UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de Análise Numérica I (PPGM)
Professor : Luiz Carlos Matioli

NOTA: Esta lista é continuação da lista 4. Assim, devem ser entregue os exercícios 7, 8, 9 e 10 da lista 4 e os exercícios 3 e 4 desta lista, a qual será chamada de lista 5. **Data da entrega 20/10/15)**.

1. (livro Watkins, pg 542 da 2^a. Edição) (a) Na iteração do Método SOR, mostre que as sucessivas iteradas x^k e x^{k+1} são relacionadas por

$$a_{ii}x_i^{k+1} = a_{ii}x_i^k + w\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^k\right], \quad i = 1\ldots,n.$$

(b) Escreva A=L+D+U. Derive as seguintes expressões para o relacionamento entre as sucessivas iteradas x^k e x^{k+1} do Método SOR

$$Dx^{k+1} = Dx^k + w\left[b - Lx^{k+1} - (D+U)x^k\right].$$

ou

$$\left(\frac{1}{w}D + L\right)x^{k+1} = \left[\left(\frac{1-w}{w}\right)D - U\right]x^k + b.$$

Então $Mx^{k+1} = Nx^k + b$, em que $M = \frac{1}{w}D + L$, $N = \left(\frac{1-w}{w}\right)D - U$ e $A = M - N$.

(c) Mostre que se $r^k = b - Ax^k$, então

$$x^{k+1} = x^k + M^{-1}r^k.$$

2. Reescreva da sua maneira e com todas as hipóteses necessárias o Teorema 7.3.7 do livro Watkins (pg 546 e 547 da 2^a. Edição).

3. (livro Watkins, pg. 561 da 2^a. Edição) Considere A uma matriz quadrada simétrica positiva definida e $f(x) = \frac{1}{2}x^TAx - b^Tx$. Por simplicidade será utilizada a notação x^1 ao invés de x^0. Similarmente a primeira direção de busca será denotada por p^1. Considere um método na qual as n primeiras direções de busca $p^1,\ldots,p^n$ são tomadas como os vetores unitátios padrões $e_1,\ldots,e_n$ (e_i é o vetor cuja componente i vale 1 e as demais são nulas), as próximas n direções de busca $p^{n+1},\ldots,p^{2n}$ são $e_1,\ldots,e_n$ novamente, e também as $p^{2n+1},\ldots,p^{3n}$, assim por diante. Suponha que uma busca exata é realizada em cada passo.

(a) Mostre que cada grupo de n passos é uma iteração do Método Gauss-Seidel.

(b) Mostre que pode acontecer $f(x^{k+1}) = f(x^k)$ mesmo se $x^k \neq x$ (x é a solução exata de Ax=b).

(c) Mostre que a situação descrita na parte (b), deste exercício, não pode persisitir para n passos consecutivos. Em outras palavras, mostre que se $x^k \neq x$, então $f(x^{k+n}) < f(x^k)$.

Este exercício conduz a prova de que o Método Gauss-Seidel aplicado à matriz simétrica positiva definida sempre converge.

4. (idem, pg. 562) Considere w um número fixado e um método que escolhe as direções de busca como as do exercício anterior mas que toma $x^{k+1} = x^k + w\alpha_k p^k$, onde α_k é o incremento determinado por busca exata. Este Método reduz ao Método prévio se $w = 1$. Se $w \neq 1$, a linha de busca é inexata.

   (a) Mostre que cada grupo de n passos é uma iteração do Método SOR com fator de relaxação w.

   (b) Mostre que se $[p^{k+1}]^T r^k \neq 0$, então

   (i) $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ se $0 < w < 2$,

   (ii) $f(x^{k+1}) = f(x^k)$ se $w = 0$ ou $w = 2$ e

   (iii) $f(x^{k+1}) > f(x^k)$ se $w < 0$ ou $w > 2$.

   (c) Mostre que se $x^k \neq x$, então

   (i) $f(x^{k+n}) < f(x^k)$ se $0 < w < 2$,

   (ii) $f(x^{k+n}) = f(x^k)$ se $w = 0$ ou $w = 2$ e

   (iii) $f(x^{k+n}) > f(x^k)$ se $w < 0$ ou $w > 2$

   Isto conduz a uma prova que o Método SOR aplicado à matriz simétrica positiva definida converge se e somente se $0 < w < 2$. Idem para o Método Guss-Seidel (basta tomar $w = 1$). Outro fato decorrente é que o Método SOR pode bater o Método Gauss-Seidel significantemente se w for escolhido bem. Mostrando que buscas exatas não são necessariamente melhores do que buscas inexatas.