UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de Otimização II (Curso: Matemática Industrial)
Professor : Luiz Carlos Matioli

Para as questões seguintes utilize os problemas primal (P) e dual (D) dados, respectivamente, por:

$$(P) \qquad \begin{array}{cc} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & g(x) \leq 0 \\ & x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

$$(D) \qquad \begin{array}{cc} \text{maximizar} & \theta(\mu) \\ \text{sujeito a} & \mu \geq 0 \end{array}$$

sendo $g \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^m \longmapsto \theta(\mu) = \inf\{\ell(x,\mu) : x \in X\}$ e ℓ a função Lagrangeana associada ao problema (P).

1. Mostre que a função θ do problema (D) é concava.

2. Encontre o dual do seguinte problema de programação linear (observe como estão os formatos dos problemas primal (P) e dual (D) acima)

$$\begin{array}{cc} \text{maximizar} & b^T y \\ \text{sujeito a} & A^T y \leq c \\ & y \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

em que b é um vetor em $\mathbb{R}^m$, c é um vetor em $\mathbb{R}^n$ e A uma matrix real com m linhas e n colunas.

3. Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica definida positiva e c um vetor em $\mathbb{R}^n$. Encontre o problema dual do seguinte problema quadrático

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x^T A x + c^T x \\ \text{sujeito a} & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

4. Idem ao anterior para seguinte problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x^T x + c^T x \\ \text{sujeito a} & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

5. Idem aos anteriores para o seguinte problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \dfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) - 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6.8x_4 + 9.2x_5 + x_6 \\ \text{sujeito a} & x_1 \geq 0, \; i = 1 \ldots 6. \end{array}$$

6. Prove os 4 corolários do Teorema de dualidade fraca (exercícios dados em sala de aula).

   Os próximos exercícios são sugestões do Professor Lucas Pedroso.

7. Para cada um dos problemas abaixo:

   (i) Qual é a solução do problema? Qual é o multiplicador de Lagrange associado à restrição?

   (ii) Encontre o respectivo problema dual. Verifique que sua solução é o multiplicador de Lagrange do problema original.

   (iii) Apenas para os dois primeiros problemas: verifique que o dual do problema dual é o problema original.

   (a) $\min e^x$ sujeita a $x \geq 1$.
   (b) $\min x^2$ sujeita a $x \geq 1$.
   (c) $\min \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + x_1$ sujeita a $x_1 \geq 0$.
   (d) $\min x_1^2 + 2x_2^2$ sujeita a $x_1 + x_2 = 3$.

8. Encontre o dual do problema $\min e^x$ sujeita a $-1 \leq x \leq 1$.

9. Considere $\min 0$ sujeita a $e^x \leq 0$. Mostre que o problema é infactível mas seu dual possui solução finita.

10. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}^n$. Para cada um dos problemas abaixo, encontre uma formulação para o dual que não envolva a variável x.

    (a) $\min c^T x$ sujeita a $Ax = b$, $x \geq 0$.
    (b) $\min b^T x$ sujeita a $A^T x \leq c$.