$ e $C(3, 2, 1)$, determinar o vetor $\vec{CB} \times (\vec{BC} - 2\vec{CA})$.

45) Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $2\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{b} - \vec{a}$, sendo $\vec{a} = (3, -1, -2)$ e $\vec{b} = (1, 0, -3)$.

46) Dados os vetores $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (3, 4, -2)$ e $\vec{c} = (-5, 1, -4)$, mostrar que $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

47) Determinar o valor de m para que o vetor $\vec{w} = (1, 2, m)$ seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{v}_1 = (2, -1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, -3, -1)$.

48) Dados os vetores $\vec{v} = (a, 5b, -\frac{c}{2})$ e $\vec{w} = (-3a, x, y)$, determinar x e y para que $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$.

49) Determinar um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (2, -1, 3)$. Nas mesmas condições, determinar um vetor de módulo 5.

50) Mostrar num gráfico um representante de cada um dos seguintes vetores:

- a) $\vec{j} \times 2\vec{i}$
- b) $3\vec{i} \times 2\vec{k}$

- 51) Sabendo que $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$ e 45° é o ângulo entre \vec{a} e \vec{b} , calcular $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
- 52) Se $|\vec{u} \times \vec{v}|=3\sqrt{3}$, $|\vec{u}|=3$ e 60° é o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} , determinar $|\vec{v}|$.
- 53) Dados os vetores $\vec{a}=(3, 4, 2)$ e $\vec{b}=(2, 1, 1)$, obter um vetor de módulo 3 que seja ao mesmo tempo ortogonal aos vetores $2\vec{a}-\vec{b}$ e $\vec{a}+\vec{b}$.
- 54) Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u}=(3; 1, 2)$ e $\vec{v}=(4, -1, 0)$.
- 55) Mostrar que o quadrilátero cujos vértices são os pontos $A(1, -2, 3)$, $B(4, 3, -1)$, $C(5, 7, -3)$ e $D(2, 2, 1)$ é um paralelogramo e calcular sua área.
- 56) Calcular a área do paralelogramo cujos lados são determinados pelos vetores $2\vec{u}$ e $-\vec{v}$, sendo $\vec{u}=(2, -1, 0)$ e $\vec{v}=(1, -3, 2)$.
- 57) Calcular a área do triângulo de vértices
- a) $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 1)$ e $C(0, 1, 3)$
 - b) $A(1, 0, 1)$, $B(4, 2, 1)$ e $C(1, 2, 0)$
 - c) $A(2, 3, -1)$, $B(3, 1, -2)$ e $C(-1, 0, 2)$
 - d) $A(-1, 2, -2)$, $B(2, 3, -1)$ e $C(0, 1, 1)$
- 58) Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A(3, 2, 1)$ e uma diagonal de extremidades $B(1, 1, -1)$ e $C(0, 1, 2)$.
- 59) Calcular x , sabendo que $A(x, 1, 1)$, $B(1, -1, 0)$ e $C(2, 1, -1)$ são vértices de um triângulo de área $\frac{\sqrt{29}}{2}$.
- 60) Dado o triângulo de vértices $A(0, 1, -1)$, $B(-2, 0, 1)$ e $C(1, -2, 0)$, calcular a medida da altura relativa ao lado BC.
- 61) Determinar \vec{v} tal que \vec{v} seja ortogonal ao eixo dos y e $\vec{u}=\vec{v} \times \vec{w}$, sendo $\vec{u}=(1, 1, -1)$ e $\vec{w}=(2, -1, 1)$.
- 62) Dados os vetores $\vec{u}=(0, 1, -1)$, $\vec{v}=(2, -2, -2)$ e $\vec{w}=(1, -1, 2)$, determinar o vetor \vec{x} , paralelo a \vec{w} , que satisfaz à condição: $\vec{x} \times \vec{u}=\vec{v}$.

- 63) Dados os vetores $\vec{u} = (2, 1, 0)$ e $\vec{v} = (3, -6, 9)$, determinar o vetor \vec{x} que satisfaz a relação $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{x}$ e que seja ortogonal ao vetor $\vec{w} = (1, -2, 3)$.
- 64) Demonstrar que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$, sabendo que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.
- 65) Sendo \vec{u} e \vec{v} vetores do espaço, com $\vec{v} \neq \vec{0}$:
- determinar o número real r tal que $\vec{u} - r\vec{v}$ seja ortogonal a \vec{v} ;
 - mostrar que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}$.
- 66) Demonstrar que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.
- 67) Verificar se são coplanares os seguintes vetores:
- $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (1, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 3, 4)$
 - $\vec{u} = (2, -1, 0)$, $\vec{v} = (3, 1, 2)$ e $\vec{w} = (7, -1, 2)$
- 68) Verificar se são coplanares os pontos:
- A(1, 1, 1), B(-2, -1, -3), C(0, 2, -2) e D(-1, 0, -2)
 - A(1, 0, 2), B(-1, 0, 3), C(2, 4, 1) e D(-1, -2, 2)
 - A(2, 1, 3), B(3, 2, 4), C(-1, -1, -1) e D(0, 1, -1)
- 69) Para que valor de m os pontos A($m, 1, 2$), B(2, -2, -3), C(5, -1, 1) e D(3, -2, -2) são coplanares?
- 70) Determinar o valor de k para que os seguintes vetores sejam coplanares:
- $\vec{a} = (2, -1, k)$, $\vec{b} = (1, 0, 2)$ e $\vec{c} = (k, 3, k)$
 - $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, -3)$ e $\vec{c} = (k, 1, -k)$
 - $\vec{a} = (2, k, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, k)$ e $\vec{c} = (3, 0, -3)$
- 71) Sejam os vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$, $\vec{w}_1 = 3\vec{u} - 2\vec{v}$, $\vec{w}_2 = \vec{u} + 3\vec{v}$ e $\vec{w}_3 = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Determinar o volume do paralelepípedo definido por \vec{w}_1, \vec{w}_2 e \vec{w}_3 .

- 72) Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{v}_1 = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v}_2 = 6\vec{i} + m\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{v}_3 = -4\vec{i} + \vec{k}$ seja igual a 10.
- 73) Os vetores $\vec{a} = (2, -1, -3)$, $\vec{b} = (-1, 1, -4)$ e $\vec{c} = (m+1, m, -1)$ determinam um paralelepípedo de volume 42. Calcular m .
- 74) Dados os pontos $A(1, -2, 3)$, $B(2, -1, -4)$, $C(0, 2, 0)$ e $D(-1, m, 1)$, determinar o valor de m para que seja de 20 unidades de volume o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores \vec{AB} , \vec{AC} e \vec{AD} .
- 75) Calcular o volume do tetraedro ABCD, sendo dados:
- a) $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ e $D(4, 2, 7)$
- b) $A(-1, 3, 2)$, $B(0, 1, -1)$, $C(-2, 0, 1)$ e $D(1, -2, 0)$. Para este, calcular também a medida da altura traçada do vértice A .

3.16.1 Respostas dos Problemas Propostos

- | | |
|--|---|
| 1) $a = 2$ | 11) $P(1, 0, 0)$ |
| 2) $\vec{x} = (-17, -13, -15)$ | 12) 45° |
| 3) $\vec{v} = (1, 1, 1)$ | 13) 50 |
| 4) $(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9})$ | 14) 169 |
| 5) \vec{v} é unitário | 15) $\hat{A} = \arccos \frac{10}{3\sqrt{28}}$ |
| 6) $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ | $\hat{B} = \arccos \frac{2\sqrt{6}}{9}$ |
| 7) -4 ou -5 | $\hat{C} = \arccos \frac{2}{\sqrt{42}}$ |
| 8) 3 ou $-\frac{13}{5}$ | 16) $m = -4$ |
| 9) -3 ou -1 | 17) $\pm\sqrt{15}$ |
| 10) $2(\sqrt{11} + \sqrt{3})$ | 18) 3 ou -6 |

- 19) $(-3, 3, -6)$
- 20) $\vec{v} = t(3, -2, 1), t \in \mathbb{R}$
- 21) $(2, -1, -3)$
- 22) $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$
- 23) -3 ou 2
- 24) \hat{A}
- 25) Não, $\cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 90^\circ \neq 1$
- 26) 60° ou 120°
- 27) $(4, 3, 0)$ ou $(-4, 3, 0)$
- 28) $\vec{v} = (1, -\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{11}}{2})$
- 29) Um deles é $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
- 30) $(\pm \frac{5}{\sqrt{6}}, \mp \frac{5}{\sqrt{6}}, \pm \frac{10}{\sqrt{6}})$
- 31) $(2, 7, 1)$
- 32) $(-1, 4, 0)$
- 33) $\frac{10}{9} (2, 1, -1)$
- 34) 3
- 35) $-\pi, -\pi$ e $-\pi$
 $\pi - \alpha, \pi - \beta$ e $\pi - \gamma$
- 38) $\sqrt{37}$ e $\sqrt{13}$
- 39) $26 + 15\sqrt{2}$
- 40) -9
- 41) $(12, -6, 4)$
- 42) a) $(2, 2, -1)$
 b) $(-1, -1, 0)$
 c) $(-2, -2, 2)$
 d) $(6, 6, -6)$
 e) 3
 f) -1 e -1
 g) $(4, -1, 3)$ e $(1, -4, -6)$
 h) 1
- 43) a) $(-2, 4, -6)$
 b) $(4, -8, 12)$
- 44) $(12, -8, -12)$
- 45) $x(3, 7, 1), x \in \mathbb{R}$
- 46) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 10 = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
- 47) -5
- 48) $x = -15b, y = \frac{3}{2}c$
- 49) Duas soluções para cada caso:
 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ ou $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
 e:
 $5(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ ou $5(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

- 51) 3
- 52) 2
- 53) $(\frac{6}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}, -\frac{15}{\sqrt{30}})$
- 54) $\sqrt{117}$
- 55) $\sqrt{89}$
- 56) $6\sqrt{5}$
- 57) a) $\sqrt{6}$
b) $\frac{7}{2}$
c) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$
d) $2\sqrt{6}$
- 58) $\sqrt{74}$
- 59) 3 ou $\frac{1}{5}$
- 60) $\frac{3\sqrt{35}}{7}$
- 61) (1, 0, 1)
- 62) (-2, 2, -4)
- 63) $\vec{x} = (2y - 9, y, 3)$
- 64) a) $r = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}$
- 65) a) Não; b) Sim.
- 66) a) Sim; b) Não; c) Sim.
- 67) m = 4
- 68) a) 6 ; b) $\frac{3}{2}$; c) 2 ou -3
- 69) 44 u.v.
- 70) 6 ou -4
- 71) 2 ou $-\frac{8}{3}$
- 72) 6 ou 2
- 73) a) 2 ; b) 4 e $\frac{8}{\sqrt{10}}$