UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de Otimização II - PPGM
Professor : Luiz Carlos Matioli

1. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa e limitada por baixo e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ estritamente convexa e coerciva ($\lim_{||x|| \to \infty} g(x) = +\infty$). Se $\lambda > 0$, mostre que $h(x) = f(x) + \lambda g(x)$ é estritamente convexa e coerciva.

2. Considere o problema irrestrito

$$(PI) \qquad \begin{array}{rl} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa e limitada por baixo.

O algoritmo de Ponto Proximal gera uma sequência $\{x^k\}$ da seguinte maneira:

$$x^0 \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$x^{k+1} = argmin\{f_k(x) : x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{2}$$

sendo $f_k(x) = f(x) + \lambda_k ||x - x^k||^2$ e $0 < \lambda_k \leq \bar{\lambda}$, para algum $\bar{\lambda}$.

Mostre que f_k é estritamente convexa e coercia.

3. Mostre que a relação $D_h(x, y) = h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y \rangle$ dada na definição de "distância de Bregman" é uma quase-distância.

4. Considere $S = \mathbb{R}^n$. Mostre que $h(x) = x^T M x$, com $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica e definida positiva, induz uma distância de Bregman dada por $D_h(x, y) = (x - y)^T M (x - y)$.

5. Idem para $S = \mathbb{R}^n_{++}$, $h(x) = \sum_{j=1}^n x_j \log x_j$ (por convenção $0 \log 0 = 0$) e $D_h(x, y) = \sum_{j=1}^n \left(x_j \log \dfrac{x_j}{y_j} + y_j - x_j \right)$.

6. Idem para $S = \mathbb{R}^n_{++}$, $h(x) = \sum_{j=1}^n (x_j^\alpha - x_j^\beta)$ com $\alpha \geq 1$, $0 < \beta < 1$.

   (i) Para $\alpha = 2$, $\beta = \dfrac{1}{2}$, $D_h(x, y) = ||x - y||^2 + \sum_{j=1}^n \dfrac{1}{2\sqrt{y_j}} (\sqrt{x_j} - \sqrt{y_j})^2$.

   (ii) Para $\alpha = 1$, $\beta = \dfrac{1}{2}$, $D_h(x, y) = \sum_{j=1}^n \dfrac{1}{2\sqrt{y_j}} (\sqrt{x_j} - \sqrt{y_j})^2$.

7. Mostre que se h é uma função de Bregman com zona S então

   (a) $D_h(x,y) - D_h(x,z) - D_h(z,y) = \langle \nabla h(y) - \nabla h(z), z - x \rangle, \ \ \forall x \in \bar{S}$ e $y, z \in S$.

   (b) $\nabla_x D_h(x,y) = \nabla h(x) - \nabla h(y), \ \ \forall x, y \in S$.

   (c) $D_h(\cdot, y)$ é estritamente convexa, para todo y em S.

8. Mostre que a função $\psi_1(t) = t \log t - t + 1$ induz a ψ-divergência $d_{\psi_1}(x,y) = \sum_{j=1}^n \left(x_j \log \dfrac{x_j}{y_j} + y_j - x_j \right)$.

9. Mostre que se $\psi_2(t) = t - \log t - 1$ então $d_{\psi_2}(x,y) = d_{\psi_1}(y,x)$, sendo d_{ψ_1} dada no exercício anterior.

10. Mostre que a função $\psi_3(t) = (\sqrt{t} - 1)^2$ induz a ψ-divergência $d_{\psi_3}(x,y) = \sum_{j=1}^n \left(\sqrt{x_j} - \sqrt{y_j} \right)^2$.

11. Considere $\psi : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ dada na definição de ψ-divergência, então: (ver dissertação de Joel Conceição Rabelo - Aluno do Orizon da UFG)

    (a) $\psi(t) \geq 0$ e $\psi(t) = 0$ se, e somente se, $t = 1$;

    (b) $\psi(t)$ é decrescente em $(0, 1)$ e crescente em $[1, +\infty)$;

    (c) $\lim\limits_{t \to +\infty} \psi(t) = +\infty$.

12. Considere $d_\psi : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ uma ψ-divergência. Mostre que:

    (i) $d_\psi(x,y) \geq 0, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n_{++}$;

    (ii) $d_\psi(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

    (iii) Os conjuntos de nível $d_\psi(., y)$ são limitados para todo $y \in \mathbb{R}^n_{++}$;

    (iv) Se $\{y^k\} \subset \mathbb{R}^n_{++}$ converge para $y \in \mathbb{R}^n_+$, então $\lim\limits_{k \to +\infty} d_\psi(y^k, y) = 0$;

    (v) Se $\{y^k\} \subset \mathbb{R}^n_{++}$ satisfaz $\lim\limits_{k \to +\infty} y^k = y \in \mathbb{R}^n_+$ e $\{z^k\} \subset \mathbb{R}^n_+$ é uma sequência limitada tal que $\lim\limits_{k \to +\infty} d_\psi(y^k, z^k) = 0$, então $\lim\limits_{k \to +\infty} z^k = y$.