

(c) Desenhe um gráfico ilustrando como  $\mathbf{x}_3$  pode ser construído geometricamente usando  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ . Use esse gráfico para dar uma interpretação geométrica da sua resposta em (b).

2. Repita o Exercício 1 para os vetores  $\mathbf{x}_1 = (2, 1)^T$  e  $\mathbf{x}_2 = (6, 3)^T$ .  
 3. Seja  $C$  o conjunto dos números complexos. Defina a soma em  $C$  por

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

e defina a multiplicação por um escalar por

$$\alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi$$

para todos os números reais  $\alpha$ . Mostre que  $C$  é um espaço vetorial em relação a essas operações.

4. Mostre que  $R^{m \times n}$ , com as operações usuais de soma e multiplicação por um escalar, satisfaz os oito axiomas de espaços vetoriais.  
 5. Mostre que  $C[a, b]$ , com as operações usuais de soma e multiplicação por um escalar, satisfaz os oito axiomas de espaços vetoriais.  
 6. Seja  $P$  o conjunto de todos os polinômios. Mostre que  $P$ , com as operações usuais de soma e multiplicação por um escalar para funções, forma um espaço vetorial.  
 7. Mostre que o elemento  $\mathbf{0}$  de um espaço vetorial é único.  
 8. Sejam  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  vetores em um espaço vetorial  $V$ . Mostre que, se

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$$

então  $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ .

9. Seja  $V$  um espaço vetorial e seja  $\mathbf{x} \in V$ . Mostre que:  
 (a)  $\beta \mathbf{0} = \mathbf{0}$  para todos os escalares  $\beta$ ;  
 (b) se  $\alpha \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , então  $\alpha = 0$  ou  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .  
 10. Seja  $S$  o conjunto de todos os pares ordenados de números reais. Defina a multiplicação por um escalar e a soma em  $S$  por

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$$

Usamos o símbolo  $\oplus$  para denotar a soma nesse sistema para evitar confusão com a soma usual  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  de vetores linhas. Mostre que  $S$ , junto com a multiplicação usual por um escalar e a operação  $\oplus$ , não é um espaço vetorial. Quais dos oito axiomas não são válidos?

11. Seja  $V$  o conjunto de todos os pares ordenados de números reais com a soma definida por

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

e a multiplicação por um escalar definida por

$$\alpha \circ (x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2)$$

Como a multiplicação por um escalar é definida de maneira diferente da usual, usamos um símbolo diferente para evitar confusão com a multiplicação usual de um vetor linha por um escalar.  $V$  é um espaço vetorial em relação a essas operações? Justifique sua resposta.

12. Denote por  $R^+$  o conjunto dos números reais positivos. Defina a operação de multiplicação por um escalar por

$$\alpha \circ x = x^\alpha$$

para cada  $x \in R^+$  e para cada número real  $\alpha$ . Defina a operação de soma por

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{para todos } x, y \in R^+$$

Então, para esse sistema, o produto do escalar  $-3$  por  $\frac{1}{2}$  é dado por

$$-3 \circ \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

e a soma de 2 com 5 é dada por

$$2 \oplus 5 = 2 \cdot 5 = 10$$

$R^+$  é um espaço vetorial em relação a essas operações? Justifique sua resposta.

13. Seja  $R$  o conjunto de todos os números reais. Defina a multiplicação por um escalar por

$$\alpha x = \alpha \cdot x \quad (\text{a multiplicação usual de números reais})$$

e a soma, denotada por  $\oplus$ , por

$$x \oplus y = \max(x, y) \quad (\text{o máximo entre dois números})$$

$R$  é um espaço vetorial em relação a essas operações? Justifique sua resposta.

14. Denote por  $Z$  o conjunto de todos os números inteiros com a soma definida da maneira usual e a multiplicação por um escalar definida por

$$\alpha \circ k = [[\alpha]] \cdot k \quad \text{para todos } k \in Z$$

onde  $[[\alpha]]$  denota o maior inteiro menor ou igual a  $\alpha$ . Por exemplo,

$$2,25 \circ 4 = [[2,25]] \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8$$

Mostre que  $Z$  não é um espaço vetorial em relação a essas operações. Quais dos axiomas não são válidos?

15. Denote por  $S$  o conjunto de todas as seqüências infinitas de números reais com a multiplicação por um escalar e a soma definidas por

$$\alpha \{a_n\} = \{\alpha a_n\}$$

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

Mostre que  $S$  é um espaço vetorial.

16. Podemos definir uma bijeção entre os elementos de  $P_n$  e de  $R^n$  por

$$p(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1} \leftrightarrow (a_1, \dots, a_n)^T = \mathbf{a}$$

Mostre que, se  $p \leftrightarrow \mathbf{a}$  e  $q \leftrightarrow \mathbf{b}$ , então

(a)  $\alpha p \leftrightarrow \alpha \mathbf{a}$  qualquer que seja o escalar  $\alpha$ ;

(b)  $p + q \leftrightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b}$ .

[Em geral, dois espaços vetoriais são ditos *isomorfos* se existe uma bijeção entre eles que preserve a multiplicação por um escalar e a soma como em (a) e (b).]

## 2 SUBESPAÇOS

Dado um espaço vetorial  $V$ , é muitas vezes possível formar um outro espaço vetorial usando um subconjunto  $S$  de  $V$  e as operações de  $V$ . Como  $V$  é um espaço vetorial, as operações de soma e multiplicação por um escalar sempre produzem um outro vetor em  $V$ . Para um novo sistema, usando um subconjunto  $S$  de  $V$ , ser um espaço vetorial, o conjunto  $S$  tem que ser fechado em relação às operações de soma e multiplicação por um escalar. Em outras palavras, a soma de dois elementos em  $S$  tem que ser sempre um elemento de  $S$  e a multiplicação de um elemento de  $S$  por um escalar tem que pertencer sempre a  $S$ .

**EXEMPLO 1.** Seja  $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 = 2x_1 \right\}$ .  $S$  é um subconjunto de  $R^2$ . Se  $\begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix}$  é um elemento qualquer de  $S$  e  $\alpha$  é um escalar arbitrário, então

$$\alpha \begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha c \\ 2\alpha c \end{pmatrix}$$

é um elemento de  $S$ . Se  $\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} b \\ 2b \end{pmatrix}$  são dois elementos arbitrários de  $S$ , então sua soma

$$\begin{pmatrix} a + b \\ 2a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ 2(a + b) \end{pmatrix}$$