UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios - Otimização II
Professor : Luiz Carlos Matioli

Para esta lista de exercícios serão utilizadas as notações a seguir. Os problemas serão denominados, respectivamente, por problema de otimização e de resolução de sistema (não linear).

$$(PI) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

e

$$(S) \qquad \text{Determinar } x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0$$

sendo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

1. Seja $F(x)$ no sistema (S) dada pelas seguintes componentes: $F_1(x) = x_1 + x_2 - 3$ e $F_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 9$. Pede-se

   (a) Encontre a Jacobiana de F em $x \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Avalie a Jacobiana em $x = (1, 0)^T$ e $x = (1, 5)^T$.

   (c) Faça três iterações do Método de Newton (puro = sem busca) para resolver $F(x) = 0$, partindo, se possível, de $x^0 = (1, 5)^T$.

   (d) Através do procedimento visto em sala transforme o problema de resolver S em um problema de otimização do tipo (PI). Encontre o gradiente e a hessiana da função objetivo do problema (PI).

2. Considere $f(x) = x^3 - x$, para $x \in \mathbb{R}$. Construa um modelo linear, $m_k(x)$, de f, próximo aos pontos: (i) $x = 0$, (ii) $x = \sqrt{3}/3$ e (iii) $x = 2$. Explique o que acontece em cada uma das situações.

3. Idem ao item anterior para um modelo quadrático de f.

4. Cite todos os métodos que já estudou para resolver os problemas (S) e (PI).

5. Explique como resolver (PI) através de resolução de sistema (S) e como resolver (S) através de problema de otimização (PI).

6. Considere $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ no problema (PI). Esta função é conhecida como função banana ou função de Rosenbrock.

   (a) Econtre o gradiente e a Hessiana de f.

   (b) Avalie o gradiente e a Hessiana em $x = (0, 0)^T$. Verifique se a Hessiana é definida positiva.

   (c) Encontre um modelo linear de f, $m_k(x)$. Avalie o modelo em $x^0 = (0, 0)^T$ e compare com $f(x^0)$.

   (d) Idem para o modelo quadrático.

   (e) Faça, se possível, 3 iterações do método de Newton para resolver (PI) com a função de Rosenbrock.

7. Descreva condições necessárias para minimizadores locais do problema (PI). Se (PI) é convexo o que muda?

8. Descreva condições suficientes para minimizadores locais do problema (PI).

9. Em que condições os minimizadores locais são também globais para o problema (PI).

10. Considere o problema restrito

$$(PR) \qquad \begin{array}{rc} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & g(x) \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

sendo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funções com derivadas contínuas

(a) Escreva as condições de KKT para o problema (PR).

(b) Escreva o problema (PR) para $f(x) = \dfrac{1}{2}x^T x + c^T x$ e $g(x) = -x$, sendo $x \in \mathbb{R}^n$ e c uma constante em $\mathbb{R}^n$.

(c) Utilizando KKT, resolva o problema do item anterior para $x \in \mathbb{R}^2$ e $c = (1, 2)^T$.

(d) Idem ao anterior para $x \in \mathbb{R}^n$ e c uma constante qualquer em $\mathbb{R}^n$.

11. Escreva as condições de KKT para o problema (PR) se as restrições são somente de igualdade.

12. Quais são as diferenças entre as condições de KKT para o problema com restrições só de igualdade e só de desigualdades?

13. Escreva condições de KKT para o problema com m restrições de desigualdades e p restrições de igualdade.

14. Utilizando KKT avalie a(s) solução(ões) do seguintes problemas

$$(P1) \qquad \begin{array}{rc} \text{minimizar} & x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x \in \mathbb{R}^3 \end{array}$$

e

$$(P2) \qquad \begin{array}{rc} \text{minimizar} & -6x_1 - 4x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 13 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

15. Implemente o algoritmo de Newton puro para o problema (S). Aplique-o para resolver o exercício 1, partindo de $x^0 = (0, 2)^T$ e de $x^0 = (2, 0)^T$. O método encontrou a mesma solução para ambos os pontos inciais? Explique porque.

16. Implemente o método de Newton com busca para o problema (PI).

17. Aplique o algoritmo do exercício anterior para o problema (PI) com a função de Rosenbrock, utilize vários valores inciais. O método encontra uma solução para todos os valores inciais que escolheu? Caso não encontre justifique porque isso acontece.

18. Aplique o algoritmo de Newton com busca para resolver o sistema (S) com F dada no exercício 1 e os seguintes valores iniciais: $x^0 = (0, 2)^T$ e $x^0 = (2, 0)^T$.