

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de Otimização II (PPGMA)
Professor : Luiz Carlos Matioli

1. Considere o problema quadrático (um subproblema de PQS)

$$(PQ) \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Suponha que Q é positiva definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Determine \bar{x} e o correspondente vetor de multiplicadores de Lagrange que são soluções de (PQ).

2. Considere o problema não linear

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x_1, x_2) = e^{3x_1+4x_2} \\ \text{sujeito a} & h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{array}$$

(a) Mostre que $\bar{x} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)^T$ é a solução ótima com $\bar{\lambda} = -\frac{5}{2}e^{-5}$ multiplicador ótimo correspondente.

(b) Resolva o problema quadrático em $x = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)^T$ e $\lambda = \frac{5}{2}e^{-5}$

3. Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x^T Qx \\ \text{sujeito a} & x^T x \leq 1 \\ & x \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suponha que $x_0 = (1, 1)^T$ e λ_0 é dado. Encontre x_1 e λ_1 usando o método de programação quadrática sequencial. Sob que condições $\lambda_1 = \lambda_0$?

4. (a) Descreva, de maneira sucinta, o que é o efeito Maratos (Sugestão Nocedal, Bazaraa, outros)
(b) O que é a correção de segunda ordem? (Nocedal é uma boa referência).
(c) Existem outras correções para o efeito Maratos? Quais? (idem).

5. (Este exercício ilustra uma patologia de programação quadrática sequencial que é chamada de efeito Maratos). Considere o problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 2(x_1^2 + x_2 - 1) - x_1 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1^2 + x_2 - 1 = 0 \\ & x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

(a) Prove que $\bar{x} = (1, 0)^T$ é o minimizador com multiplicador associado $\bar{\lambda} = 3/2$.

(b) Suponha que $x^k = (\cos \theta, \sin \theta)$ em que $\theta \approx 0$. Verifique que x^k é viável e próximo de \bar{x} . Faça $\lambda_k = \bar{\lambda}$ e resolva o correspondente programa quadrático neste ponto. Mostre que a solução é $p^k = (\sin^2 \theta, -\sin \theta \cos \theta)^T$. Mostre que se $x^{k+1} = x^k + p^k$ então $f(x^{k+1}) > f(x^k)$ e que x^{k+1} é inviável. Isso mostra que, mesmo próximo da solução, um passo pequeno ao longo da direção de Newton pode aumentar o valor de função de mérito. Sugestão: O Nocedal faz grande parte das contas necessárias para resolver o exercício. Este exemplo foi proposto por Powell, mas existem outros que também comprovam o efeito Maratos, isto significa que não é incomum que o mesmo ocorra).