UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de Análise Numérica I (PPGM)
Professor : Luiz Carlos Matioli

NOTA: Os exercícios 2, 4, 6, 8, 9, 11, 13 e 14 devem ser entregues até o dia 29/09/15.

1. Desenvolver a regra de Simpson composta para n subintervalos (fazer para o caso quando n é par e quando n é impar - ver Stewart pg. 166).

2. (a) Mostre que o erro na fórmula dos trapézios composta é dada por

$$E_{TC} = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\alpha_i), \quad x_{i-1} \le \alpha_i \le x_i.$$

(b) Supondo que $f''(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$ e chamando $m = min_{[a,b]} f''(x)$ e $M = max_{[a,b]} f''(x)$. Mostre que

$$nm \le \sum_{i=1}^{n} f''(\alpha_i) \le nM, \qquad \text{onde n é o número de trapézios.}$$

(c) Usando o teorema do valor intermediário, mostre que existe $\alpha \in [a, b]$ tal que o erro na fórmula dos trapézios composta, com n trapézios, pode ser estimado usando a expressão

$$E_{TC} = -n\frac{h^3}{12}f''(\alpha) \quad \text{ou} \quad E_{TC} = -(b-a)\frac{h^2}{12}f''(\alpha).$$

3. Idem ao exercício anterior para a regra de Simpson composta usando $(n + 1)$ pontos igualmente espaçados $x_0, x_1, \cdots, x_n$, considerando o caso em que n é par (ver Burden pg. 91 da 8^a edição).

4. (Livro Burden pg. 196 da 8^a edição) Determine, pelas regras dos Trapézios e Simpson compostas, os valores de n e h necessários para obter uma aproximação de $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x+4}dx$, com precisão de 10^{-5} e calcule a aproximacão.

5. Considere $\{p_i\}_{i=0}^{n}$ uma sequência de polinômios tal que p_i é exatamente de grau i. Se

$$q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

então $q(x)$ pode ser escrito unicamente na forma

$$q(x) = b_n p_n(x) + b_{n-1}p_{n-1}(x) + \cdots + b_0 p_0(x).$$

Sugestão: indução finita sobre n supondo que $p_i(x)$ é mônico (tem um rascunho no Stewart pg. 172).

6. Desenvolver a regra dos trapézios simples usando o polinômio de Newton de grau 1 ao invés dos polinômios de Lagrange. Idem para a regra de Simpison para polinômios de grau 2.

7. Considere $\int_{-1}^{1} f(x)dx \sim w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$, a base canônica $\{1, x, x^2, x^3\}$, w_0, w_1, x_0, x_1 incógnitas e resolva o sistema não linear gerado pelo método similar ao dos coeficientes indeterminados (compare o resultado com quadratura de Gauss-Legendre de dois pontos vista em aula).

8. Para obter uma aproximação de $f''(x_1)$, expanda uma função f (que possua derivadas contínuas até ordem 4 pelo menos) em um polinômio de Taylor de grau três em torno de um ponto x_1, com erro de ordem 4. (ver um rascunho desse exercício no livro do Burden na pg. 167 da 8^a edição).

9. Usando a expansão de Taylor de ordem três de uma função f em torno de x_1 (suponha que f seja continuamente diferenciável pelo menos até ordem 4) e o exercício anterior. Mostre que

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{12}\left[\frac{1}{3}f^{(4)}(\xi_2) - \frac{1}{5}f^{(4)}(\xi_1)\right],$$

em que $\xi_1, \xi_2 \in [x_0, x_2]$. NOTA: este exercício juntamente com o desenvolvido em sala determinam a regra de Simpson com erro de ordem 4 (ver um rascunho deste exercício no livro do Burden pgs. 182 e 183 da 8^a edição - aproveitem para corrigir alguns erros de sinais que aparecem no livro).

10. (Livro Burden pg. 188 da 8^a edição) A fórmula de quadratura $\int_{-1}^{1} f(x)dx = c_0 f(-1) + c_1 f(0) + c_2 f(1)$ é exata para todos os polinômios de grau menor ou igual a 2. Determine c_0, c_1 e c_2.

11. (a) (Adaptado do livro: Métodos Numéricos da Maria Cristina Cunha da Unicamp) Mudança de variável para usar a quadratura de Gauss-Legendre em um intervalo qualquer $[a, b]$. Interpolando os pontos (a,-1) e (b,1) por um polinômio linear, mostre que:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{b+a}{2}\right)dy.$$

(b) Aproxime a integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ usando as fórmulas de Gauss-Legendre de dois e três pontos.

12. Determine uma aproximação para a integral $\displaystyle\int_{-2}^{2} e^{x^2/2}dx$ usando a quadratura de Gauss-Legendre de dois pontos.

13. Os primeiros polinômios de Laguerre

$p_0(x) = 1$,

$p_1(x) = 1 - x$,

$p_2(x) = x^2 - 4x + 2$ e

$p_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$

são ortogonais com relação ao produto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)dx.$$

Encontre uma fórmula de integração para $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx$ exata para polinômios de grau 3.

14. Aplique a fórmula encontrada no exercício anterior para aproximar

$$\int_0^{\infty} e^{-x} sen x dx.$$