

4.14.1 Ponto que Divide um Segmento de Reta ao Meio

No caso de o ponto P dividir o segmento de reta P_1P_2 ao meio (Fig. 4.14-c), deve-se ter:

$$\overrightarrow{P_1P} = -\overrightarrow{P_2P},$$

isto é, $r = -1$.

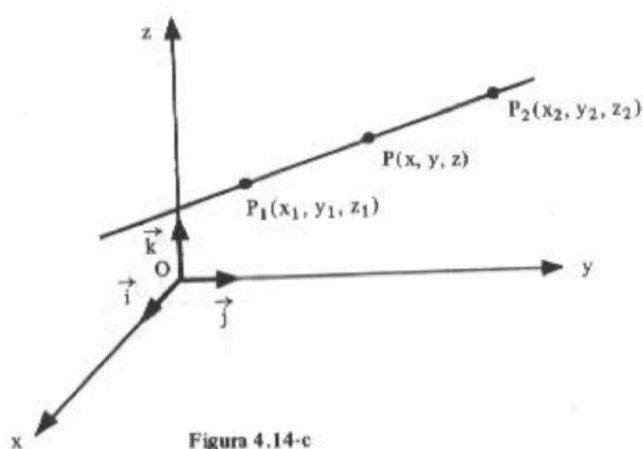


Figura 4.14-c

Neste caso:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Nota

O estudo da reta no plano não será feito neste livro por pertencer ao currículo do 2º grau.

4.15 Problemas Propostos

- (1) Verificar se os pontos $P_1(5, -5, 6)$ e $P_2(4, -1, 12)$ pertencem à reta

$$r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$$

- 2) Determinar o ponto da reta

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

que tem abscissa 4.

- 3) Determinar m e n para que o ponto $P(3, m, n)$ pertença à reta

$$s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 - t \\ z = -4 + t \end{cases}$$

- 4) Determinar os pontos da reta $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-2}$ que têm (a) abscissa 5; (b) ordenada 4; (c) cota 1.
- 5) O ponto $P(2, y, z)$ pertence à reta determinada por $A(3, -1, 4)$ e $B(4, -3, -1)$. Calcular P .
- 6) Determinar as equações reduzidas, com variável independente x , da reta que passa pelo ponto $A(4, 0, -3)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$.
- 7) Estabelecer as equações reduzidas (variável independente x) da reta determinada pelos pares de pontos:
- a) $A(1, -2, 3)$ e $B(3, -1, -1)$
 b) $A(-1, 2, 3)$ e $B(2, -1, 3)$
- 8) Determinar as equações reduzidas, tendo z como variável independente, da reta que passa pelos pontos $P_1(-1, 0, 3)$ e $P_2(1, 2, 7)$.
- 9) Mostrar que os pontos $A(-1, 4, -3)$, $B(2, 1, 3)$ e $C(4, -1, 7)$ são colineares.
- 10) Qual deve ser o valor de m para que os pontos $A(3, m, 1)$, $B(1, 1, -1)$ e $C(-2, 10, -4)$ pertençam à mesma reta?

11) Citar um ponto e um vetor diretor de cada uma das seguintes retas:

$$a) \begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{z-3}{4} \\ y=1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} y=3 \\ z=-1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x=2y \\ z=3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} y=-x \\ z=3+x \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x=2t \\ y=-1 \\ z=2-t \end{cases}$$

$$f) \quad x=y=z$$

12) Determinar as equações das seguintes retas:

a) reta que passa por $A(1, -2, 4)$ e é paralela ao eixo dos x ;

b) reta que passa por $B(3, 2, 1)$ e é perpendicular ao plano xOz ;

c) reta que passa por $A(2, 3, 4)$ e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos dos x e dos y ;

d) reta que passa por $A(4, -1, 2)$ e tem a direção do vetor $\vec{i} - \vec{j}$;

e) reta que passa pelos pontos $M(2, -3, 4)$ e $N(2, -1, 3)$.

13) Representar graficamente as retas cujas equações são:

$$a) \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -10 + 5t \\ z = 9 - 3t \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} z = 2y \\ x = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 \\ z = -5 - 5t \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} y = 2x \\ z = 3 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} y = -3x + 6 \\ z = -x + 4 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x = -3 \\ z = 4 \end{cases}$$

14) Determinar o ângulo entre as seguintes retas:

$$a) \quad r: \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 2t \\ z = 3 - 4t \end{cases} \quad e \quad s: \frac{x}{4} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-1}{2}$$

$$b) \quad r: \begin{cases} y = -2x - 1 \\ z = x + 2 \end{cases} \quad e \quad s: \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-3}; x = 2$$

$$c) \quad r: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}t \\ y = t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$d) \quad r: \left\{ \frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2} \right. \quad e \quad s: \begin{cases} x = 1 \\ \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3} \end{cases}$$

15) Determinar o valor de n para que seja de 30° o ângulo entre as retas

$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{3} \quad e \quad s: \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$$

16) Calcular o valor de n para que seja de 30° o ângulo que a reta

$$r: \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 3 \end{cases}$$

forma com o eixo dos y .

17) A reta

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

forma um ângulo de 60° com a reta determinada pelos pontos $A(3, 1, -2)$ e $B(4, 0, m)$.
Calcular o valor de m .

- 18) Calcular o valor de m para que os seguintes pares de retas sejam paralelas:

$$a) \quad r: \begin{cases} x = -3t \\ y = 3 + t \\ z = 4 \end{cases} \quad e \quad s: \frac{x+5}{6} = \frac{y-1}{m}; z=6$$

$$b) \quad r: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 \\ z = mt \end{cases} \quad e \quad s: \frac{x-4}{6} = \frac{z-1}{5}; y=7$$

- 19) A reta r passa pelo ponto $A(1, -2, 1)$ e é paralela à reta

$$s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}$$

Se $P(-3, m, n) \in r$, determinar m e n .

- 20) Quais as equações reduzidas da reta que passa pelo ponto $A(-2, 1, 0)$ e é paralela à reta

$$r: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-1} ?$$

- 21) A reta que passa pelos pontos $A(-2, 5, 1)$ e $B(1, 3, 0)$ é paralela à reta determinada por $C(3, -1, -1)$ e $D(0, y, z)$. Determinar o ponto D .

- 22) A reta

$$r: \begin{cases} y = mx + 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$$

é ortogonal à reta determinada pelos pontos $A(1, 0, m)$ e $B(-2, 2m, 2m)$. Calcular o valor de m .

23) Calcular o valor de m para que sejam coplanares as seguintes retas

$$a) \quad r: \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 3x - 1 \end{cases} \quad e \quad s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{m}$$

$$b) \quad r: \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} y = 4x - m \\ z = x \end{cases}$$

$$c) \quad r: \frac{x-m}{m} = \frac{y-4}{-3}; z=6 \quad e \quad s: \begin{cases} y = -3x + 4 \\ z = -2x \end{cases}$$

24) Calcular o ponto de interseção das retas

$$a) \quad r: \begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = 2x + 1 \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} y = 4x - 2 \\ z = 3x \end{cases}$$

$$b) \quad r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \quad e \quad s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

$$c) \quad r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = 4x - 10 \end{cases} \quad e \quad s: x = \frac{y-7}{-3} = \frac{z-12}{-7}$$

$$d) \quad r: \begin{cases} y = -5 \\ z = 4x + 1 \end{cases} \quad e \quad s: \frac{x-1}{2} = \frac{z-5}{-3}; y = -5$$

25) Dadas as retas

$$r: \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-2}; x=2, \quad s: \begin{cases} y = 2x \\ z = x - 3 \end{cases} \quad e$$

$$h: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = t, \end{cases}$$

determinar:

a) o ponto de interseção de s e h ;

b) o ângulo entre r e s .

26) Em que ponto a reta que passa por $A(2, 3, 4)$ e $B(1, 0, -2)$ intercepta o plano xy ?

27) Sejam as retas

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 5t \\ z = mt \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \end{cases}$$

a) calcular o valor de m para que r e s sejam concorrentes;

b) determinar, para o valor de m , o ponto de interseção de r e s .

28) Estabelecer as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A(3, 2, 1)$ e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r: \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3 \end{cases}$$

29) Estabelecer as equações da reta que passa pela origem e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{-2} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = -x + 4 \end{cases}$$

30) Determinar as equações paramétricas da reta que contém o ponto $A(2, 0, -1)$ e é simultaneamente ortogonal à reta

$$r: \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1}; \quad x = 1$$

e ao eixo dos y .

31) Estabelecer as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto de interseção das retas

$$r: x - 2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$$

e é, ao mesmo tempo, ortogonal a r e s .

32) A reta

$$r: \frac{x-1}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{-2}$$

é paralela à reta que passa pelo ponto $A(-1, 0, 0)$ e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r_1: \begin{cases} x = -t \\ y = -2t + 3 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} y = x \\ z = 2x \end{cases}$$

Calcular a e b .

33) Dados os pontos $P_1(7, -1, 3)$ e $P_2(3, 0, -12)$, determinar:

a) o ponto P , que divide o segmento P_1P_2 na razão $\frac{2}{3}$;

b) o ponto Q , que divide o segmento P_1P_2 ao meio.

34) O ponto $P(9, 14, 7)$ divide o segmento P_1P_2 na razão $\frac{2}{3}$.

Determinar P_2 , sabendo que $P_1(1, 4, 3)$.

35) Seja o triângulo de vértices $A(1, 0, -2)$, $B(2, -1, -6)$ e $C(-4, 5, 2)$.

Estabelecer as equações paramétricas da reta suporte da mediana do triângulo ABC relativa ao lado BC .

4.15.1 Respostas dos Problemas Propostos

1) Apenas P_1 ✓

2) $(4, 1, 5)$

3) $m = -2, n = -5$

4) $(5, -2, -2), (-7, 4, 10) (2, -\frac{1}{2}, 1)$

5) $P(2, 1, 9)$

6) $y = 2x - 8$ e $z = \frac{5}{2}x - 13$

7) a)
$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2} \\ z = -2x + 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

8) $x = \frac{1}{2}z - \frac{5}{2}$ e $y = \frac{1}{2}z - \frac{3}{2}$

10) $m = -5$

12) a)
$$\begin{cases} y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} z = 2 \\ x = -y + 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x = 2 \\ \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

14) a) 60°

b) 30°

c) 30°

d) $\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \cong 48^\circ 11'$

15) 7 ou 1

16) $\pm\sqrt{15}$

17) -4

18) a) -2 ; b) $-\frac{5}{2}$

19) $m = 10$ e $n = 5$

20) $y = 4x + 9$ e $z = -x - 2$

21) $D(0, 1, 0)$

22) 1 ou $-\frac{3}{2}$

23) a) 4 b) -7 c) $\frac{3}{2}$

24) a) $(1, 2, 3)$

b) $(4, 3, 9)$

c) $(2, 1, -2)$

d) $(1, -5, 5)$

25) a) $(2, 4, -1)$

b) $\theta = \arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$

26) $(\frac{4}{3}, 1, 0)$

27) a) $m = 2$

b) $(-1, -1, -2)$

28)
$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

29)
$$\begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

30)
$$\begin{cases} y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$31) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 5t \\ z = 3t \end{cases}$$

$$32) \begin{cases} a = 14 \\ b = -10 \end{cases}$$

$$33) \begin{array}{l} a) P(15, -3, 33) \\ b) Q(5, -\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}) \end{array}$$

$$34) P_2(-3, -1, 1)$$

$$35) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -2 \end{cases}$$