UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de Análise Numérica I (PPGM)
Professor : Luiz Carlos Matioli

1. (ver Teorema 2.1.6, pg. 113, do Watkins - 2a. edição, ou Teorema 7.3, pg. 402, do Burden) Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$
$$|x^T y| \leq ||x||_2 ||y||_2.$$

2. (a) (ver Teorema 7.7, pg. 404, do Burden) Mostre que para cada $x \in \mathbb{R}^n$
$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$$
(b) (Exercício 2.1.3.1, pg. 120, do Watkins - 2a. edição) Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}^n$
$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_\infty \leq n||x||_\infty$$
Por isso, as normas de vetores são algumas vezes chamadas de normas equivalentes. Existe uma relação também para normas de matrizes, ver por exemplo Teorema 1.7.1, pg. 28 do Datta.

3. Definição de convergência de sequência em $\mathbb{R}^n$: Diz-se que a sequência de vetores $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ converge para x com relação à norma $||\cdot||$ se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existir um inteiro N_ε tal que $||x^k - x|| < \varepsilon, \quad$ para todo $k \geq N_\varepsilon$.

   O resultado a seguir é a convergência componente a componente. Assim, se uma componente do vetor ficar constante em um processo iterativo então a sequência gerada por este processo iterativo não converge.

   Mostre que a sequência de vetores $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ converge para x in $\mathbb{R}^n$ com relação a norma $||\cdot||_\infty$ se e somente se $\lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ (ver Teorema 7.6, pg. 403, do Burden).

4. (ver Stewart pg. 116) Mostre que se $\dfrac{||y - x||}{||x||} \leq \rho < 1$, então $\dfrac{||x - y||}{||y||} \leq \dfrac{\rho}{1 - \rho}$.

5. (idem) Para este exercício, considere o sistema linear $Ax = b$ e o sistema perturbado $\tilde{A}\tilde{x} = b$. Defina o erro $E = \tilde{A} - A$ tal que $\tilde{A} = A + E$.

   (a) Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não singular. Mostre que se $||A^{-1}E|| < 1$, então $A + E$ é não singular.

   (b) Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não singular e $\tilde{A} = A + E$. Mostre que se $Ax = b$ e $\tilde{A}\tilde{x} = b$, onde b é não nulo, então
$$\frac{||\tilde{x} - x||}{||\tilde{x}||} \leq ||A^{-1}E||.$$
   Além disso, se $||A^{-1}E|| < 1$, então $\tilde{A}$ é não singular e
$$\frac{||\tilde{x} - x||}{||\tilde{x}||} < \frac{||A^{-1}E||}{1 - ||A^{-1}E||}.$$

6. (ver Stewart pg. 119) (a) Usando o exercício anterior, faça uma interpretação da desigualdade
$$\frac{||\tilde{x} - x||}{||\tilde{x}||} \lesssim k(A)\frac{||E||}{||A||},$$
em que $k(A)$ é o número de condição da matriz A ($k(A) = ||A||\,||A^{-1}||$).

7. Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $D = diag(A)$ com $a_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Em relação ao método de Jacobi, mostre que:

   (a) $x^{k+1} = D^{-1}[(D - A)x^k + b]$.

   (b) $x^{k+1} = x^k + D^{-1}r^k, \quad$ com $r^k = b - Ax^k$.

   (c) $r^{k+1} = (I - AD^{-1})^{k+1}r^0, \quad$ com $r^0 = b - Ax^0$.

   (d) $x^{k+1} = x^0 + D^{-1}(r^0 + r^1 + \cdots + r^k), \quad$ com $r^\ell = b - Ax^\ell$ e $\ell = 0, 1, \ldots, k$.

8. Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e a partição $A = L+D+U$ em que L é formada pela parte inferior de A, U com a parte superior de A e ambas com zeros na diagonal e D é formada pela parte diagonal de A. Em relação ao método de Gauss-Seidel, mostre que

   (a) $x^{k+1} = D^{-1}[b - Lx^{k+1} - Ux^k]$.

   (b) $x^{k+1} = (D + L)^{-1}(b - Ux^k) \quad$ (forma vista em sala).

   (c) $x^{k+1} = x^k + (L + D)^{-1}r^k, \quad$ com $r^k = b - Ax^k$.

   (d) $x^{k+1} = x^0 + (L + D)^{-1}(r^0 + r^1 + \cdots r^k), \quad$ com $r^\ell = b - Ax^\ell$ e $\ell = 0, 1, \ldots, k$.

9. (Método Gauss-Seidel Simétrico) Uma iteração do método de Gauss-Seidel Simétrico consiste em duas iterações do método Gauss-Seidel padrão, uma na direção adiante (forward) seguida de uma na direção reversa (para trás). Então a primeira metade da iteração é o item (b) do exercicio anterior que foi obtido com $i = 1, \ldots, n$, e a segunda metade é o item (b) do exercício anterior mas obtido com $i = n, \ldots, 1$.

   (a) Obtenha uma fórmula análoga para o método de Gauss-Seidel reverso.

   (b) A iteração adiante do método de Gauss-Seidel simétrico consiste em transformar x^k em $x^{k+\frac{1}{2}}$, seguida por um passo de Gauss-Seidel reverso, transformando $x^{k+\frac{1}{2}}$ em x^{k+1}. Mostre que a iteração do método de Gauss-Seidel Simétrico satisfaz

   $$(D + U)x^{k+1} = L(D + L)^{-1}Ux^k + [I - L(D + L)^{-1}]b.$$

   (c) Mostre que $I - L(D + L)^{-1} = D(D + L)^{-1}$. Então, use este fato, juntamente com a parte (b) deste exercício, para mostrar que a iteração do método Gauss-Seidel Simétrico satisfaz

   $$Mx^{k+1} = Nx^k + b,$$

   em que $M = (D + L)D^{-1}(D + U)$ e $N = (D + L)D^{-1}L(D + L)^{-1}U = LD^{-1}U$.

   (d) Mostre que se A é simétrica então M é simétrica.

   (e) Mostre que M e N determinadas na parte (c), deste exercício, satisfazem $M - N = A$. Então, mostre que com esta escolha de M a iteração do método Gauss-Seidel Simétrico satisfaz

   $$x^{k+1} = x^k + M^{-1}r^k,$$

   em que $r^k = b - Ax^k$.

10. Mostre que se A é uma matriz 2×2 simétrica positiva definida, então o método de Jacobi converge para qualquer escolha do valor inicial.

11. Considere $\alpha \in \mathbb{R}$ e A uma matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que A é positiva definida se e só se $-0.5 < \alpha < 1$.

(b) Mostre que o Método de Jacobi converge se $-0.5 < \alpha < 0.5$.