UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de Análise Numérica I (PPGM)
Professor : Luiz Carlos Matioli

NOTA: Os exercícios 4, 7, 8, 9, 10, 14, 18 e 20 devem ser entregues até o dia da prova.

1. Os exercícios 1 a 6 tem a finalidade de explorar rotações (outro tipo de transformação de matriz conhecida como rotação de Givens). Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

é chamada matriz de rotação.

(a) Determine Q para $\theta = \pi/4$. Trabalhe com Q como uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e aplique Q aos pontos (vetores em $\mathbb{R}^2$) (1,0) e (0,1). Interprete geometricamente o resultado (ver livro do Watkins pg. 189 da 2a. edição).

(b) Verifique que toda rotação é uma matriz ortogonal com determinte 1. Qual a inverse desta rotação? Qual transformação ela representa?

(c) Considere $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Mostre que se $\cos\theta = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$ e $\text{sen}\theta = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$, então $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = ||x||_2$.

Nota 1: A rotação anterior pode ser utilizada para determinar a decomposição QR de uma matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ da seguinte forma:

$$Q^T \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde $r_{11} = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}$. Defina r_{12} e r_{22} por

$$\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

e seja

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}$$

então $Q^T A = R$ ou equivalentemente $A = QR$, sendo Q uma matriz ortogonal e R uma matriz triangular superior.

2. Utilize a decomposição QR, dada acima, para resolver o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nota 2: Generalização da Rotação de Givens. A rotação do plano é uma matriz $n \times n$ da forma

$$
Q = \begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& c &&&& -s &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& s &&&& c &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right)
&
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccccccc}
&&& \uparrow &&&& \uparrow &&& \\
&&& i &&&& j &&&
\end{array}
&
\end{array}
\tag{1}
$$

onde $c = \cos\theta$ e $s = \text{sen}\theta$.

3. (3.2.16 do Watkins, pg. 192 da 2a. edição) Prove que toda rotação é ortogonal e tem determinante 1.

4. (3.2.17 do Watkins, pg. 192 da 2a. edição) Considere Q a rotação (1) acima. Mostre que a transformação $x \to Qx$ e $x \to Q^T x$ alteram somente a $i-ésima$ e a $j-ésima$ entrada de x e que o efeito destas entradas é o mesmo que aquelas da rotação 2×2 $\hat{Q} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ e $\hat{Q}^T = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$ do vetor $\begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix}$.

   Neste caso,
   $$\cos\theta = c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} \quad \text{e} \quad \text{sen}\theta = s = \frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}.$$
   (se $x_i = x_j = 0$, tome $c = 1$ e $s = 0$).

5. (3.2.19 do Watkins, pg. 192 da 2a. edição) (a) Mostre que $i-ésima$ e a $j-ésima$ linhas de QA são combinações lineares da $i-ésima$ e a $j-ésima$ linhas de A, sendo A uma matriz $n \times m$.

   (b) Mostre que $i-ésima$ e a $j-ésima$ colunas de BQ são combinações lineares da $i-ésima$ e a $j-ésima$ colunas de B, sendo B uma matriz $m \times n$.

6. (ver Teorema 3.2.20 do Watkins, pg. 193 da 2a. edição) Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Então existe uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior R tal que $A = QR$.

   Nota 3: Os exercícios 7 a 10 seguintes são sobre transformação hiperbólica - similar a Givens. Além disso, será explorada a estrutura em blocos de uma matriz.

7. (3.6.12 do Watkins, pg. 256 da 2a. edição) Uma matriz $H \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é chamada uma transformação hiperbólica se ela tem a forma
   $$H = \begin{pmatrix} c & s \\ s & c \end{pmatrix},$$
   onde $c > 0$ e $c^2 - s^2 = 1$.

O conjunto de todos os pares (c, s) que satisfazem $c^2 - s^2 = 1$ é uma hipérbole no plano c-s. Para qualquer par (c, s) satisfazendo $c^2 - s^2 = 1$ existe um número α tal que $c = \cosh\alpha$ e $s = \text{senh}\alpha$.

(a) Mostre que toda transformação hiperbólica H é não singular. Encontre o determinante de H. O que é H^{-1}? Note que H^{-1} também é uma hipérbole.

(b) Considre $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Mostre que se H é uma hipérbole, então $H^T J H = J$. Naturalmente, $H = H^T$, mas é útil escrever a identidade em termos da transposta.

(c) Mostre que se $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ com $|a| > |b|$, então existe uma única transformação hiperbólica H tal que

$$\begin{pmatrix} c & s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 - b^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Podemos embutir transformações hiperbólica em matrizes maiores, justamente como fizemos para rotação de Givens. Considere

$$H = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & c & & s & \\ & & I & & \\ & s & & c & \\ & & & & I \end{pmatrix},$$

onde $c > 0$ e $c^2 - s^2 = 1$. Suponhamos que as linhas e colunas na qual a transformação hiperbólica é embutida são i e j $(i < j)$. Seja J qualquer matriz diagonal com 1 e -1 nas posições (i, i) e (j, j), respectivamente. Mostre que $H^T J H = J$. Mostre que se $\hat{S} = HS$, então $\hat{S}^T J \hat{S} = S^T J S$. Mostre que $\hat{S}$ e S diferem somente na $i - \acute{e}sima$ e $j - \acute{e}sima$ linhas.

8. (3.6.14 do Watkins, pg. 257 da 2a. edição) Neste exercício mostramos como o uso da transformação hiperbólica pode atualizar a decomposição de Cholesky. Considere

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ z^T \\ A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times m} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

e suponha que A tem posto m. Suponhamos que $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, o fator de Cholesky de $\tilde{A}^T \tilde{A}$, e gostaríamos de obter $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$, o fator de Cholesky de $A^T A$.

(a) Considere

$$J = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0^T & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}.$$

Mostre que

$$A^T A = \tilde{A}^T \tilde{A} - zz^T = \tilde{R}^T \tilde{R} - zz^T = [\tilde{R}^T \ \ z] J \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ z^T \end{bmatrix}.$$

Nosso plano é obter o fator de Cholesky de A^TA eliminando as entradas de z^T na matriz

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ z^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & \cdots \\ 0 & \tilde{r}_{22} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ & \vdots & \\ z_1 & z_2 & \ldots \end{bmatrix}.$$

Para este propósito será usado transformação hiperbólica.

(b) Usando o fato que A^TA é positiva definida, demonstre que $\tilde{r}_{11}^2 - z_1^2 > 0$, donde $|\tilde{r}_{11}| > |z_1|$. Construa uma transformação hiperbólica $H_1 \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$ que atua nas linhas 1 e $m+1$, tal que

$$S_1 = H_1\tilde{S} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots \\ 0 & \tilde{r}_{22} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ & \vdots & \\ 0 & \hat{z}_2 & \ldots \end{bmatrix}.$$

a entrada z_1 foi zerada. A entrada $\hat{z}_2$ difere de z_2, mas ela é, em geral, não nula.

(c) Mostre que $A^TA = \tilde{S}^TJ\tilde{S} = S_1^TJS_1$.

(d) No exercício a seguir será mostrado que $|\tilde{r}_{22}| > |\hat{z}_2|$, e correspondentes desigualdades apropriadas se verificam para todos os passos subsequentes. Assumindo que estas desigualdades são verdadeiras, esboce um algoritmo que aplica a sequencia de m transformações hiperbólicas $H_1, \ldots, H_m$ para $\tilde{S}$, transformando-a assim em uma matriz $S = S_m = H_m \cdots H_1\tilde{S}$ da forma $S = \begin{bmatrix} R \\ 0^T \end{bmatrix}$, onde R é triangular superior e tem as entradas da diagonal principal positivas. Mostre que $A^TA = S^TJS = R^TR$. Então R é o fator de Cholesky de A^TA.

9. (3.6.15 do Watkins, pg. 258 da 2a. edição) Após k passos do algoritmo esboçado no exercício anterior, temos que $\tilde{S}$ transformado na forma

$$S_k = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & \tilde{R}_{22} \\ 0^T & \hat{z}^T \end{bmatrix},$$

onde R_{11} é $k \times k$. Temos que $A^TA = S_k^TJS_k$, onde J foi definido no exercício anterior. Seja $A = [A^{(1)} \;\; A^{(2)}]$, onde $A^{(1)}$ tem k colunas.

(a) Mostre que $A^{(1)T}A^{(1)} = R_{11}^TR_{11}$ e $A^{(1)T}A^{(2)} = R_{11}^TR_{12}$, e deduza que R_{11} e R_{12} são fatores blocos de Cholesky de A^TA.

(b) Mostre que $A^{(2)T}A^{(2)} - R_{12}^TR_{12} = \tilde{R}_{22}^T\tilde{R}_{22} - \hat{z}\hat{z}^T$. É possível mostrar que $A^{(2)T}A^{(2)} - R_{12}^TR_{12}$ é o complemento de Schur de $A^{(1)T}A^{(1)}$ em A^TA e é positiva definida (esta parte não precisa demonstrar porque depende de outros exercícios, específicamente o exercício 1.4.58 e material próximo a este - ver Watkins pg. 48 e vizinhas).

(c) Usar a positividade definida de $A^{(2)T}A^{(2)} - R_{12}^TR_{12}$ para provar que a entrada $(1,1)$ de $\tilde{R}_{22}$, a qual chamamos de $\tilde{r}_{k+1,k+1}$, e a entrada principal de $\hat{z}^T$, a qual chamamos de $\hat{z}_{k+1}$, satisfazem $|\tilde{r}_{k+1,k+1}| > |\hat{z}_{k+1}|$. Então nós podemos usar a transformação hiperbólica para o $(k+1) - \acute{e}simo$ passo.

10. (3.6.15 do Watkins, pg. 258 da 2a. edição) Neste exercício mostramos que transformações hiperbólicas podem ser arbitrariamente mal condicionadas.

    (a) Considere um número L positivo enorme (tão grande quanto você queira). Encontre dois números positivos c e s tal que $c \geq L$, $s \geq L$ e $c^2 - s^2 = 1$. Então

    $$H = \begin{bmatrix} c & s \\ s & c \end{bmatrix}$$

    é uma transformação hiperbólica com norma grande. Mostre que $||H||_\infty = ||H^{-1}||_\infty = c + s \geq 2L$ e $\kappa_\infty(H) \geq 4L^2$.

    (b) Mostre que $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de H com autovalor associado $(c + s)$ e que $w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de H com autovalor associado $(c - s)$. Mostre que $H^{-1}w = (c + s)w$, ou seja w é um autovetor de H^{-1} com autovalor associado $(c + s)$.

    (c) Usando os resultados do item (b), mostre que $||H||_2 \geq (c + s)$, $||H^{-1}||_2 \geq (c + s)$, e $\kappa_2(H) \geq (c + 2)^2$.

11. (ver Teorema 3.4.2 do Watkins, pg. 221 da 2a. edição) Considere a matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que Q é uma matriz ortogonal se e somente se suas colunas (linhas) formam um conjunto ortonormal.

12. (3.4.3 do Watkins, pg. 221 da 2a. edição) Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a base padrão do $\mathbb{R}^n$ sendo $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ o vetor com 1 na posição i e zero nas demais. Mostre que a i-ésima coluna de A é Ae_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Então $A = [Ae_1 Ae_2 \cdots Ae_n]$.

    Definição: Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$, com $n \geq m$, será chamada isométrica (ou uma isometria) se suas colunas são ortonormais.

13. Mostre que $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ é uma isometria se e somente se $Q^TQ = I$ $(I \in \mathbb{R}^{m\times m})$.

    IMPORTANTE: o resultado deste exercício não implica que Q^T é Q^{-1}. Somente matrizes quadradas podem ter inversas (a menos da inversa generalizada para matrizes não quadradas). Além disso, QQ^T não é a matriz identidade.

14. Considere $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $(n > m)$ uma isometria com colunas $q_1, q_2, \dots, q_m$.

    (a) Se $v \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal a $q_1, q_2, \dots, q_m$ então $QQ^Tv = 0$.

    (b) Mostre que $QQ^Tq_i = q_i$, $i = 1, 2, \dots, m$.

    (c) Se $v \in \mathbb{R}^n$ é combinação linear de $q_1, q_2, \dots, q_m$ então $QQ^Tv = v$.

    (NOTA: QQ^T se comporta como a matriz identidade de um subespaço próprio de $\mathbb{R}^n$.

    (c) Mostre que $(QQ^T)^2 = QQ^T$.

15. Mostre que se $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ é uma isometria, então

    (a) $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$.

    (b) $||Qx|| = ||x||$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

16. (a) Considere $v_1 = (3, -3, 3, -3)^T$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)^T$. Aplicar o processo de Gram-Schmidt a v_1 e v_2 para determinar uma base ortornormal para um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(b) Conisere a matriz $V \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ dada por

$$V = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \\ 3 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Use o resultado da parte (a) para encontrar uma isometria $Q \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ e uma matriz triangular superior $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ com as entradas diagonais positivas, tal que $V = QR$.

17. (a) Utilize o processo de Gram-Schmidt para obter a decomposição QR da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Resolva o problema de quadrados mínimos $Ax = b$ sendo $b = [-2, 2, 1]^T$.

18. Considere $A = U\Sigma V^T$ a decomposição SVD de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, com $m \geq n$, e r=rank(A).

(a) Mostre que $V^T(A^TA)V = diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0)_{n\times n}$ (é só desenvolver A^TA).

(b) Considere $b \in \mathbb{R}^m$ e o resíduo $r(x) = Ax - b$. Utilizando a decomposição SVD de A mostre que $||r(x)||_2 = ||\Sigma y - c||_2$ onde $V^Tx = y$ e $U^Tb = c$.

(c) Utilizando o item (b) mostre que $||r(x)||_2^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{r}(\sigma_i y_i - c_i)^2 + \sum_{i=r+1}^{m} c_i^2$.

(d) Utilizando o item (c) mostre que a solução do problema de quadrados mínimos, isto é min $||r(x)||_2$, é dada por

$$y_i = \begin{cases} \dfrac{c_i}{\sigma_i} & \text{se} \quad \sigma_i \neq 0 \\ \text{arbitrário} & \text{se} \quad \sigma_i = 0 \end{cases} \qquad (0.5)$$

19. Considere $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e a decomposição SVD de $A = U\Sigma V^T$ sendo $U = \begin{pmatrix} -0.6155 & 0.7071 & -0.3482 \\ -0.6155 & -0.7071 & -0.3482 \\ -0.4924 & 0.0000 & 0.8704 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 5.7446 & 0 \\ 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $V = \begin{pmatrix} -0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & -0.7071 \end{pmatrix}$.

Resolva o problema de quadrados mínimos $Ax = b$, com $b = [1, 2, 3]^T$, pelos seguintes métodos:

(a) Utilizando a equação normal.

(b) A decomposição SVD de A.

20. (3.1.5 do Watkins, pg. 184 da 2a. edição) Considere os seguintes dados

t_i	1	1.5	2	2.5	3
y_i	1.1	1.2	1.3	1.3	1.4

(a) Criar um sistema sobredeterminado que "ajuste"os pontos dados. Use a base de polinômios padrão $\phi_1(t) = 1$, $\phi_2(t) = t$.

(b) Use o Matlab para calcular a solução de quadrados mínimos do sistema formado na parte (a). Basta usar o comando $x = A\backslash b$.

(c) Use o comando plot do Matlab para plotar os pontos dados e a linha reta que ajusta os pontos dados.

(d) Use o Matlab para calcular $||r||_2$, a norma do resíduo.

21. (3.1.6 do Watkins, pg. 184 da 2a. edição) Repita o exercício anterior, mas desta vez calcule o melhor polinômio de quadrados mínimos de grau ≤ 2. Note que neste caso a norma do resíduo é menor.